Κεφάλαιο 1

Διαφορικές εξισώσεις α΄ τάξης

Λύση Άσκησης 1.26

β) Η (i) γράφεται ως

$$y'(x) - y(x) = x,$$

οπότε η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int -dx}\left(\int xe^{\int -dx}dx + c\right) \\ &= e^{x}\left(\int xe^{-x}dx + c\right) \\ &= e^{x}\left(-e^{-x}(1+x) + c\right) \\ &= ce^{x} - (1+x). \end{aligned}$$

Επειδή $y(0) = 1$,

$$y(0) = ce^{0} - (1+0) \;\Leftrightarrow\; 1 = c - 1 \;\Leftrightarrow\; c = 2,$$

οπότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$y(x) = 2e^{x} - (1+x).$$

Λύση Άσκησης 1.4

Η (i) γράφεται

$$y' + \frac{2x+1}{x}y = e^{-2x}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1, η γενική λύση της γραμμικής αυτής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{-\int \frac{2x+1}{x}dx}\left(\int e^{-2x}e^{\int \frac{2x+1}{x}dx}dx + c\right)\\
&= e^{-(2x+\ln|x|)}\left(\int e^{-2x}e^{2x+\ln|x|}dx + c\right)\\
&= e^{-\ln(xe^{2x})}\left(\int e^{-2x}e^{\ln(xe^{2x})}dx + c\right)\\
&= \frac{1}{xe^{2x}}\left(\int e^{-2x}xe^{2x}dx + c\right)\\
&= \frac{1}{xe^{2x}}\left(\int xdx + c\right)\\
&= \frac{1}{xe^{2x}}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)\\
&= e^{-2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{c}{x}\right)
\end{aligned}$$

(επειδή $x > 0$).

Λύση Άσκησης 1.6

$$\begin{aligned} n(t) &= \frac{5N_0}{1+\frac{5N_0-N_0}{N_0}e^{-k5N_0t}} \\ &= \frac{4N_0}{1+4e^{-5kN_0t}} \end{aligned}$$

Επειδή ο πληθυσμός διπλασιάζεται τη χρονική στιγμή T,

$$\begin{aligned} n(2T)=2N_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{4N_0}{1+4e^{-5kN_0T}} = 2N_0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1+4e^{-4kN_0T} = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-5kN_0T} = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad -5kN_0T = \ln\frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{5N_0T}\ln 4 \end{aligned}$$

Ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού γίνεται μέγιστος τη χρονική στιγμή t_1 την οποία

$$n(t_1) = \frac{5N_0}{2}$$

Λύση Άσκησης 1.12

Η (i) είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και γράφεται

$$\frac{dI}{I} = -\mu dx,$$

οπότε

$$\int \frac{dI}{I} = \int -\mu dx$$

$$\ln I = -\mu x + c. \qquad (ii)$$

Επειδή $I(0) = I_0$, η (ii) δίνει

$$\ln I_0 = -\mu \cdot 0 + c \iff c = \ln I_0.$$

οπότε η (ii) γίνεται

$$\ln I = -\mu x + \ln I_0$$

ή

$$\ln I - \ln I_0 = -\mu x$$

ή

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\mu x$$

ή

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu x}$$

οπότε

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x}$$

Άρα, στη θέση $x = \dfrac{3}{\mu}$ η ένταση είναι

$$I\left(\frac{3}{\mu}\right) = I_0 e^{-\mu \frac{3}{\mu}} = I_0 e^{-3} = \frac{I_0}{e^3}$$

Λύση Άσκησης 1.14

α) Η (i) είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και γράφεται

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

οπότε

$$\int \frac{dN}{N} = \int -\lambda dt + c \Leftrightarrow \ln N = -\lambda t + c. \qquad (ii)$$

Αν N_0 ο αρχικός αριθμός ραδιενεργών πυρήνων στο δείγμα, $N(0) = N_0$, οπότε η (ii) δίνει

$$\ln N_0 = -\lambda \cdot 0 + c \Leftrightarrow c = \ln N_0.$$

Έτσι η (ii) γίνεται

$$\begin{aligned} \ln N = -\lambda t + \ln N_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln N - \ln N_0 = -\lambda t \\ &\Leftrightarrow \quad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

οπότε ο αριθμός των εναπομεινάντων πυρήνων την χρονική στιγμή t είναι

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \qquad (iii)$$

Επειδή το ένα τρίτο των πυρήνων του δείγματος έχουν διασπαστεί σε 5 ώρες, έχει μείνει το $\frac{2}{3}$ των πυρήνων, οπότε $N(5) = \frac{2N_0}{3}$ και η (iii) δίνει

$$\begin{aligned} \frac{2N_0}{3} = N_0 e^{-\lambda 5} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-\lambda 5} = \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad -\lambda 5 = \ln \frac{2}{3} = -\ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

οπότε

$$\lambda = \frac{1}{5} \ln \frac{3}{2}$$

Ο αριθμός $N(t)$ των εναπομείναντων πυρήνων μετα από άλλες 10 ώρες (δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = 15$ώρες) είναι

$$\begin{aligned} N(15) &= N_0 e^{-\frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}15} \\ &= N_0 e^{-3\ln\frac{3}{2}} \\ &= N_0 e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}} \\ &= N_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \\ &= N_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{3} \\ &= \frac{8}{27} N_0, \end{aligned}$$

