



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

Απαντήσεις στα Προβλήματα με περιττό αριθμό

Προβλήματα εδαφίου 1.1, page 8

1. $y = \frac{1}{\pi} \cos 2\pi x + c$
3. $y = ce^x$
5. $y = 2e^{-x}(\sin x - \cos x) + c$
7. $y = \frac{1}{5.13} \sinh 5.13x + c$
9. $y = 1.65e^{-4x} + 0.35$
11. $y = (x + \frac{1}{2})e^x$
13. $y = 1/(1 + 3e^{-x})$
15. $y = 0$ και $y = 1$ διότι $y' = 0$ για αυτά τα y
17. $\exp(-1.4 \cdot 10^{-11}t) = \frac{1}{2}$, $t = 10^{11}(\ln 2)/1.4$ [sec]
19. Ολοκληρώνουμε την $y'' = g$ δύο φορές, $y'(t) = gt + v_0$, $y'(0) = v_0 = 0$ (αρχίζουμε από το υπόλοιπο) επομένως $y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + y_0$, όπου $y(0) = y_0 = 0$

Προβλήματα εδαφίου 1.2, page 11

11. Ευθείες γραμμές, παράλληλες προς τον άξονα x
13. $y = x$
15. $mv' = mg - bv^2$, $v' = 9.8 - v^2$, $v(0) = 10$, $v' = 0$ δίνει το όριο $9.8 = 3.1$ [m/s]
17. Σφάλματα στα βήματα 1, 5, 10: 0.0052, 0.0382, 0.1245, κατά προσέγγιση
19. $x_5 = 0.0286$ (σφάλμα 0.0093), $x_{10} = 0.2196$ (σφάλμα 0.0189)

Προβλήματα εδαφίου 1.3, page 18

1. Αν προσθέσουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης σε επόμενο βήμα, ενδέχεται να μην καταλήξουμε στη λύση. Παράδειγμα: $y' = y$, $\ln|y| = x + c$, $y = e^{x+c} = \tilde{c}e^x$ αλλά όχι $e^x + c$ (με $c \neq 0$)
3. $\cos^2 y \, dy = dx$, $\frac{1}{2}y + \frac{1}{4} \sin 2y + c = x$
5. $y^2 + 36x^2 = c$, ελλείψεις
7. $y = x \arctan(x^2 + c)$
9. $y = x/(c - x)$
11. $y = 24/x$, υπερβολή
13. $dy/\sin^2 y = dx/\cosh^2 x$, $-\cot y = \tanh x + c$, $c = 0$, $y = -\operatorname{arccot}(\tanh x)$
15. $y^2 + 4x^2 = c = 25$
17. $y = x \arctan(x^3 - 1)$
19. $y_0 e^{kt} = 2y_0$, $e^k = 2$ (1 εβδομάδα) $e^{2k} = 2^2$ (2 εβδομάδες), $e^{4k} = 2^4$
21. 69.6% του y_0
23. $PV = c = \text{const}$
25. $T = 22 - 17e^{-0.5306t} = 21.9$ [°C] όταν $t = 9.68$ min
27. $e^{-k \cdot 10} = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{10} \ln 2$, $e^{-kt_0} = 0.01$, $t = (\ln 100)/k = 66$ [min]
29. Όχι. Να εργαστείτε με το νόμο του Νεύτωνα για τη μετάδοση θερμότητας
31. $y = ax$, $y' = g(y/x) = a = \text{const}$, ανεξάρτητο του σημείου (x, y)
33. $\Delta S = 0.15S\Delta\phi$, $dS/d\phi = 0.15S$, $S = S_0 e^{0.15\phi} = 1000S_0$, $\phi = (1/0.15) \ln 1000 = 7.3 \cdot 2\pi \cdot 8$ φορές.

Προβλήματα εδαφίου 1.4, page 26

1. Ακριβής, $2x = 2x$, $x^2y = c$, $y = c/x^2$ 3. Ακριβής, $y = \arccos(c/\cos x)$
 5. Μη ακριβής, $y = \sqrt{x^2 + cx}$ 7. $F = e^{x^2}$, $e^{x^2} \tan y = c$
 9. Ακριβής, $u = e^{2x} \cos y + k(y)$, $u_y = -e^{2x} \sin y + k'$, $k' = 0$. *Ans.* $e^{2x} \cos y = 1$
 11. $F = \sinh x$, $\sinh^2 x \cos y = c$
 13. $u = e^x + k(y)$, $u_y = k' = -1 + e^y$, $k = -y + e^y$ *Απάντηση:* $e^x - y + e^y = c$
 15. $b = k$, $ax^2 + 2kxy + ly^2 = c$

Προβλήματα εδαφίου 1.5, page 34

3. $y = ce^x - 5.2$ 5. $y = (x + c)e^{-kx}$
 7. $y = x^2(c + e^x)$ 9. $y = (x - 2.5/e)e^{\cos x}$
 11. $y = 2 + c \sin x$ 13. Χωρισμός μεταβλητών. $y - 2.5 = c \cosh^4 1.5x$
 15. $(y_1 + y_2)' + p(y_1 + y_2) = (y_1' + py_1) + (y_2' + py_2) = 0 + 0 = 0$
 17. $(y_1 + y_2)' + p(y_1 + y_2) = (y_1' + py_1) + (y_2' + py_2) = r + 0 = r$
 19. Λύση της $cy_1' + pcy_1 = c(y_1' + py_1) = cr$
 21. $y = uy^*$, $y' + py = u'y^* + uy^{*'} + puy^* = u'y^* + u(y^{*' + py^*}) = u'y^* + u \cdot 0$
 $= r$, $u' = r/y^* = re^{\int p dx}$, $u = \int e^{\int p dx} r dx + c$. Επομένως η $y = uy^*$ δίνει την (4). Στα εδάφια
 2.10 και 3.3, θα διαπιστώσουμε ότι η μέθοδος αυτή δύναται να εφαρμοστεί και σε ΣΔΕ υψηλότερης τάξης.
 23. $y^2 = 1 + 8e^{-x^2}$
 25. $y = 1/u$, $u = ce^{-3.2x} + 10/3.2$
 27. $dx/dy = 6e^y - 2x$, $x = ce^{-2y} + 2e^y$
 31. $T = 240e^{kt} + 60$, $T(10) = 200$, $k = -0.0539$, $t = 102 \text{ min}$
 33. $y' = A - ky$, $y(0) = 0$, $y = A(1 - e^{-kt})/k$
 35. $y' = 175(0.0001 - y/450)$, $y(0) = 450 \cdot 0.0004 = 0.18$,
 $y = 0.135e^{-0.3889t} + 0.045 = 0.18/2$,
 $e^{-0.3889t} = (0.09 - 0.045)/0.135 = 1/3$,
 $t = (\ln 3)/0.3889 = 2.82$. *Απάντηση:* περίπου 3 χρόνια
 37. $y' = y - y^2 - 0.2y$, $y = 1/(1.25 - 0.75e^{-0.8t})$, όριο 0.8, όριο 1
 39. $y' = By^2 - Ay = B(y - A/B)$, $A > 0$, $B > 0$. Σταθερές λύσεις $y = 0$,
 $y = A/B$, $y' > 0$ if $y > A/B$ απεριόριστη, $y' < 0$ if $0 < y < A/B$
 (απόσβεση). $y = A/(ce^{At} + B)$, $y(0) > A/B$ if $c < 0$, $y(0) < A/B$ if $c > 0$.

Προβλήματα εδαφίου 1.6, page 38

1. $x^2/(c^2 + 9) + y^2/c^2 - 1 = 0$ 3. $y - \cosh(x - c) - c = 0$
 5. $y/x = c$, $y'/x = y/x^2$, $y' = y/x$, $\tilde{y}' = -x/\tilde{y}$, $\tilde{y}^2 + x^2 = \tilde{c}$, κύκλοι
 7. $2\tilde{y}^2 - x^2 = \tilde{c}$ 9. $y' = -2xy$, $\tilde{y}' = 1/(2x\tilde{y})$, $x = \tilde{c}e^{\tilde{y}^2}$
 11. $\tilde{y} = \tilde{c}x$
 13. $y' = -4x/9y$. Τροχιές $\tilde{y}' = 9\tilde{y}/4x$, $\tilde{y} = \tilde{c}x^{9/4}$ ($\tilde{c} > 0$).
 Προσπαθήστε να χαράξετε τις καμπύλες αυτές
 15. $u = c$, $u_x dx + u_y dy = 0$, $y' = -u_x/u_y$. Τροχιές $\tilde{y}' = u_{\tilde{y}}/u_x$. Τώρα, έχουμε
 $v = \tilde{c}$, $v_x dx + v_y dy = 0$, $y' = -v_x/v_y$. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με τη ΣΔΕ της τροχιάς
 της u , αν $u_x = v_y$ (ίσοι παρονομαστές) και $u_y = -v_x$ (ίσοι αριθμητές):
 αυτές είναι οι εξισώσεις Cauchy - Riemann.