οπότε το κλάσμα των αρχικών πυρήνων που θα διασπαστούν τις επόμενες 10 ώρες είναι

$$\frac{N(5)-N(15)}{N_0} = \frac{\frac{2N_0}{3}-\frac{8N_0}{27}}{N_0} = \frac{10}{27}$$

Λύση Άσκησης 1.15

Οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στις ισοδυναμικές γραμμές, οπότε η κλίση τους είναι ίση με

$$-\frac{1}{\lambda}$$

όπου λ η κλίση των ισοδυναμικών γραμμών, που στην περίπτωση του πεδίου αυτού, λόγω της (i), είναι

$$\lambda = \frac{3y}{2(x^2+y^2)}$$

Επομένως, οι δυναμικές γραμμές είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = -\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{\dfrac{3y}{2(x^2+y^2)}} = -\frac{2}{3}\frac{x^2+y^2}{y}$$

ή

$$y' + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}x^2y^{-1} = 0 \qquad (i)$$

Η (i) είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli με $n = -1$.
Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (i) επί $y^{-(-1)} = y$ προκύπτει

$$yy' + \frac{2}{3}y^2 = -\frac{2}{3}x^2 \qquad (ii)$$

οπότε, θέτοντας

$$u(x) = y^{1-(-1)} = y^2 \qquad (iii)$$

$$\frac{du}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

ή

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{du}{dx}$$

οπότε η (iii) γίνεται

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx} + \frac{2}{3}u = -\frac{2}{3}x^2$$

ή

$$\frac{du}{dx} + \frac{4}{3}u = -\frac{4}{3}x^2$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση για τη συνάρτηση $u(x)$ είναι γραμμική, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1, η γενική λύση της είναι

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{-\int \frac{4}{3}dx}\left(\int -\frac{4}{3}x^2 e^{\int \frac{4}{3}dx}dx + c\right) \\
&= e^{-\frac{4}{3}x}\left(\int -\frac{4}{3}x^2 e^{\frac{4}{3}x}dx + c\right) \\
&= e^{-\frac{4}{3}x}\left(-\frac{4}{3}\int x^2 e^{\frac{4}{3}x}dx + c\right) \\
&= e^{-\frac{4}{3}x}\left(-\frac{4}{3}\right)\left[e^{\frac{4}{3}x}\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{9}{8}\frac{3}{4}\right) + c\right] \\
&= -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} + ce^{-\frac{4}{3}x}
\end{aligned}$$

(για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int x^2 e^{\frac{4}{3}x}dx$ εφαρμόσαμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες).
Έτσι, λόγω της (iv), προκύπτει ότι η γενική λύση της (i), δηλαδή η εξίσωση των δυναμικών γραμμών του πεδίου αυτού είναι

$$y^2 = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} + ce^{-\frac{4}{3}x}$$

Λύση Άσκησης 1.22

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v της βάρκας δίνεται από τον Β′ νόμο του Νεύτωνα

$$m\frac{dv}{dt} = -bv. \qquad (i)$$

Η (i) είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και γράφεται

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}dt,$$

οπότε

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{b}{m}dt$$

ή

$$\ln v = -\frac{b}{m}t + c. \qquad (ii)$$

Επειδή $v(0) = v_0 = 10\frac{m}{s}$, η (ii) δίνει

$$\ln 10 = -\frac{b}{m}\cdot 0 + c \;\Leftrightarrow\; c = \ln 10.$$

οπότε η (ii) γίνεται

$$\ln v = -\frac{b}{m}x + \ln 10$$

ή

$$\ln v - \ln 10 = -\frac{b}{m}t$$

ή

$$\ln\frac{v}{10} = -\frac{b}{m}t$$

ή

$$\frac{v}{10} = e^{-\frac{b}{m}t}$$

ή

$$v(t) = 10e^{-\frac{b}{m}t} \qquad (iii)$$

Επειδή, τη χρονική στιγμή $t_1 = 2s$ η ταχύτητα της βάρκας είναι $v_1 = 8\frac{m}{s}$ από την (iii) προκύπτει

$$8 = 10e^{-\frac{b}{m}2}$$

ή

$$-2\frac{b}{m} = \ln\frac{8}{10}$$

ή

$$\frac{b}{m} = -\frac{1}{2}\ln\frac{8}{10} = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4} = \ln\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{\frac{5}{4}} = \ln\frac{\sqrt{5}}{2}$$

οπότε η (iii) γίνεται

$$\begin{aligned} v(t) &= 10e^{-\ln\frac{\sqrt{5}}{2}t} \\ &= 10\left(e^{\ln\frac{2}{\sqrt{5}}}\right)^t \\ &= 10\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^t \end{aligned}$$

(ή)

Έτσι, η ταχύτητα της βάρκας τη χρονική στιγμή $t_2 = 5s$ είναι

$$v(5) = 10\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^5 = 5,724\ \frac{m}{s} = 5,724\ \frac{m}{s}$$

Λύση Άσκησης 1.23

Η (i) είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli με $n = -1$.
Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (ii) επί $y^{-(-1)} = y$ προκύπτει

$$yy' - \frac{1}{3x}y^2 = \frac{x}{3} \qquad (iii)$$

οπότε, θέτοντας

$$u(x) = y^{1-(-1)} = y^2 \qquad (iv)$$

$$\frac{du}{dx} = 2y\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{du}{dx}$$

Έτσι, η (iii) γίνεται

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx} - \frac{1}{3x}u = \frac{x}{3}$$

ή

$$\frac{du}{dx} - \frac{2}{3x}u = \frac{2x}{3}$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση για τη συνάρτηση $u(x)$ είναι γραμμική, οπότε, σύμφωνα με την πρότ. 1.1, η γενική λύση της είναι

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{-\int -\frac{2}{3x}dx}\left(\int \frac{2x}{3}e^{\int -\frac{2}{3x}dx}dx + c\right) \\
&= e^{\frac{2}{3}\ln x}\left(\frac{2}{3}\int xe^{-\frac{2}{3}\ln x}dx + c\right) \\
&= e^{\ln x^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{2}{3}\int xe^{\ln x^{-\frac{2}{3}}}dx + c\right) \\
&= x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\int xx^{-\frac{2}{3}}dx + c\right) \\
&= x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{3}}dx + c\right) \\
&= x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}} + c\right)
\end{aligned}$$

οπότε, λόγω της (iv),

$$y^2 = cx^{\frac{2}{3}} + \frac{x^2}{2}$$

Λύση Άσκησης 1.24

Θεωρώντας θετική φορά πρός τα πάνω, ο θεμελιώδης νόμος της δυναμικής δίνει

$$m\frac{dv}{dt} = -F - B = -kmv - mg.$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, η οποία δίνει

$$\frac{dv}{kv+g} = -dt,$$

οπότε

$$\int \frac{dv}{kv+g} = \int -dt + c$$

ή

$$\frac{1}{k}\ln(kv+g) = -t + c.$$

Επειδή $v(0) = v_0$, καταλήγουμε (με τον τρόπο του Παραδείγματος 1.30) στο ότι

$$v(t) = \frac{g}{k}\left(1 - \frac{kv_0+g}{g}e^{-kt}\right) \tag{i}$$

Το Σ φτάνει στο μέγιστο ύψος όταν

$$\begin{aligned} v(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{g}{k}\left(1 - \frac{kv_0+g}{g}e^{-kt}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{kv_0+g}{g}e^{-kt} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-kt} = \frac{g}{kv_0+g} \\ &\Leftrightarrow \quad -kt = \ln\frac{g}{kv_0+g} \\ &\Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{k}\ln\frac{kv_0+g}{g} \end{aligned}$$

δηλαδή τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{1}{k}\ln\frac{kv_0+g}{g}$$

β) Επειδή το σώμα ξεκινάει από την αρχή του άξονα, $x(0) = 0$, οπότε

$$\begin{aligned} x(t) \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^t v(z)dz \\ &\Leftrightarrow \quad \int_0^t \frac{g}{k}\left(1 - \frac{kv_0+g}{g}e^{-kz}\right)dz \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{kv_0+g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{gt}{k} \end{aligned}$$

οπότε το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το Σ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
x(t_1) &= \frac{kv_0+g}{k^2}\left(1-e^{-k\frac{1}{k}\ln\frac{kv_0+g}{g}}\right)-\frac{g}{k}\frac{1}{k}\ln\frac{kv_0+g}{g} \\
&= \frac{kv_0+g}{k^2}\left(1-e^{\ln\left(\frac{kv_0+g}{g}\right)^{-1}}\right)-\frac{g}{k^2}\ln\frac{kv_0+g}{g} \\
&= \frac{kv_0+g}{k^2}\left(1-\frac{g}{kv_0+g}\right)-\frac{g}{k^2}\ln\frac{kv_0+g}{g} \\
&= \frac{kv_0+g}{k^2}-\frac{g}{k^2}-\frac{g}{k^2}\ln\frac{kv_0+g}{g} \\
&= \frac{v_0}{k}-\frac{g}{k^2}\ln\frac{kv_0+g}{g}
\end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 1.25

α) Αν $n(t)$ ο πληθυσμός των σολωμών τη χρονική στιγμή t (t σε έτη), τότε για το διάστημα της αύξησης

$$\frac{dn}{dt} = kn, \quad k \text{ σταθερά}$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, της οποίας η λύση είναι

$$n = n_0 e^{kt} \tag{i}$$

όπου n_0 ο πληθυσμός τη χρονική στιγμή $t = 0$.
Επειδή ο πληθυσμός αυξήθηκε κατά 30% σε 2 χρόνια,

$$n(2) = n_0 + \frac{30}{100} n_0 = 1,3 n_0$$

οπότε η (i) δίνει

$$1,3n_0 = n_0 e^{2k} \;\Leftrightarrow\; e^{2k} = 1,3 \;\Leftrightarrow\; 2k = \ln 1,3 \;\Leftrightarrow\; k = \frac{1}{2}\ln 3 = 0,131,$$