Προβλήματα εδαφίου 1.7, page 42

1. $y' = f(x, y) = r(x) - p(x)y$; επομένως η $\partial f/\partial y = -p(x)$ είναι συνεχής και φράσσεται στο κλειστό διάστημα $|x - x_0| \leq a$.
3. Στο διάστημα $|x - x_0| < a$; απλώς θέτουμε το b στη σχέση $\alpha = b/K$ μεγάλο, εν προκειμένω, $b = \alpha K$.
5. Το R έχει ακμές $2a$ και $2b$ και κέντρο $(1, 1)$ με δεδομένο ότι $y(1) = 1$. Στην R , $f = 2y^2 \leq 2(b+1)^2 = K$, $\alpha = b/K = b/(2(b+1)^2)$, $da/db = 0$ δίνει $b = 1$, και $\alpha_{\text{opt}} = b/K = \frac{1}{8}$. Η λύση δίνεται από τη σχέση $dy/y^2 = 2 dx$, κλπ., $y = 1/(3 - 2x)$.
7. $|1 + y^2| \leq K = 1 + b^2$, $\alpha = b/K$, $da/db = 0$, $b = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$.
9. Όχι, στο κοινό σημείο (x_1, y_1) θα έπρεπε αμφότερες να ικανοποιούν τις "αρχικές συνθήκες" $y(x_1) = y_1$, παραβιάζοντας τη μοναδικότητα.

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 1, page 43

11. $y = ce^{-2x}$
13. $y = 1/(ce^{-4x} + 4)$
15. $y = ce^{-x} + 0.01 \cos 10x + 0.1 \sin 10x$
17. $y = ce^{-2.5x} + 0.640x - 0.256$
19. $25y^2 - 4x^2 = c$
21. $F = x, x^3 e^y + x^2 y = c$
23. $y = \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$
25. $3 \sin x + \frac{1}{3} \sin y = 0$
27. $e^{kt} = 1.25$, $(\ln 2)/\ln 1.25 = 3.1$, $(\ln 3)/\ln 1.25 = 4.9$ [ημέρες]
29. $e^{kt} = 0.9$, 6.6 ημέρες. 43.7 ημέρες από $e^{kt} = 0.5$, $e^{kt} = 0.01$

Προβλήματα εδαφίου 2.1, page 53

1. $F(x, z, z') = 0$
3. $y = c_1 e^{-x} + c_2$
5. $y = (c_1 x + c_2)^{-1/2}$
7. $(dz/dy)z = -z^3 \sin y$, $-1/z = -dx/dy = \cos y + \tilde{c}_1$, $x = -\sin y + c_1 y + c_2$
9. $y_2 = x^3 \ln x$
11. $y = c_1 e^{2x} + c_2$
13. $y(t) = c_1 e^{-t} + kt + c_2$
15. $y = 3 \cos 2.5x - \sin 2.5x$
17. $y = -0.75x^{3/2} - 2.25x^{-1/2}$
19. $y = 15e^{-x} - \sin x$

Προβλήματα εδαφίου 2.2, page 59

1. $y = c_1 e^{-2.5x} + c_2 e^{2.5x}$
3. $y = c_1 e^{-2.8x} + c_2 e^{-3.2x}$
5. $y = (c_1 + c_2 x) e^{-\pi x}$
7. $y = c_1 + c_2 e^{-4.5x}$
9. $y = c_1 e^{-2.6x} + c_2 e^{0.8x}$
11. $y = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{3x/2}$
13. $y = (c_1 + c_2 x) e^{5x/3}$
15. $y = e^{-0.27x} (A \cos(\sqrt{\pi}x) + B \sin(\sqrt{\pi}x))$
17. $y'' + 2\sqrt{5}y' + 5y = 0$
19. $y'' + 4y' + 5y = 0$
21. $y = 4.6 \cos 5x - 0.24 \sin 5x$
23. $y = 6e^{2x} + 4e^{-3x}$
25. $y = 2e^{-x}$
27. $y = (4.5 - x)e^{-\pi x}$
29. $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-0.27x} \sin(\sqrt{\pi}x)$
31. Ανεξάρτητες
33. $c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x = 0$ με $x = 1$ δίνει $c_1 = 0$; τότε $c_2 = 0$ για $x = 2$, λ.χ.
Επομένως, είναι ανεξάρτητες.
35. Ανεξάρτητες, μιας και $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
37. $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 0.001e^x + e^{-x}$

Προβλήματα εδαφίου 2.3, page 61

1. $4e^{2x}, -e^{-x} + 8e^{2x}, -\cos x - 2 \sin x$
3. 0, 0, $(D - 2I)(-4e^{-2x}) = 8e^{-2x} + 8e^{-2x}$
5. 0, $5e^{2x}, 0$
7. $(2D - I)(2D + I), y = c_1e^{0.5x} + c_2e^{-0.5x}$
9. $(D - 2.1I)^2, y = (c_1 + c_2x)e^{2.1x}$
11. $(D - 1.6I)(D - 2.4I), y = c_1e^{1.6x} + c_2e^{2.4x}$
15. Συνδυάζοντας τις δύο συνθήκες, προκύπτει $L(cy + kw) = L(cy) + L(kw) = cLy + kLw$. Το αντίστροφο είναι απλό.

Προβλήματα εδαφίου 2.4, page 69

1. $y' = y_0 \cos \omega_0 t + (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t$. Για ακέραιο t (if $\omega_0 = \pi$), λόγω της περιοδικότητας.
3. (i) Μικρότερο κατά έναν παράγοντα $\sqrt{2}$, (ii) Μεγαλύτερο κατά έναν παράγοντα $\sqrt{2}$
5. 0.3183, 0.4775, $\sqrt{(k_1 + k_2)/m}/(2\pi) = 0.5738$
7. $mL\theta'' = -mg \sin \theta \approx -mg\theta$ (τεφαρτομενική συνιστώσα του), $W = mg$
 $\theta'' + \omega_0^2\theta = 0, \omega_0/(2\pi) = \sqrt{g/L}/(2\pi)$
9. $my'' = -\tilde{a}\gamma y$, όπου $m = 1 \text{ kg}, ay = \pi \cdot 0.01^2 \cdot 2y \text{ m}^3$ είναι ο όγκος του νερού που προκαλεί τη δύναμη επαναφοράς $a\gamma y$ με $\gamma = 9.800 \text{ kN}$.
 $y'' + \omega_0^2 y = 0, \omega_0^2 = a\gamma/m = a\gamma = 0.000628\gamma$. Συχνότητα $\omega_0/2\pi = 0.4 [\text{sec}^{-1}]$.
13. $y = [y_0 + (v_0 + \alpha v_0)t]e^{-\alpha t}, y = [1 + (v_0 + 1)t]e^{-t}$,
(ii) $v_0 = -2, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, -\frac{6}{5}$
15. $\omega^* = [\omega_0^2 - c^2/(4m^2)]^{1/2} = \omega_0[1 - c^2/(4mk)]^{1/2} \approx \omega_0(1 - c^2/8mk) = 2.9583$
17. Οι θετικές λύσεις της $\tan t = 1$, ήτοι, $\pi/4$ (max), $5\pi/4$ (min). κ.λπ.
19. $0.0231 = (\ln 2)/30 [\text{kg/s}]$ από τη σχέση $\exp(-10 \cdot 3c/2m) = \frac{1}{2}$.

Προβλήματα εδαφίου 2.5, page 73

3. $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-1.8}$
5. $\sqrt{x}(c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x))$
7. $y = c_1x^2 + c_2x^3$
9. $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{0.6}$
11. $y = x^2(c_1 \cos(\sqrt{6} \ln x) + c_2 \sin(\sqrt{6} \ln x))$
13. $y = x^{-3/2}$
15. $y = (3.6 + 4.0 \ln x)/x$
17. $y = \cos(\ln x) + \sin(\ln x)$
19. $y = -0.525x^5 + 0.625x^{-3}$

Προβλήματα εδαφίου 2.6, page 79

3. $W = -2.2e^{-3x}$
5. $W = -x^4$
7. $W = a$
9. $y'' + 25y = 0, W = 5, y = 3 \cos 5x - \sin 5x$
11. $y'' + 5y + 6.34 = 0, W = 0.3e^{-5x}, 3e^{-2.5} \cos 0.3x$
13. $y'' + 2y' = 0, W = -2e^{-2x}, y = 0.5(1 + e^{-2x})$
15. $y'' - 3.24y = 0, W = 1.8, y = 14.2 \cosh 1.8x + 9.1 \sinh 1.8x$