οπότε η (i) γίνεται

$$n(t) = n_0 e^{0,131t}$$

και για $n_0 = 500$

$$n(t) = 500e^{0,131t}$$

Έτσι ο πληθυσμός έγινε $n = 900$ τη χρονική στιγμή t_1 για την οποία

$$\begin{aligned} n(t_1) = 900 \quad &\Leftrightarrow \quad 500e^{0,131t} = 900 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{0,131t} = \frac{900}{500} \\ &\Leftrightarrow \quad 0,131t_1 = \ln\frac{9}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{1}{0,131}\ln\frac{9}{5} = 4,49 \sim 50 \text{ έτη} \end{aligned}$$

β) Αν θεωρήσουμε ως χρονική στιγμή $t = 0$ τη χρονική στιγμή την οποία ο πληθυσμός των σολομών ήταν 900,

$$\frac{dn}{dt} = 0,131n - 0,02n^2$$

Αυτή είναι διαφορετική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών που γράφεται ως

$$\frac{dn}{0,131n - 0,02n^2} = dt$$

οπότε έχει γενική λύση

$$\int \frac{dn}{0,131n - 0,02n^2} = \int dt \tag{i}$$

Αναλύοντας σε μερικά κλάσματα προκύπτει

$$\frac{1}{0,131n - 0,02n^2} = \frac{7,63}{n} - \frac{7,63}{n - 6,55}$$

οπότε η (i) γίνεται

$$\int \left(\frac{7,63}{n} - \frac{7,63}{n - 6,55}\right) dn = t + c$$

ή

$$7,63 \int \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n - 6,55}\right) dn = t + c$$

ή

$$\ln n - \ln(n - 6,55) = \frac{t}{7,63} + \frac{c}{7,63}$$

ή
$$\ln\frac{n}{n-6,55}=\frac{t}{7,63}+\frac{c}{7,63}$$

ή ($c_1=-\dfrac{c}{7,63}$)
$$\ln\frac{n-6,55-n}{n}=-\frac{t}{7,63}+c_1$$

ή
$$\frac{n-6,55}{n}=e^{-\frac{t}{7,63}+c_1}$$

ή ($c_2=e^{c_1}$)
$$1-\frac{6,55}{n}=c_2e^{-\frac{t}{7,63}} \qquad (ii)$$

ή
$$\frac{6,55}{n}=1-c_2e^{-\frac{t}{7,63}}$$

ή
$$n(t)=\frac{6,55}{1-c_2e^{-\frac{t}{7,63}}} \qquad (iii)$$

Επειδή τη χρονική στιγμή t=0 ο πληθυσμός ήταν 900 σολωμοί, η (ii) αληθεύει για $t=0$ και $n=900$, οπότε:

$$1-\frac{6,55}{900}=c_2e^{-\frac{0}{7,63}} \Leftrightarrow c_2=1-\frac{6,55}{900}=0,9278$$

οπότε η (iii) γίνεται

$$n(t)=\frac{6,55}{1-0,9278e^{-\frac{t}{7,63}}}$$

γ) Ο ο πληθυσμός των σολωμών μετά από πολύ χρόνο θα είναι

$$\lim_{t\to+\infty}n(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{6,55}{1-0,9278e^{-\frac{t}{7,63}}}=6,55$$

αφού $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-\frac{t}{7,63}}=0$.

Λύση Άσκησης 1.28

Η (i) γράφεται,

$$y' - \frac{x-1}{2x^2}y^2 - \frac{1}{x}y + \frac{x-1}{2} = 0, \qquad (ii)$$

οπότε είναι διαφορική εξίσωση Riccati.

Θέτοντας

$$y(x) = x + \frac{1}{u(x)}$$

$$y'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

οπότε η (iii) γίνεται

$$1 - \frac{u'}{u^2} + \frac{1-x}{2x^2}\left(x^2 + \frac{2}{u}x + \frac{1}{u^2}\right) - \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{u}\right) + \frac{x-1}{2} = 0$$

ή

$$-\frac{1}{u^2}u' + \frac{1-x}{x}\frac{1}{u} + \frac{1-x}{2x^2}\frac{1}{u^2} - \frac{1}{x}\frac{1}{u} = 0$$

οπότε μετά από λίγες πράξεις,

$$u' + u = \frac{1-x}{2x^2}$$

Αυτή είναι γραμμική διαφορική εξίσωση, της οποίας η λύση σύμφωνα με την Πρόταση 1.1, είναι

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int dx}\left(\int \frac{1-x}{2x^2}e^{\int dx}dx + c\right) = e^{-x}\left(\int \frac{1-x}{2x^2}e^{x}dx + c\right) = e^{-x}\left(\int \left(-\frac{e^x}{2x}\right)' dx + c\right) \\ &= e^{-x}\left(-\frac{e^x}{2x} + c\right) = -\frac{1}{2x} + ce^{-x} \end{aligned}$$

οπότε λόγω της (ii),

$$y(x) = x + \frac{1}{ce^{-x} - \frac{1}{2x}} = x + \frac{2x}{2cxe^{-x} - 1} = \frac{x(c_1x + e^x)}{c_1x - e^x}$$

β) Η (i) γράφεται

$$y' - y^2 - \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2} = 0, \qquad (ii)$$

οπότε είναι διαφορική εξίσωση Riccati.