Προβλήματα εδαφίου 2.7, page 84

1. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-4x} - 5e^{-3x}$
3. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + 6x^2 - 18x + 21$
5. $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x} \sin x$
7. $y = c_1e^{-x/2} + c_2e^{-3x/2} + \frac{4}{5}e^x + 6x - 16$
9. $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-4x} + 1.2xe^{4x} - 2e^x$
11. $y = \cos(\sqrt{3}x) + 6x^2 - 4$

$$13. y = e^{x/4} - 2e^{x/2} + \frac{1}{5}e^{-x} + e^x \quad 15. y = \ln x$$

$$17. y = e^{-0.1x}(1.5 \cos 0.5x - \sin 0.5x) + 2e^{0.5x}$$

Προβλήματα εδαφίου 2.8, page 91

$$3. y_p = 1.0625 \cos 2t + 3.1875 \sin 2t$$

$$5. y_p = -1.28 \cos 4.5t + 0.36 \sin 4.5t$$

$$7. y_p = 25 + \frac{4}{3} \cos 3t + \sin 3t$$

$$9. y = e^{-1.5t}(A \cos t + B \sin t) + 0.8 \cos t + 0.4 \sin t$$

$$11. y = A \cos \sqrt{2}t + B \sin \sqrt{2}t + t(\sin \sqrt{2}t - \cos \sqrt{2}t)/(2\sqrt{2})$$

$$13. y = A \cos t + B \sin t - (\cos \omega t)/(\omega^2 - 1)$$

$$15. y = e^{-2t}(A \cos 2t + B \sin 2t) + \frac{1}{4} \sin 2t$$

$$17. y = \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{15} \sin 3t - \frac{1}{105} \sin 5t$$

$$19. y = e^{-t}(0.4 \cos t + 0.8 \sin t) + e^{-t/2}(-0.4 \cos \frac{1}{2}t + 0.8 \sin \frac{1}{2}t)$$

25. Υπολογιστικό θέμα. Η εκλογή του ω θα πρέπει να είναι αποτέλεσμα διερεύνησης, μελέτης των καμπυλών που χαράξαμε και μεταβολής τους, μέσα από διαδοχικές δοκιμές. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε το πως στην περίπτωση των διακροτημάτων, η περίοδος γίνεται αυξανόμενα μεγαλύτερη και το μέγιστο πλάτος γίνεται αυξανόμενα μεγαλύτερο, καθώς ο όρος $\omega/2\pi$ τείνει στη συχνότητα συντονισμού.

Προβλήματα εδαφίου 2.9, page 98

$$1. RI' + I/C = 0, I = ce^{-t/(RC)}$$

$$3. LI' + RI = E, I = (E/R) + ce^{-Rt/L} = 4.8 + ce^{-40t}$$

$$5. I = 2(\cos t - \cos 20t)/399$$

$$7. I_0 \text{ μεγιστοποιείται όταν } S = 0; \text{ συνεπώς, } C = 1/(\omega^2 L).$$

$$9. I = 0 \quad 11. I = 5.5 \cos 10t + 16.5 \sin 10t \text{ A}$$

$$13. I = e^{-5t}(A \cos 10t + B \sin 10t) - 400 \cos 25t + 200 \sin 25t \text{ A}$$

$$15. R > R_{\text{crit}} = 2\sqrt{L/C} \text{ είναι η Περίπτωση I, κ.λπ.}$$

$$17. E(0) = 600, I'(0) = 600, I = e^{-3t}(-100 \cos 4t + 75 \sin 4t) + 100 \cos t$$

$$19. R = 2 \Omega, L = 1 \text{ H}, C = \frac{1}{12} \text{ F}, E = 4.4 \sin 10t \text{ V}$$

Προβλήματα εδαφίου 2.10, page 102

$$1. y = A \cos 3x + B \sin 3x + \frac{1}{9}(\cos 3x) \ln |\cos 3x| + \frac{1}{3}x \sin 3x$$

$$3. y = c_1 x + c_2 x^2 - x \sin x \quad 5. y = A \cos x + B \sin x + \frac{1}{2}x(\cos x + \sin x)$$

$$7. y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + x^{-2}e^{2x} \quad 9. y = (c_1 + c_2 x)e^x + 4x^{7/2}e^x$$

$$11. y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + 1/(2x^4) \quad 13. y = c_1 x^{-3} + c_2 x^3 + 3x^5$$

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 2, page 102

$$7. y = c_1 e^{-4.5x} + c_2 e^{-3.5x} \quad 9. y = e^{-3x}(A \cos 5x + B \sin 5x)$$

$$11. y = (c_1 + c_2 x)e^{0.8x} \quad 13. y = c_1 x^{-4} + c_2 x^3$$

$$15. y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x/2} - 3x + x^2 \quad 17. y = (c_1 + c_2 x)e^{1.5x} + 0.25x^2 e^{1.5x}$$

$$19. y = 5 \cos 4x - \frac{3}{4} \sin 4x + e^x \quad 21. y = -4x + 2x^3 + 1/x$$

$$23. I = -0.01093 \cos 415t + 0.05273 \sin 415t \text{ A}$$

25. $I = \frac{1}{73}(50 \sin 4t - 110 \cos 4t)$ A
 27. Κύκλωμα RLC με $R = 20 \Omega$, $L = 4$ H, $C = 0.1$ F, $E = -25 \cos 4t$ V
 29. $\omega = 3.1$ is close to $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 3$, $y = 25(\cos 3t - \cos 3.1t)$.

Προβλήματα εδαφίου 3.1, page 111

9. Γραμμικώς ανεξάρτητες
 11. Γραμμικώς ανεξάρτητες
 13. Γραμμικώς ανεξάρτητες
 15. Γραμμικώς εξαρτημένες

Προβλήματα εδαφίου 3.3, page 122

1. $y = c_1 + c_2 \cos 5x + c_3 \sin 5x$
 3. $y = c_1 + c_2x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$
 5. $y = A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 3x + B_2 \sin 3x$
 7. $y = 2.398 + e^{-1.6x}(1.002 \cos 1.5x - 1.998 \sin 1.5x)$
 9. $y = 4e^{-x} + 5e^{-x/2} \cos 3x$
 11. $y = \cosh 5x - \cos 4x$
 13. $y = e^{0.25x} + 4.3e^{-0.7x} + 12.1 \cos 0.1x - 0.6 \sin 0.1x$

Προβλήματα εδαφίου 3.3, page 122

1. $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x} + \frac{1}{8}e^x - x + 2$
 3. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x + 0.1 \sinh 2x$
 5. $y = c_1x^2 + c_2x + c_3x^{-1} - \frac{1}{12}x^{-2}$
 7. $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{3x} - \frac{1}{4}(\cos 3x - \sin 3x)$
 9. $y = \cos x + \frac{1}{2} \sin 4x$
 11. $y = e^{-3x}(-1.4 \cos x - \sin x)$
 13. $y = 2 - 2 \sin x + \cos x$

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 3, page 122

7. $y = c_1 + e^{-2x}(A \cos 3x + B \sin 3x)$
 9. $y = c_1 \cosh 2x + c_2 \sinh 2x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + \cosh x$
 11. $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-1.5x}$
 13. $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-2x} + x^2 - 3x + 3$
 15. $y = c_1x + c_2x^{1/2} + c_3x^{3/2} - \frac{10}{3}$
 17. $y = 2e^{-2x} \cos 4x + 0.05x - 0.06$
 19. $y = 4e^{-4x} + 5e^{-5x}$

Προβλήματα εδαφίου 4.1, page 136

1. Ναι
 5. $y_1' = 0.02(-y_1 + y_2)$, $y_2' = 0.02(y_1 - 2y_2 + y_3)$, $y_3' = 0.02(y_2 - y_3)$
 7. $c_1 = 1$, $c_2 = -5$
 9. $c_1 = 10$, $c_2 = 5$
 11. $y_1' = y_2$, $y_2' = y_1 + \frac{15}{4}y_2$, $\mathbf{y} = c_1[1 \ 4]^T e^{4t} + c_2[1 \ -\frac{1}{4}]^T e^{-t/4}$
 13. $y_1' = y_2$, $y_2' = 24y_1 - 2y_2$, $y_1 = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-6t} = y$, $y_2 = y'$
 15. (a) Για παράδειγμα, για $C = 1000$ είναι -2.39993 , -0.000167 . (b) -2.4 , 0 .
 (d) $a_{22} = -4 + 2\sqrt{6.4} = 1.05964$ αντιστοιχεί στην κρίσιμη περίπτωση.
 C είναι περίπου ίσο με 0.18506 .

Προβλήματα εδαφίου 4.3, page 147

1. $y_1 = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$, $y_2 = -3c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$
3. $y_1 = 2c_1 e^{2t} + 2c_2$, $y_2 = c_1 e^{2t} - c_2$
5. $y_1 = 5c_1 + 2c_2 e^{14.5t}$
 $y_2 = -2c_1 + 5c_2 e^{14.5t}$
7. $y_1 = -c_2 \cos \sqrt{2}t + c_3 \sin \sqrt{2}t + c_1$
 $y_2 = c_2 \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t + c_3 \sqrt{2} \cos \sqrt{2}t$
 $y_3 = c_2 \cos \sqrt{2}t - c_3 \sin \sqrt{2}t + c_1$
9. $y_1 = \frac{1}{2}c_1 e^{-18t} + 2c_2 e^{9t} - c_3 e^{18t}$
 $y_2 = c_1 e^{-18t} + c_2 e^{9t} + c_3 e^{18t}$
 $y_3 = c_1 e^{-18t} - 2c_2 e^{9t} - \frac{1}{2}c_3 e^{18t}$
11. $y_1 = -20e^t + 8e^{-t/2}$
 $y_2 = 4e^t - 4e^{-t/2}$
13. $y_1 = 2 \sinh t$, $y_2 = 2 \cosh t$
15. $y_1 = \frac{1}{2}e^t$
 $y_2 = \frac{1}{2}e^t$
17. $y_2 = y_1' + y_1$, $y_2' = y_1'' + y_1' = -y_1 - y_2 = -y_1 - (y_1' + y_1)$,
 $y_1'' + 2y_1' + 2y_1 = 0$, $y_1 = e^{-t}(A \cos t + B \sin t)$,
 $y_2 = y_1' + y_1 = e^{-t}(B \cos t - A \sin t)$ Παρατηρούμε ότι $r^2 = y_1^2 + y_2^2 = e^{-2t}(A^2 + B^2)$.
19. $I_1 = c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{-3t}$, $I_2 = -3c_1 e^{-t} - c_2 e^{-3t}$

Προβλήματα εδαφίου 4.4, page 151

1. Ασταθές κομβικό σημείο, $y_1 = c_1 e^t$, $y_2 = c_2 e^{2t}$
3. Κεντρικό σημείο, πάντα ευσταθές, $y_1 = A \cos 3t + B \sin 3t$, $y_2 = 3B \cos 3t - 3A \sin 3t$
5. Ευσταθές σπειροειδές σημείο, $y_1 = e^{-2t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$, $y_2 = e^{-2t}(B \cos 2t - A \sin 2t)$
7. Σημείο σάγματος, πάντα ασταθές, $y_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$, $y_2 = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$
9. Ασταθές κομβικό σημείο, $y_1 = c_1 e^{6t} + c_2 e^{2t}$, $y_2 = 2c_1 e^{6t} - 2c_2 e^{2t}$
11. $y = e^{-t}(A \cos t + B \sin t)$. Ευσταθή σπειροειδή σημεία
15. $p = 0.2 \neq 0$ (ήταν 0), $\Delta < 0$, Ασταθές σπειροειδές σημείο.
17. For instance, (a) -2 , (b) -1 , (c) $= -\frac{1}{2}$, (d) $= 1$, (e) 4 .

Προβλήματα εδαφίου 4.5, page 159

5. Κέντρο στο (0, 0). Στο (2, 0) θέτουμε $y_1 = 2 + \tilde{y}_1$. Τότε $\tilde{y}_2' = \tilde{y}_1$ Σημείο σάγματος στη θέση (2, 0).
7. (0, 0), $y_1' = -y_1 + y_2$, $y_2' = -y_1 - y_2$, ευσταθές σπειροειδές σημείο; (-2, 2),
 $y_1 = -2 + \tilde{y}_1$, $y_2 = 2 + \tilde{y}_2$, $\tilde{y}_1' = -\tilde{y}_1 - 3\tilde{y}_2$, $\tilde{y}_2' = -\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2$, saddle point
9. (0, 0) σημείο σάγματος, (-3, 0) και (3, 0) κεντρικά σημεία.
11. $(\frac{1}{2}\pi \pm 2n\pi, 0)$ σημεία σάγματος; $(-\frac{1}{2}\pi \pm 2n\pi, 0)$ κεντρικά σημεία.
Use $-\cos(\pm\frac{1}{2}\pi + \tilde{y}_1) = \sin(\pm\tilde{y}_1) \approx \pm\tilde{y}_1$.
13. $(\pm 2n\pi, 0)$ κεντρικά σημεία; $y_1 = (2n + 1)\pi + \tilde{y}_1'$, $(\pi \pm 2n\pi, 0)$ σημεία σάγματος
15. Πολλαπλασιάζοντας, έχουμε, $y_2 y_2' = (4y_1 - y_1^3) y_1'$
 $y_2^2 = 4y_1^2 - \frac{1}{2}y_1^4 + c^* = \frac{1}{2}(c + 4 - y_1^2)(c - 4 + y_1^2)$, where $c^* = \frac{1}{2}c^2 - 8$.

Προβλήματα εδαφίου 4.6, page 163

3. $y_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$, $y_2 = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t - e^{3t}$
5. $y_1 = c_1 e^{5t} + c_2 e^{2t} - 0.43t - 0.24$, $y_2 = c_1 e^{5t} - 2c_2 e^{2t} + 1.12t + 0.53$

7. $y_1 = c_1 e^t + 4c_2 e^{2t} - 3t - 4 - 2e^{-t}$, $y_2 = -c_1 e^t - 5c_2 e^{2t} + 5t + 7.5 + e^{-t}$
9. Η σχέση για το ν δείχνει ότι αυτές οι διάφορες επιλογές μας διαφέρουν κατά πολλαπλάσια ενός ιδιοδιανύσματος για $\lambda = -2$.
11. $y_1 = -\frac{8}{3} \cosh t - \frac{4}{3} \sinh t + \frac{11}{3} e^{2t}$, $y_2 = -\frac{8}{3} \sinh t - \frac{4}{3} \cosh t + \frac{4}{3} e^{2t}$
13. $y_1 = \cos 2t + \sin 2t + 4 \cos t$, $y_2 = 2 \cos 2t - 2 \sin 2t + \sin t$
15. $y_1 = 4e^{-t} - 4e^t + e^{2t}$, $y_2 = -4e^{-t} + t$
17. $I_1 = 2c_1 e^{\lambda_1 t} + 2c_2 e^{\lambda_2 t} + 100$,
 $I_2 = (1.1 + \sqrt{0.41})c_1 e^{\lambda_1 t} + (1.1 - \sqrt{0.41})c_2 e^{\lambda_2 t}$,
 $\lambda_1 = -0.9 + \sqrt{0.41}$, $\lambda_2 = -0.9 - \sqrt{0.41}$
19. $c_1 = 17.948$, $c_2 = -67.948$

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 4, page 164

11. $y_1 = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-4t}$, $y_2 = 2c_1 e^{4t} - 2c_2 e^{-4t}$. Σημείο σάγματος
13. $y_1 = e^{-4t}(A \cos t + B \sin t)$, $y_2 = e^{\frac{1}{5}4t}[(B - 2A) \cos t - (A + 2B) \sin t]$;
 ασυμπτωτικά ευσταθές σπειροειδές σημείο
15. $y_1 = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-t}$, $y_2 = c_1 e^{-5t} - c_2 e^{-t}$. Σημείο σάγματος
17. $y_1 = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$, $y_2 = e^{-t}(B \cos 2t - A \sin 2t)$. Ευσταθές σπειροειδές σημείο
19. Ασταθές σπειροειδές σημείο
21. $y_1 = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{4t} - 1 - 8t^2$, $y_2 = -c_1 e^{-4t} + c_2 e^{4t} - 4t$
23. $y_1 = 2c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{3t} + \cos t - \sin t$, $y_2 = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$
25. $I_1' + 2.5(I_1 - I_2) = 169 \sin t$, $2.5(I_2' - I_1') + 25I_2 = 0$,
 $I_1 = (19 + 32.5t)e^{-5t} - 19 \cos t + 62.5 \sin t$,
 $I_2 = (-6 - 32.5t)e^{-5t} + 6 \cos t + 2.5 \sin t$
27. (0, 0) σημείο σάγματος (-1, 0), (1, 0) κεντρικά σημεία
29. $(n\pi, 0)$ κεντρικό σημείο για άρτιο n και σημείο σάγματος για περιττό n

Προβλήματα εδαφίου 5.1, page 174

3. $\sqrt{|k|}$
5. $\sqrt{3/2}$
7. $y = a_0(1 - x^2 + x^4/2! - x^6/3! + \dots) = a_0 e^{-x^2}$
9. $y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2}a_0 x^2 - \frac{1}{6}a_1 x^3 + \dots = a_0 \cos x + a_1 \sin x$
11. $a_0(1 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{60}x^5 - \dots) + a_1(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{24}x^5 - \dots)$
13. $a_0(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{13}{720}x^6 + \dots) + a_1(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^5 + \frac{5}{1008}x^7 + \dots)$
15. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m+1)(m+2)}{(m+1)^2 + 1} x^m$, $\sum_{m=5}^{\infty} \frac{(m-4)^2}{(m-3)!} x^m$
17. $s = 1 + x - x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{11}{24}x^5$, $s(\frac{1}{2}) = \frac{923}{768}$
19. $s = 4 - x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{30}x^5$, $s(2) = -\frac{8}{5}$, αλλά $x = 2$ είναι πολύ μεγάλη για να δώσει ικανοποιητικές τιμές. Ακριβής λύση: $y = (x - 2)^2 e^x$

Προβλήματα εδαφίου 5.2, page 179

5. $P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$,
 $P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$

11. Θέτουμε $x = az$. $y = c_1 P_n(x/a) + c_2 Q_n(x/a)$
 15. $P_1^1 = \sqrt{1-x^2}$, $P_2^1 = 3x\sqrt{1-x^2}$, $P_2^2 = 3(1-x^2)$,
 $P_4^2 = (1-x^2)(105x^2-15)/2$