Θέτοντας

$$y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{u(x)} \qquad (iii)$$

προκύπτει

$$y'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

οπότε, μετά από λίγες πράξεις, η (ii) γίνεται

$$u' - \frac{1}{x}u = -1.$$

Αυτή είναι γραμμική διαφορική εξίσωση, της οποίας η λύση, σύμφωνα με την πρότ. 1.1, είναι

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left(\int -e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx + c\right) \\ &= e^{\ln x}\left(-\int e^{-\ln x}dx + c\right) \\ &= x\left(-\int \frac{1}{x}dx + c\right) \\ &= x\left(-\ln x + c\right) \\ &= -x\ln x + cx. \end{aligned}$$

Ἐτσι, λόγω της (iii) ($c_1 = 2c$),

$$y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{-x\ln x + cx}$$

ή

$$y(x) = \frac{\ln x + 1 + x}{-x\ln x + cx}$$

Λύση Άσκησης 1.29

α) Διαιρώντας κατά μέλη τις (i) και (ii) προκύπτει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$

ή

$$ydy = 2xdx \qquad (iii)$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών για τη συνάρτηση $y(x)$ της οποίας η γενική λύση είναι

$$\int ydy = \int 2xdx \qquad (iv)$$

ή

$$\frac{y^2}{2} = x^2 + c_1$$

οπότε η εξίσωση της οικογένειας αυτών των γραμμών είναι

ή ($c = 2c_1$)

$$y^2 - 2x^2 = c.$$

β) Διαιρώντας κατά μέλη τις (i) και (ii) προκύπτει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x - 2y}{x}$$

ή

$$\frac{dy}{dx} = 3 - 2\frac{y}{x} \qquad (iii)$$

Η (iii) είναι ομογενής διαφορική εξίσωση (βλ. Ενότητα 1.3) για τη συνάρτηση $y(x)$, οπότε θέτοντας

$$z = \frac{y}{x}$$

από την (1.5) προκύπτει

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

Έτσι η (iii) γίνεται

$$z + x\frac{dz}{dx} = 3 - 2z$$

ή

$$x\frac{dz}{dx} = 3 - 3z$$

ή

$$\frac{1}{3 - 3z}\,dz = \frac{dx}{x}$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών της οποίας η γενική λύση είναι

$$\int \frac{1}{3 - 3z}\,dz = \int \frac{dx}{x} \qquad (iv)$$

ή

$$-\frac{1}{3}\ln|3 - 3z| = \ln|x| + c_1$$

ή

$$\ln|3 - 3z| + 3\ln|x| = -3c_1$$

ή ($z = \frac{y}{x}$)

$$\ln\left|3 - 3\frac{y}{x}\right| + \ln|x|^3 = -3c_1$$

ή

$$\ln\left|3\frac{x - y}{x}x^3\right| = -3c_1$$

ή

$$\ln 3 + \ln\left|x^2(x - y)\right| = -3c_1$$

οπότε η εξίσωση της οικογένειας αυτών των γραμμών είναι ($c = -\ln 3 - 3c_1$)

$$\ln\left|x^2(x-y)\right| = c.$$

γ) Διαιρώντας κατά μέλη τις (i) και (ii) προκύπτει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-3y}{-x-y}$$

ή (διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή δια x)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-3\frac{y}{x}}{-1-\frac{y}{x}} \qquad (iii)$$

Η (iii) είναι ομογενής διαφορική εξίσωση (βλ. Ενότητα 1.3) για την συνάρτηση $y(x)$, οπότε θέτοντας

$$z = \frac{y}{x}$$

από την (1.5) προκύπτει

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

Έτσι η (iii) γίνεται

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{1-3z}{-1-z}$$

ή

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1-3z}{-1-z} - z$$

ή

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{-z^2+2z-1}{1+z}$$

ή

$$x\frac{dz}{dx} = -\frac{(z-1)^2}{1+z}$$

ή

$$\frac{1+z}{(z-1)^2}\,dz = -\frac{dx}{x}.$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών της οποίας η γενική λύση είναι

$$\int \frac{1+z}{(z-1)^2}\,dz = \int -\frac{dx}{x} \qquad (iv)$$

Αναλύοντας σε μερικά κλάσματα

$$\frac{1+z}{(z-1)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2}$$

ή

$$(z-1)^2\frac{1+z}{(z-1)^2} = (z-1)^2\frac{A}{z-1} + (z-1)^2\frac{B}{(z-1)^2}$$

ή

$$1+z = (z-1)A + B$$

Θέτοντας:

- $z = 1$ στη σχέση αυτή, παίρνουμε

$$B = 2$$

- $z = 2$, προκύπτει

$$1+2 = (2+1)A + 2 \;\Leftrightarrow\; A = 2$$

οπότε

$$\frac{1+z}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2}$$

Έτσι, η (iv) δίνει

$$\int \left[\frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2}\right] dz = \int -\frac{dx}{x}$$