Προβλήματα εδαφίου 5.3, page 186

3. $y_1 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \dots = \frac{\sin x}{x}$, $y_2 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - + \dots = \frac{\cos x}{x}$
 5. $b_0 = 1$, $c_0 = 0$, $r^2 = 0$, $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-x} \ln x$
 7. $y_1 = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{144}x^6 - \dots$,
 $y_2 = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{120}x^6 + \dots$
 9. $y_1 \sqrt{x}$, $y_2 = 1 + x$
 11. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^x/x$
 13. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^x \ln x$
 15. $y = AF(1, 1, -\frac{1}{2}; x) + Bx^{3/2}F(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}; x)$
 17. $y = A(1 - 8x + \frac{32}{5}x^2) + Bx^{3/4}F(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{4}; x)$
 19. $y = c_1 F(2, -2, -\frac{1}{2}; t-2) + c_2 (t-2)^{3/2} F(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}; t-2)$

Προβλήματα εδαφίου 5.4, page 195

3. $c_1 J_0(\sqrt{x})$
 5. $c_1 J_\nu(\lambda x) + c_2 J_{-\nu}(\lambda x)$, $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 7. $c_1 J_{1/2}(\frac{1}{2}x) + c_2 J_{-1/2}(\frac{1}{2}x) = x^{-1/2}(\tilde{c}_1 \sin \frac{1}{2}x + \tilde{c}_2 \cos \frac{1}{2}x)$
 9. $x^{-\nu}(c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x))$, $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 13. $J_n(x_1) = J_n(x_2) = 0$ επομένως $x_1^{-n} J_n(x_1) = x_2^{-n} J_n(x_2) = 0$ και
 $[x^{-n} J_n(x)]' = 0$ σε ένα σημείο μεταξύ των x_1 και x_2 σύμφωνα με το θεώρημα Rolle.
 Τώρα, με τη βοήθεια της {21b} θα βρούμε ότι είναι $J_{n+1}(x) = 0$ εκεί. Αντιστρόφως
 $J_{n+1}(x_3) = J_{n+1}(x_4) = 0$, επομένως $x_3^{n+1} J_{n+1}(x_3) = x_4^{n+1} J_{n+1}(x_4) = 0$ ήτοι
 $J_n(x) = 0$ σύμφωνα με το θεώρημα Rolle και την {21a} με $\nu = n + 1$.
 15. Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, είναι, $J'_0 = 0$ τουλάχιστον μια φορά μεταξύ δύο μηδενικών της
 J_0 . Χρησιμοποιούμε τη σχέση $J'_0 = -J_1$ βάσει της {21b} με $\nu = 0$. Μαζί έχουμε $J_1 = 0$
 τουλάχιστον μια φορά μεταξύ δύο μηδενικών του J_0 . Επίσης χρησιμοποιούμε $(xJ_1)' = xJ_0$
 βάσει της {21a} με $\nu = 1$ και του θεωρήματος Rolle.
 19. Χρησιμοποιούμε την {21b} με $\nu = 0$, (21a) με $\nu = 1$, (21d) με $\nu = 2$, αντιστοίχως..
 21. Ολοκληρώνουμε την (21a).
 23. Εργαζόμαστε με την {21a} με $\nu = 1$, ολοκλ. κατά παράγοντες, (21b) με $\nu = 0$, ολοκλ. κατά παράγοντες.
 25. Μέσω της {21d}, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} J_5(x) dx &= -2J_4(x) + \int J_3(x) dx = -2J_4(x) - 2J_2(x) + \int J_1(x) dx \\ &= 2J_4(x) - 2J_2(x) - J_0(x) + c. \end{aligned}$$

Προβλήματα εδαφίου 5.5, page 200

1. $c_1 J_4(x) + c_2 Y_4(x)$
 3. $c_1 J_{2/3}(x^2) + c_2 Y_{2/3}(x^2)$
 5. $c_1 J_0(\sqrt{x}) + c_2 Y_0(\sqrt{x})$

7. $\sqrt{x}(c_1 J_{1/4}(\frac{1}{2}kx^2) + c_2 Y_{1/4}(\frac{1}{2}kx^2))$
 9. $x^3(c_1 J_3(x) + c_2 Y_3(x))$
 11. Θέτουμε $H^{(1)} = kH^{(2)}$ και εργαζόμαστε με τη $\{10\}$.
 13. Εργαζόμαστε με τη $\{20\}$ του εδαφίου 5.4

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 5, page 200

11. $\cos 2x, \sin 2x$
 13. $(x-1)^{-5}, (x-1)^7$; Euler–Cauchy με $x-1$ αντί για x
 15. $J_{\sqrt{s}}(x), J_{-\sqrt{s}}(x)$
 17. $e^x, 1+x$
 19. $\sqrt{x}J_1(\sqrt{x}), \sqrt{x}Y_1(\sqrt{x})$

Προβλήματα εδαφίου 6.1, page 210

1. $3/s^2 + 12/s$
 3. $s/(s^2 + \pi^2)$
 5. $1/((s-2)^2 - 1)$
 7. $(\omega \cos \theta + s \sin \theta)/(s^2 + \omega^2)$
 9. $\frac{1}{s} + \frac{e^{-s} - 1}{s^2}$
 11. $\frac{1 - e^{-bs}}{s^2} - \frac{be^{-bs}}{s}$
 13. $\frac{(1 - e^{-s})^2}{s}$
 15. $\frac{e^{-s} - 1}{2s^2} - \frac{e^{-s}}{2s} + \frac{1}{s}$
 19. Use $e^{at} = \cosh at + \sinh at$.
 23. Set $ct = p$. Then $\mathcal{L}(f(ct)) = \int_0^\infty e^{-st}f(ct) dt = \int_0^\infty e^{-(s/c)p}f(p) dp/c = F(s/c)/c$.
 25. $0.2 \cos 1.8t + \sin 1.8t$
 27. $\frac{1}{L^2} \cos \frac{n\pi t}{L}$
 29. $2t^3 - 1.9t^5$
 31. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s-2} - \frac{3}{s+1}\right) = 4e^{2t} - 3e^{-t}$
 33. $\frac{2}{(s+3)^3}$
 35. $\frac{0.5 \cdot 2\pi}{(s+4.5)^2 + 4\pi^2}$
 37. $\pi t e^{-\pi t}$
 39. $\frac{7}{2}t^3 e^{-t\sqrt{2}}$
 41. $e^{-5\pi t} \sinh \pi t$
 43. $e^{3t}(2 \cos 3t + \frac{5}{3} \sin 3t)$
 45. $(k_0 + k_1 t)e^{-at}$

Προβλήματα 6.2, page 216

1. $y = 1.25e^{-5.2t} - 1.25 \cos 2t + 3.25 \sin 2t$
 3. $(s-3)(s+2) = 11s + 28 - 11 = 11s + 17, Y = 10/(s-3) + 1/(s+2),$
 $y = 10e^{3t} + e^{-2t}$
 5. $(s^2 - \frac{1}{4})Y = 12s, y = 12 \cosh \frac{1}{2}t$
 7. $y = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{5}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$ 9. $y = e^t - e^{3t} + 2t$
 11. $(s+1.5)^2 Y = s + 31.5 + 3 + 54/s^4 + 64/s,$
 $Y = 1/(s+1.5) + 1/(s+1.5)^2 + 24/s^4 - 32/s^3 + 32/s^2,$
 $y = (1+t)e^{-1.5t} + 4t^3 - 16t^2 + 32t$
 13. $t = \tilde{t} - 1, \tilde{Y} = 4/(s-6), \tilde{y} = 4e^{6t}, y = 4e^{6(t+1)}$

$$11. y = -e^{-3t} + e^{-2t} + \frac{1}{6}u(t-1)(1 - 3e^{-2(t-1)} + 2e^{-3(t-1)}) + u(t-2)(e^{-2(t-2)} - e^{-3(t-2)})$$

$$15. ke^{-ps}/(s - se^{-ps}) \quad (s > 0)$$

Προβλήματα εδαφίου 6.5, page 237

$$1. t \qquad 3. (e^t - e^{-t})/2 = \sinh t$$

$$5. \frac{1}{2}t \sin \omega t \qquad 7. e^t - t - 1$$

$$9. y - 1 * y = 1, \quad y = e^t \qquad 11. y = \cos t$$

$$13. y(t) + 2 \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau = te^t, \quad y = \sinh t$$

$$17. e^{4t} - e^{-1.5t} \qquad 19. t \sin \pi t$$

$$21. (\omega t - \sin \omega t)/\omega^2 \qquad 23. 4.5(\cosh 3t - 1)$$

$$25. 1.5t \sin 6t$$

Προβλήματα εδαφίου 6.6, page 241

$$3. \frac{\frac{1}{2}}{(s+3)^2} \qquad 5. \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

$$7. \frac{2s^3 + 24s}{(s^2 - 4)^3} \qquad 9. \frac{\pi(3s^2 - \pi^2)}{(s^2 + \pi^2)^3}$$

$$11. \frac{4s^2 - \pi^2}{(s^2 + \frac{1}{4}\pi^2)^2} \qquad 15. F(s) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2 - 9} \right)', \quad f(t) = \frac{1}{6}t \sinh 3t$$

$$17. \ln s - \ln(s-1); \quad (-1 + e^t)/t$$

$$19. [\ln(s^2 + 1) - 2 \ln(s-1)]' = 2s/(s^2 + 1) - 2/(s-1); \quad 2(-\cos t + e^t)/t$$

Προβλήματα εδαφίου 6.7, page 246

$$3. y_1 = -e^{-5t} + 4e^{2t}, \quad y_2 = e^{-5t} + 3e^{2t}$$

$$5. y_1 = -\cos t + \sin t + 1 + u(t-1)[-1 + \cos(t-1) - \sin(t-1)]$$

$$y_2 = \cos t + \sin t - 1 + u(t-1)[1 - \cos(t-1) - \sin(t-1)]$$

$$7. y_1 = -e^{-2t} + 4e^t + \frac{1}{3}u(t-1)(-e^{3-2t} + e^t),$$

$$y_2 = -e^{-2t} + e^t + \frac{1}{3}u(t-1)(-e^{3-2t} + e^t)$$

$$9. y_1 = (3 + 4t)e^{3t}, \quad y_2 = (1 - 4t)e^{3t}$$

$$11. y_1 = e^t + e^{2t}, \quad y_2 = e^{2t}$$

$$13. y_1 = -4e^t + \sin 10t + 4 \cos t, \quad y_2 = 4e^t - \sin 10t + 4 \cos t$$

$$15. y_1 = e^t, \quad y_2 = e^{-t}, \quad y_3 = e^t - e^{-t}$$

$$19. 4i_1 + 8(i_1 - i_2) + 2i_1' = 390 \cos t, \quad 8i_2 + 8(i_2 - i_1) + 4i_2' = 0,$$

$$i_1 = -26e^{-2t} - 16e^{-8t} + 42 \cos t + 15 \sin t,$$

$$i_2 = -26e^{-2t} + 8e^{-8t} + 18 \cos t + 12 \sin t$$

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 6, page 251

$$11. \frac{5s}{s^2 - 4} - \frac{3}{s^2 - 1} \qquad 13. \frac{1}{2}(1 - \cos \pi t), \quad \pi^2/(2s^3 + 2\pi^2s)$$

$$15. e^{-3s+3/2}/(s - \frac{1}{2}) \qquad 17. \text{Sec. 6.6; } 2s^2/(s^2 + 1)^2$$

$$11. \begin{bmatrix} 10 & -14 & -6 \\ -5 & 7 & -12 \\ -5 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \text{ το ίδιο με το προηγούμενο, } \begin{bmatrix} 10 & -5 & -15 \\ -14 & 7 & -33 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \text{ το ίδιο}$$

$$13. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 13 & -6 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 & -5 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \text{ δεν ορίζεται, } \begin{bmatrix} -9 & 3 & 4 \\ -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$15. \text{ Δεν ορίζεται, } \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}, [7 \quad -1 \quad 3], \text{ το ίδιο με το προηγούμενο,}$$

$$17. \begin{bmatrix} -30 & -18 \\ 45 & 9 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}, \text{ δεν ορίζεται, } \begin{bmatrix} 22 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}, \text{ δεν ορίζεται}$$

$$19. \text{ Δεν ορίζεται, } \begin{bmatrix} 10.5 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ το ίδιο με το προηγούμενο,}$$

$$25. (d) \mathbf{AB} = (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{BA}; \text{ κ.λπ..}$$

$$(e) \text{ Απάντηση: If } \mathbf{AB} = -\mathbf{BA}.$$

$$29. \mathbf{p} = [85 \quad 62 \quad 30]^T, \quad \mathbf{v} = [44,920 \quad 30,940]^T$$

Προβλήματα εδαφίου 7.3, page 280

$$1. x = -2, \quad y = 0.5$$

$$3. x = 1, \quad y = 3, \quad z = -5$$

$$5. x = 6, \quad y = -7$$

$$7. x = -3t, \quad y = t \text{ αυθαίρετο, } z = 2t$$

$$9. x = 3t - 1, \quad y = -t + 4, \quad z = t \text{ αυθαίρετο.}$$

$$11. w = 1, \quad x = t_1 \text{ arb., } y = 2t_2 - t_1, \quad z = t_2 \text{ αυθαίρετο.}$$

$$13. w = 4, \quad x = 0, \quad y = 2, \quad z = 6 \quad 17. I_1 = 2, \quad I_2 = 6, \quad I_3 = 8$$

$$19. I_1 = (R_1 + R_2)E_0/(R_1 R_2) A, \quad I_2 = E_0/R_1 A, \quad I_3 = E_0/R_2 A$$

$$21. x_2 = 1600 - x_1, \quad x_3 = 600 + x_1, \quad x_4 = 1000 - x_1. \text{ No}$$

$$23. C: 3x_1 - x_3 = 0, \quad H: 8x_1 - 2x_4 = 0, \quad O: 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \text{ επομένως}$$

$$\text{C}_3\text{H}_8 + 5\text{O}_2 \rightarrow 3\text{CO}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$$

Προβλήματα εδαφίου 7.4, page 287

$$1. 1; [2 \quad -1 \quad 3]; [2 \quad -1]^T \quad 3. 3; \{[3 \quad 5 \quad 0], [0 \quad 3 \quad 5], [0 \quad 0 \quad 1]\}$$

$$5. 3; \{[2 \quad -1 \quad 4], [0 \quad 1 \quad -46], [0 \quad 0 \quad 1]\}; \{[2 \quad 0 \quad 1], [0 \quad 3 \quad 23], [0 \quad 0 \quad 1]\}$$

7. 2; $[8 \ 0 \ 4 \ 0]$, $[0 \ 2 \ 0 \ 4]$; $[8 \ 0 \ 4]$, $[0 \ 2 \ 0]$
 9. 3; $[9 \ 0 \ 1 \ 0]$, $[0 \ 9 \ 8 \ 9]$, $[0 \ 0 \ 1 \ 0]$
 11. (c) 1
 19. Ναι
 23. Ναι
 27. 2, $[-2 \ 0 \ 1]$, $[0 \ 2 \ 1]$
 29. Όχι
 33. 1, λύση του δεδομένου συστήματος $c[1 \ \frac{10}{3} \ 3]$, βάση $[1 \ \frac{10}{3} \ 3]$
 35. 1, $[4 \ 2 \ \frac{4}{3} \ 1]$
 17. Όχι
 21. Όχι
 25. Ναι
 31. Όχι

Προβλήματα εδαφίου 7.7, page 300

7. $\cos(\alpha + \beta)$
 11. 40
 15. -64
 19. 2
 23. $x = 0, y = 4$
 9. 1
 13. 289
 17. 2
 21. $x = 3.5, y = -1.0$
 25. $w = 3, x = 0, y = 2, z = -2$
 1

Προβλήματα εδαφίου 7.8, page 308

1. $\begin{bmatrix} 1.20 & 4.64 \\ 0.50 & 3.60 \end{bmatrix}$
 3. $\begin{bmatrix} 54 & 0.9 & -3.4 \\ 2 & 0.2 & -0.2 \\ -30 & -0.5 & 2 \end{bmatrix}$
 5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$
 7. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$
 9. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$
 11. $(\mathbf{A}^2)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 3.760 & 22.272 \\ 2.400 & 15.280 \end{bmatrix}$

15. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}, (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Πολλαπλασιάζουμε με \mathbf{A} από τα δεξιά.

Προβλήματα εδαφίου 7.9, page 318

1. $[1 \ 0]^T, [0 \ 1]^T; [1 \ 0]^T, [0 \ -1]^T; [1 \ 1]^T, [-1 \ 1]^T$
 3. 1, $[1 \ 11 \ -7]^T$
 5. Όχι
 7. Διάσταση 2, βάση xe^{-x}, e^{-x}
 9. 3; βάση $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
 11. $x_1 = 5y_1 - y_2, x_2 = 3y_1 - y_2$
 13. $x_1 = 2y_1 - 3y_2, x_2 = -10y_1 + 16y_2 + y_3, x_3 = -7y_1 + 11y_2 + y_3$

15. $\sqrt{26}$

19. 1

23. $\mathbf{a} = [3 \quad 1 \quad -4]^T$, $\mathbf{b} = [-4 \quad 8 \quad -1]^T$, $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \sqrt{107} \cong 5.099 + 9$

25. $\mathbf{a} = [5 \quad 3 \quad 2]^T$, $\mathbf{b} = [3 \quad 2 \quad -1]^T$, $90 + 14 = 2(38 + 14)$

17. $\sqrt{5}$

21. $k = -20$

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 7, page 318

11. $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 \\ -18 & 8 & -7 \\ -13 & -2 & -7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 18 & 13 \\ -6 & -8 & 2 \\ -1 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

13. $[21 \quad -8 \quad -31]^T$, $[21 \quad -8 \quad 31]$

15. 197, 0

17. -5, $\det \mathbf{A}^2 = (\det \mathbf{A})^2 = 25$, 0

19. $\begin{bmatrix} -2 & -12 & -12 \\ -12 & 16 & -9 \\ -12 & -9 & -14 \end{bmatrix}$

21. $x = 4$, $y = -2$, $z = 8$

23. $x = 6$, $y = 2t + 2$, $z = t$ arb.