ή
$$\ln|z-1| - \frac{2}{z-1} = \ln|x| + c$$
ή ($z = \frac{y}{x}$)
$$\ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| - \frac{2}{\frac{y}{x} - 1} = -\ln|x| + c$$
ή
$$\ln\left|x\left(\frac{y}{x} - 1\right)\right| - \frac{2x}{y-x} = c$$
οπότε η εξίσωση της οικογένειας αυτών των γραμμών είναι

ή
$$\ln|y-x| + \frac{2x}{x-y} = c.$$

δ) Διαιρώντας κατά μέλη τις (i) και (ii) προκύπτει
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x+2y}{4x+y}$$
ή (διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή δια x)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1+2\frac{y}{x}}{4+\frac{y}{x}} \qquad (iii)$$
Η (iii) είναι ομογενής διαφορική εξίσωση (βλ. Ενότητα 1.3) για την συνάρτηση $y(x)$, οπότε θέτοντας
$$z = \frac{y}{x}$$
από την (1.5) προκύπτει
$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$
Έτσι η (iii) γίνεται
$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{-1+2z}{4+z}$$
ή
$$x\frac{dz}{dx} = \frac{-1+2z}{4+z} - z$$
ή
$$x\frac{dz}{dx} = \frac{-z^2-2z-1}{4+z}$$
ή
$$x\frac{dz}{dx} = -\frac{(z+1)^2}{4+z}$$
ή
$$\frac{4+z}{(z+1)^2}dz = \frac{dx}{x}$$
Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών της οποίας η γενική λύση είναι
$$\int \frac{4+z}{(z+1)^2}\,dz = \int \frac{dx}{x} \qquad (iv)$$
Αναλύοντας σε μερικά κλάσματα
$$\frac{4+z}{(z+1)^2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2}$$
ή
$$(z+1)^2\frac{4+z}{(z+1)^2} = (z+1)^2\frac{A}{z+1} + (z+1)^2\frac{B}{(z+1)^2}$$
ή
$$4+z = (z+1)A + B$$
Θέτοντας:

- $z = -1$ στη σχέση αυτή, παίρνουμε
$$B = 3$$

- $z = 0$, προκύπτει

$$4 + 0 = (0 + 1)A + 3 \Leftrightarrow A = 1$$

οπότε

$$\frac{1+z}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2}$$

Έτσι, η (iv) δίνει

$$\int \left[\frac{1}{z+1} + \frac{3}{(z+1)^2}\right] dz = \int \frac{dx}{x}$$

ή

$$\ln|z+1| - \frac{3}{z+1} = \ln|x| + c$$

ή ($z = \frac{y}{x}$)

$$\ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| - \frac{3}{\frac{y}{x} + 1} = \ln|x| + c$$

ή

$$\ln\left|\frac{x+y}{x}\right| - \frac{3x}{x+y} - \ln|x| = c$$

οπότε η εξίσωση της οικογένειας αυτών των γραμμών είναι

ή

$$\ln\left|\frac{x+y}{x^2}\right| - \frac{3x}{x+y} = c.$$

Λύση Άσκησης 1.30

Θεωρώντας την (i) ως τριώνυμο ως προς y', η διακρίνουσα είναι

$$[x(x+y)]^2 - 4x^3y = x^4 + x^2y^2 + 2x^3y - 4x^3y = x^4 + x^2y^2 - 2x^3y = (x^2 - xy)^2$$

και οι ρίζες

$$\frac{x^2 + xy \pm \sqrt{(x^2 - xy)^2}}{2} = \frac{x^2 + xy \pm (x^2 - xy)}{2}$$

ή

$$\frac{x^2 + xy + x^2 - xy}{2} = x^2$$

και

$$\frac{x^2 + xy - x^2 + xy}{2} = xy,$$

οπότε η (i) γράφεται ως

$$\left(y' - x^2\right)\left(y' - xy\right) = 0 \tag{ii}$$

Λόγω της πρότ. 1.6, η γενική λύση της (ii) είναι

$$g_1(x,y,c)g_2(x,y,c) = 0, \quad c \text{ σταθερά}, \tag{iii}$$

όπου

$$g_1(x,y,c) = 0 \quad \text{και} \quad g_2(x,y,c) = 0$$

οι γενικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων

$$y' - x^2 = 0 \tag{iv}$$

και

$$y' = xy. \tag{v}$$

Από την (iv) άμεσα προκύπτει ότι

$$y = \frac{x^3}{3} + c \Leftrightarrow y - \frac{x^3}{3} - c = 0$$

ενώ η (v)

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, της οποίας η γενική λύση προκύπτει με το γνωστό τρόπο να είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} = \int x dx + \ln c \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\frac{y}{c} = \frac{x^2}{2}\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y}{c} = e^{\frac{x^2}{2}}\\ &\Leftrightarrow \quad y = ce^{\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

Έτσι, από την (iii) προκύπτει ότι η γενική λύση της (ii) είναι

$$\left(y - \frac{x^3}{3} - c\right)\left(y - ce^{\frac{x^2}{2}}\right) = 0.$$

β) Θέτοντας $y' = p$, η (i) γράφεται

$$x = p + \sin p, \tag{ii}$$

οπότε παραγωγίζοντας ως προς y προκύπτει

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dp}{dy} + \cos p \frac{dp}{dy}$$