25. $x = 0.4$, $y = -1.3$, $z = 1.7$

27. $x = 10$, $y = -2$

29. Βαθμοί 2, 2, ∞

31. Βαθμοί 2, 2, 1

33. $I_1 = 16.5$ A, $I_2 = 11$ A, $I_3 = 5.5$ A

35. $I_1 = 4$ A, $I_2 = 5$ A, $I_3 = 1$ A

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 8.1, page 329

1. 3, $[1 \quad 0]^T$; -0.6, $[0 \quad 1]^T$ 3. -4, $[2 \quad 9]^T$; 3, $[1 \quad 1]^T$

5. $-3i$, $[1 \quad -i]$; $3i$, $[1 \quad i]$, $i = \sqrt{-1}$

7. $\lambda^2 = 0$, $[1 \quad 0]^T$

9. $0.8 + 0.6i$, $[1 \quad -i]^T$; $0.8 - 0.6i$, $[1 \quad i]^T$

11. $-(\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162)/(\lambda - 3) = -(\lambda^2 - 15\lambda + 54)$; 3, $[2 \quad -2 \quad 1]^T$; 6, $[1 \quad 2 \quad 2]^T$; 9, $[2 \quad 1 \quad -2]^T$

13. $-(\lambda - 9)^3$; 9, $[2 \quad -2 \quad 1]^T$, defect 2

15. $(\lambda + 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda - 15)$; -1, $[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, $[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$; -5, $[-3 \quad -3 \quad 1 \quad 1]^T$, 3, $[3 \quad -3 \quad 1 \quad -1]^T$

17. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Ιδιοτιμές i , $-i$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι μιγαδικά,

γεγονός που υποδηλοί ότι η φορά δε διατηρείται υπό τη στροφή.

19. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; 1, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; 0, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ένα σημείο επί του άξονα x_2 απεικονίζεται στον εαυτό του, ένα σημείο επί του άξονα x_1 απεικονίζεται στην αρχή.

23. Τα πραγματικά στοιχεία υποδηλούν πραγματικούς συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Προβλήματα εδαφίου 8.2, page 333

1. $1.5, [1 \ -1]^T, -45^\circ$; $4.5, [1 \ 1]^T, 45^\circ$
3. $1, [-1/\sqrt{6} \ 1]^T, 112.2^\circ$; $8, [1 \ 1/\sqrt{6}]^T, 22.2^\circ$
5. $0.5, [1 \ -1]^T$; $1.5, [1 \ 1]^T$; γωνίες -45° και 45°
7. $[5 \ 8]^T$
9. $[11 \ 12 \ 16]^T$
11. 1.8
13. $c[10 \ 18 \ 25]^T$
15. $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y} = [0.6747 \ 0.7128 \ 0.7543]^T$
17. $\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j$ ($\mathbf{x}_j \neq \mathbf{0}$), $(\mathbf{A} - k\mathbf{I})\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j - k\mathbf{x}_j = (\lambda_j - k)\mathbf{x}_j$.
19. Από τη σχέση $\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j$ ($\mathbf{x}_j \neq \mathbf{0}$) και το Πρόβλημα 18 έπεται ότι $k_p\mathbf{A}^p\mathbf{x}_j = k_p\lambda_j^p\mathbf{x}_j$ και $k_q\mathbf{A}^q\mathbf{x}_j = k_q\lambda_j^q\mathbf{x}_j$ ($p \geq 0, q \geq 0$, ακέραιοι). Βάσει αυτών, έπεται η πρόταση $k_p\mathbf{A}^p + k_q\mathbf{A}^q$ έχει την ιδιοτιμή $k_p\lambda_j^p + k_q\lambda_j^q$. Βάσει αυτών, έπεται η πρόταση.

Προβλήματα εδαφίου 8.3, page 338

1. $0.8 \pm 0.6i, [1 \ \pm i]^T$; ορθογωνικός
3. $2 \pm 0.8i, [1 \ \pm i]$. Όχι αντισυμμετρικός!
5. $1, [0 \ 2 \ 1]^T$; $6, [1 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 1 \ -2]^T$; συμμετρικός
7. $0, \pm 25i$, αντισυμμετρικός
9. $1, [0 \ 1 \ 0]^T$; $i, [1 \ 0 \ i]^T$; $-i, [1 \ 0 \ -i]^T$, ορθογωνικός
15. Όχι
17. $\mathbf{A}^{-1} = (-\mathbf{A}^T)^{-1} = -(\mathbf{A}^{-1})^T$
19. Όχι, διότι $\det \mathbf{A} = \det (\mathbf{A}^T) = \det (-\mathbf{A}) = (-1)^3 \det (\mathbf{A}) = -\det (\mathbf{A}) = 0$.

Προβλήματα εδαφίου 8.4, page 345

1. $\begin{bmatrix} -25 & 12 \\ -50 & 25 \end{bmatrix}, -5, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}; 5, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 3.008 & -0.544 \\ 5.456 & 6.992 \end{bmatrix}, 4, \begin{bmatrix} -17 \\ 31 \end{bmatrix}; 6, \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 25 \\ 25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -9 \\ 0 & -5 & 15 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix}, 0, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; 4, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; 10, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

$$13. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$15. \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$17. \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad 4y_1^2 + 10y_2^2 = 200, \quad \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \text{ έλλειψη}$$

$$19. \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}, \quad 14y_1^2 - 8y_2^2 = 0, \quad \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}; \text{ ζεύγος ευθειών}$$

$$21. \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad 7y_1^2 - 5y_2^2 = 70, \quad \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \text{ υπερβολή}$$

$$23. \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -11 & 42 \\ 42 & 24 \end{bmatrix}, \quad 52y_1^2 - 39y_2^2 = 156, \quad \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \text{ υπερβολή}$$

Προβλήματα εδαφίου 8.5, page 351

1. Ερμιτιανός, 5, $[-i \ 1]^T$, 7, $[i \ 1]^T$
3. Μοναδιαίος, $(1 - i\sqrt{3})/2$, $[-1 \ 1]^T$; $(1 + i\sqrt{3})/2$, $[1 \ 1]^T$
5. Αντιερμιτιανός, μοναδιαίος, $-i$, $[0 \ -1 \ 1]^T$, i , $[1 \ 0 \ 0]^T$, $[0 \ 1 \ 1]^T$
7. Ιδιοτιμές -1 , 1 ; ιδιοδιανύσματα $[1 \ -1]^T$, $[1 \ 1]^T$; $[1 \ -i]^T$, $[1 \ i]^T$; $[0 \ 1]^T$, $[1 \ 0]^T$, resp.
9. Ερμιτιανός, 16
11. Αντιερμιτιανός, $-6i$
13. $(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{C}^{-1}(-\mathbf{B})\mathbf{A}$
15. $\mathbf{A} = \mathbf{H} + \mathbf{S}$, $\mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \overline{\mathbf{A}}^T)$, $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \overline{\mathbf{A}}^T)$ (\mathbf{H} Ερμιτιανός, \mathbf{S} αντιερμιτιανός)
19. $\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^T - \overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A} = (\mathbf{H} + \mathbf{S})(\mathbf{H} - \mathbf{S}) - (\mathbf{H} - \mathbf{S})(\mathbf{H} + \mathbf{S}) = 2(-\mathbf{HS} + \mathbf{SH}) = \mathbf{0}$
αν (και μόνο αν) $\mathbf{HS} = \mathbf{SH}$.

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 8, page 352

11. 3, $[1 \ 1]^T$; 2, $[1 \ -1]^T$
13. 3, $[1 \ 5]^T$; 7, $[1 \ 1]^T$
15. 0, $[2 \ -2 \ 1]^T$; $9i$, $[-1 + 3i \ 1 + 3i \ 4]^T$; $-9i$, $[-1 - 3i \ 1 - 3i \ 4]^T$
17. $-1, 1$; $\mathbf{A} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 & 2 \\ 39 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 63 & 1 \end{bmatrix}$

$$19. \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$21. \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{bmatrix}$$

$$23. \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -14 \end{bmatrix}, \quad 10y_1^2 - 20y_2^2 = 20, \quad \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \text{ υπερβολή}$$

$$25. \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3.7 & 1.6 \\ 1.6 & 1.3 \end{bmatrix}, \quad 4.5y_1^2 + 0.5y_2^2 = 4.5, \quad \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \text{ έλλειψη}$$