ή

$$\frac{1}{p} = \frac{dp}{dy}(1 + \cos p),$$

ή

$$\frac{dp}{dy}p\left(1+\cos p\right)=1$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, της οποίας η γενική λύση είναι

$$\int dy=\int p\left(1+\cos p\right)dp+c$$

ή

$$y=p\sin p+\cos p+\frac{p^2}{2}$$

οπότε η γενική λύση της (i) έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= p+\sin p \\ y &= p\sin p+\cos p+\frac{p^2}{2} \end{aligned}$$

γ) Θέτοντας $y'=p$, η (i) γράφεται

$$y=p^2+\sqrt{1+p^2} \qquad (ii)$$

οπότε παραγωγίζοντας ως προς x προκύπτει

$$\frac{dy}{dx}=2p\frac{dp}{dx}+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx}$$

ή

$$p=\left(2p+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx}$$

ή

$$dp\left(2+\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)=dx$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, της οποίας η γενική λύση είναι

$$\int dx=\int\left(2+\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)dp+c$$

ή

$$x=2p+\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)+c,$$

οπότε η γενική λύση της (i) έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= 2p+\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)+c \\ y &= p^2+\sqrt{1+p^2} \end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 1.32

Ἀν $m(t)$ η ποσότητα της ορμόνης στο αίμα του ασθενούς τη χρονική στιγμή t, τότε

$$\frac{dm}{dt} = a + \beta\cos\frac{2\pi t}{12} - \gamma m, \quad a, \beta, \gamma \text{ σταθερές} \tag{i}$$

Η (i) γράφεται ως

$$\frac{dm}{dt} + \gamma m = a + \beta\cos\frac{2\pi t}{12}$$

Αυτή είναι γραμμική διαφορική εξίσωση της οποίας η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned} m(t) &= e^{-\int \gamma dt}\left[c + \int\left(a + \beta\cos\frac{\pi t}{6}\right)e^{\int \gamma dt}dt\right] \\ &= e^{-\gamma t}\left[c + \int\left(a + \beta\cos\frac{\pi t}{6}\right)e^{\gamma t}dt\right] \\ &= e^{-\gamma t}\left[c - \frac{ae^{\gamma t}}{\gamma} + \beta\int\cos\frac{\pi t}{6}e^{\gamma t}dt\right] \end{aligned}$$

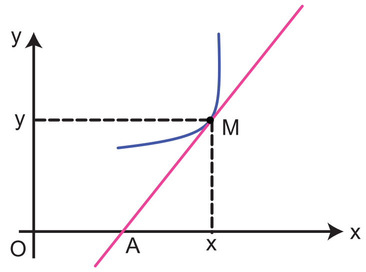
Υπολογίζοντας με ολοκλήρωση κατά παράγοντες (δύο φορές) το ολοκλήρωμα αυτό παίρνουμε

$$\begin{aligned} m(t) &= e^{-\gamma t}\left[c - \frac{ae^{\gamma t}}{\gamma} + \frac{\beta e^{\gamma t}}{\gamma}\frac{\frac{\pi}{6\gamma}\sin\frac{\pi t}{6} - \cos\frac{\pi t}{6}}{1 + \frac{\beta\pi^2}{36\gamma^2}}\right] \\ &= ce^{-\gamma t} - \frac{a}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\frac{\frac{\pi}{6\gamma}\sin\frac{\pi t}{6} - \cos\frac{\pi t}{6}}{1 + \frac{\beta\pi^2}{36\gamma^2}} \\ &= ce^{-\gamma t} - \frac{a}{\gamma} + \frac{36\beta\gamma}{\beta\pi^2 + 36\gamma^2}\left(\frac{\pi}{6\gamma}\sin\frac{\pi t}{6} - \cos\frac{\pi t}{6}\right) \end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 1.33

Η εξίσωση της εφαπτομένης της ζητούμενης γραμμής C στο σημείο της $M(x, y)$ είναι

$$Y - y = y'(X - x)$$



Σχήμα 1.40 *Η γραμμή της Άσκησης 1.33*

Το σημείο τομής A της C με τον άξονα x προκύπτει θέτοντας $Y = 0$,

$$0 - y = y'(X - x) \iff X = x - \frac{y}{y'}$$

οπότε, αφού για τη γραμμή C ισχύει $X = \dfrac{x}{2}$

$$\frac{x}{2} = x - \frac{y}{y'} \iff \frac{x}{2} = \frac{y}{y'} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών,

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} + \ln c \iff \ln y = 2\ln x + \ln c \iff \ln y = \ln(cx^2),$$

δηλαδή

$$y = cx^2 \qquad (i)$$

Επειδή η ζητούμενη γραμμή διέρχεται από το σημείο $(1, 3)$,

$$y(1) = 3,$$

οπότε από την (i) προκύπτει

$$3 = c1^2 \iff c = 3.$$

Επομένως, η ζητούμενη γραμμή είναι η παραβολή

$$y = 3x^2$$

Λύση Άσκησης 1.42

Η (i) είναι ομογενής διαφορική εξίσωση. Έτσι (βλ. Ενότητα 1.3), η γενική της λύση προκύπτει θέτοντας $z = \frac{y}{x}$, οπότε η (i) δίνει

$$z + x\frac{dz}{dx} = 1 + 2z \;\Leftrightarrow\; x\frac{dz}{dx} = 1 + z.$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, για την οποία

$$\int \frac{dz}{1+z} = \int \frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \ln(1+z) = \ln x + \ln c,$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{1+z} = \int \frac{dx}{x} + \ln c \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(1+z) = \ln x + \ln c \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(1+z) = \ln cx \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + z = cx. \end{aligned}$$

Άρα, η γενική λύση της (i) είναι

$$\frac{y}{x} = cx - 1 \;\Leftrightarrow\; y = cx^2 - x. \qquad (ii)$$

Επειδή $y(1) = 0$, η (ii) δίνει

$$0 = c1^2 - 1 \;\Leftrightarrow\; c = 1,$$

οπότε η ζητούμενη λύση είναι

$$y = x^2 - x.$$

Λύση Ἀσκησης 1.45

α) Διαιρώντας κατά μέλη τις (i) και (ii) προκύπτει

$$\frac{dC_B}{dC_A} = -1 + \frac{k_2}{k_1}\frac{C_B}{C_A} \qquad (iii)$$

Η (iii) είναι ομογενής διαφορική εξίσωση (βλ. Ενότητα 1.3) για την συνάρτηση $C_B(C_A)$, οπότε θέτοντας

$$z = \frac{C_B}{C_A}$$

από την (1.5) προκύπτει

$$\frac{dC_B}{dC_A} = z + C_A\frac{dz}{dC_A}.$$

Έτσι η (iii) γίνεται

$$z + C_A\frac{dz}{dC_A} = -1 + \frac{k_2}{k_1}z$$

ή

$$C_A\frac{dz}{dC_A} = -1 - z + \frac{k_2}{k_1}z.$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών της οποίας η γενική λύση είναι

$$\int \frac{dz}{\left(\frac{k_2}{k_1}z - 1\right) - 1} = \int \frac{dC_A}{C_A} + \ln c$$

ή

$$\frac{1}{\frac{k_2}{k_1} - 1}\ln\left|\left(\frac{k_2}{k_1}z - 1\right) - 1\right| = \ln C_A + \ln c \qquad (iv)$$

Επειδή $z(C_{A0}) = 0$, από την (iv) προκύπτει

$$\frac{1}{\frac{k_2}{k_1} - 1}\ln|-1| = \ln C_{A0} + \ln c \;\Leftrightarrow\; c = -C_{A0}$$

οπότε η (iv) γίνεται

$$\ln\left(1 - \frac{k_2 - k_1}{k_1}z\right) = \left(\frac{k_2}{k_1} - 1\right)\ln\frac{C_A}{C_{A0}}$$

ή

$$1 - \frac{k_2 - k_1}{k_1}z = \left(\frac{C_A}{C_{A0}}\right)^{\frac{k_2}{k_1}-1}$$

ή

$$\frac{k_2 - k_1}{k_1}z = 1 - \left(\frac{C_A}{C_{A0}}\right)^{\frac{k_2}{k_1}-1}$$

ή (αφού $(z = \frac{C_B}{C_A})$)

$$\frac{C_B}{C_A} = \frac{k_1}{k_2 - k_1}\left[1 - \left(\frac{C_A}{C_{A0}}\right)^{\frac{k_2}{k_1}-1}\right] \qquad (v)$$

β) Η (i) είναι διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών, οπότε

$$\int \frac{dC_A}{C_A} = \int -k_1 dt + \ln c$$

ή

$$\ln C_A = -k_1 t + \ln c \qquad (vi)$$

Επειδή $C_A(0) = C_{A0}$, η (iii) δίνει

$$\ln C_{A0} = \ln c \;\Leftrightarrow\; c = C_{A0}$$

οπότε η (vi) γίνεται

$$\ln C_A - \ln C_{A0} = -k_1 t \;\Leftrightarrow\; \ln\frac{C_A}{C_{A0}} = -k_1 t$$

ή
$$\frac{C_A}{C_{A0}} = e^{-k_1 t}$$

οπότε
$$C_A = C_{A0} e^{-k_1 t} \qquad (vii)$$

οπότε η (v) δίνει
$$\frac{C_B}{C_A} = \frac{k_1}{k_2 - k_1}[1 - (e^{-k_1 t})^{\frac{k_2}{k_1}-1}] = \frac{k_1}{k_2 - k_1}[1 - e^{(k_1 - k_2)t}] \qquad (viii)$$

γ) Από την (vii) και την $(viii)$ προκύπτει ότι
$$\begin{aligned} C_B &= \frac{k_1}{k_2 - k_1}[1 - e^{(k_1 - k_2)t}]C_A \\ &= \frac{k_1}{k_2 - k_1}[1 - e^{(k_1 - k_2)t}]C_{A0} e^{-k_1 t} \end{aligned}$$