Προβλήματα εδαφίου 9.1, page 360

1. 5, 1, 0; $\sqrt{26}$; $[5/\sqrt{26}, 1/\sqrt{26}, 0]$
 3. 8.5, -4.0, 1.7; $\sqrt{91.14}$, $[0.890, -0.419, 0.178]$
 5. 2, 1, -2; $\mathbf{u} = [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}]$, διάνυσμα θέσεως του Q
 7. Q: $(4, 0, \frac{1}{2})$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{16.25 - 2}, 0$
 11. $7[9, -7, 8] \frac{1}{2} [63, -49, 56]$
 15. $[4, 9, -3]$, $\sqrt{106}$
 21. $[6, 2, -14] = 2\mathbf{u}$, $\sqrt{236}$
 25.
 29. $\mathbf{v} = [v_1, v_2, 3]$, v_1, v_2 αυθαίρετο
 33. $|\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{u}| \leq 18$. Καμία
 35. $v_B - v_A = [-19, 0] - [22/\sqrt{2}, 22/\sqrt{2}] = [-19 - 22/\sqrt{2}, -22/\sqrt{2}]$
 37. $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{p} = [-k, 0] + [l, l] + [0, -1000] = \mathbf{0}$, $-k + l + 0 = 0$,
 $0 + l - 1000 = 0$, $l = 1000, k = 1000$
 9. Q: $(0, 0, -8)$, $|\mathbf{v}| = 8$
 13. $[1, 5, 8]$
 17. $[12, 8, 0]$
 23. $[0, 0, 5]$, 5
 27. $\mathbf{p} = [0, 0, -5]$
 31. $k = 10$

Προβλήματα εδαφίου 9.2, page 367

1. 44, 44, 0
 3. $\sqrt{35}$, $\sqrt{320}$, $\sqrt{86}$
 5. $|[2, 9, 9]| = \sqrt{166} = 12.88 < \sqrt{80} + \sqrt{86} = 18.22$
 7. $|-24| = 24$, $|a||c| = \sqrt{35}\sqrt{86} = \sqrt{3010} = 54.86$; βλ. (6)
 9. 300; βλ. (5a) και (5b) 13. Να χρησιμοποιήσετε την (1) και τη σχέση $|\cos \gamma| \leq 1$.
 15. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b})$
 $= 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2$
 17. $[2, 5, 0] \cdot [2, 2, 2] = 14$
 19. $[0, 4, 3] \cdot [-3, -2, 1] = -5$ is negative! Why?
 21. Ναι, διότι $W = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{d}$. 23. $\arccos 0.5976 = 53.3^\circ$
 27. $\beta - \alpha$ είναι η γωνία μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων \mathbf{a} και \mathbf{b} . Χρησιμοποιήστε την (2).
 29. $\gamma = \arccos (12/(6\sqrt{13})) = 0.9828 = 56.3^\circ$ και 123.7°
 31. $a_1 = -\frac{28}{3}$ 33. $\pm[\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}]$
 35. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$. Τετράγωνο.
 37. 0. Why?
 39. Αν $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ ή αν τα \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι ορθογωνικά.

Προβλήματα εδαφίου 9.3, page 374

5. $-\mathbf{m}$ αντί για \mathbf{m} , τείνει να στραφεί κατά την αντίθετη φορά.
 7. $|\mathbf{v}| = |[0, 20, 0] \times [8, 6, 0]| = |[0, 0, -160]| = 160$
 9. Μηδενικός όγκος στην Εικόνα 191 (μπορεί να συμβεί με διάφορους τρόπους)
 11. $[0, 0, 7], [0, 0, -7], -4$ 13. $[6, 2, 7], [-6, -2, -7]$
 15. $\mathbf{0}$ 17. $[-32, -58, 34], [-42, -63, 19]$
 19. $1, -1$
 21. $[-48, -72, -168], 12\sqrt{248} = 189.0, 189.0$
 23. $0, 0, 13$
 25. $\mathbf{m} = [-2, -2, 0] \times [2, 3, 0] = [0, 0, -10]$, $m = 10$ με ωρολογιακή φορά
 27. $[6, 2, 0] \times [1, 2, 0] = [0, 0, 10]$ 29. $\frac{1}{2} |[-12, 2, 6]| = \sqrt{46}$
 31. $3x + 2y - z = 5$ 33. $474/6 = 79$

Προβλήματα εδαφίου 9.4, page 380

1. Υπερβολές
 3. Παράλληλες ευθείες γραμμές (επίπεδα στο χώρο) $y = \frac{3}{4}x + c$
 5. Circles, centers on the y -axis
 7. Ελλείψεις 9. Παράλληλα επίπεδα
 11. Ελλειπτικοί κύλινδροι 13. Παραβολοειδή

Προβλήματα εδαφίου 9.5, page 390

1. Κύκλος, με κέντρο $(3, 0)$, και ακτίνα 2 3. Τριτοβάθμια παραβολή $x = 0, z = y^3$
 5. Έλλειψη 7. Έλικά
 9. Καμπύλη Lissajous 11. $\mathbf{r} = [3 + \sqrt{13} \cos t, 2 + \sqrt{13} \sin t, 1]$
 13. $\mathbf{r} = [2 \pm t, 1 + 2t, 3]$ 15. $\mathbf{r} = [t, 4t - 1, 5t]$
 17. $\mathbf{r} = [\sqrt{2} \cos t, \sin t, \sin t]$ 19. $\mathbf{r} = [\cosh t, (\sqrt{3}/2) \sinh t, -2]$
 21. Ισχύει $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.
 25. $\mathbf{u} = [-\sin t, 0, \cos t]$. At P , $\mathbf{r}' = [-8, 0, 6]$. $\mathbf{q}(w) = [6 - 8w, i, 8 + 6w]$.
 27. $\mathbf{q}(w) = [2 + w, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}w, 0]$ 29. $\sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = \cosh t, l = \sinh t = 1.175$
 31. $\sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = a, l = a\pi/2$ 33. Να ξεκινήσετε από τη σχέση $\mathbf{r}(t) = [t, f(t)]$.
 35. $\mathbf{v} = \mathbf{r}' = [1, 2t, 0], |\mathbf{v}| = \sqrt{1 + 4t^2}, \mathbf{a} = [0, 2, 0]$
 37. $\mathbf{v}(0) = (\omega + 1)R\mathbf{i}, \mathbf{a}(0) = -\omega^2R\mathbf{j}$
 39. $\mathbf{v} = [-\sin t - 2 \sin 2t, \cos t - 2 \cos 2t], |\mathbf{v}|^2 = 5 - 4 \cos 3t$,
 $\mathbf{a} = [-\cos t - 4 \cos 2t, -\sin t + 4 \sin 2t]$, και $\mathbf{a}_{\tan} = \frac{6 \sin 3t}{5 - 4 \cos 3t} \mathbf{v}$.
 41. $\mathbf{v} = [-\sin t, 2 \cos 2t, -2 \sin 2t], |\mathbf{v}|^2 = 4 + \sin^2 t$,
 $\mathbf{a} = [-\cos t, -4 \sin 2t, -4 \cos 2t]$, και $\mathbf{a}_{\tan} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2t}{4 + \sin^2 t} \mathbf{v}$.
 43. $1 \text{ έτος} = 365 \cdot 86,400 \text{ s}, R = 30 \cdot 365 \cdot 86,400/2\pi = 151 \cdot 10^6 \text{ [km]}, |\mathbf{a}| = \omega^2 R = |\mathbf{v}|^2/R = 5.98 \cdot 10^{-6} \text{ [km/s}^2]$
 45. $R = 3960 + 80 \text{ mi} = 2.133 \cdot 10^7 \text{ ft}, g = |\mathbf{a}| = \omega^2 R = |\mathbf{v}|^2/R, |\mathbf{v}| = \sqrt{gR} = \sqrt{6.61 \cdot 10^8} = 25,700 \text{ [ft/s]} = 17,500 \text{ [mph]}$
 49. $\mathbf{r}(t) = [t, y(t), 0], \mathbf{r}' = [1, y', 0], \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 1 + y'^2$, κ.λπ.

$$51. \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} / \frac{ds}{dt}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} / \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \dots, \quad \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} / \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + \dots$$

$$53. 3/(1 + 9t^2 + 9t^4)$$

Προβλήματα εδαφίου 9.7, page 402

1. $[2y - 1, 2x + 2]$
3. $[-y/x^2, 1/x]$
5. $[4x^3, 4y^3]$
7. Use the chain rule.
9. Να εφαρμόσετε τον κανόνα του πηλίου σε κάθε συνιστώσα και να κάνετε ομαδοποίηση.
11. $[y, x], [5, -4]$
13. $[2x/(x^2 + y^2), 2y/(x^2 + y^2)], [0.16, 0.12]$
15. $[8x, 18y, 2z], [40, -18, -22]$
17. Για P επί των αξόνων x και y .
19. $[-1.25, 0]$
21. $[0, -e]$
23. Σημεία με $y = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$
25. $-\nabla T(P) = [0, 4, -1]$
31. $\nabla f = [32x, -2y], \nabla f(P) = [160, -2]$
33. $[12x, 4y, 2z], [60, 20, 10]$
35. $[-2x, -2y, 1], [-6, -8, 1]$
37. $[2, 1] \cdot [1, -1]/\sqrt{5} = 1/\sqrt{5}$
39. $[1, \frac{1}{1}, 1] \cdot [-3/125, 0, -4/125]/\sqrt{3} = -7/(125\sqrt{3})$
41. $\sqrt{8/3}$
43. $f = xyz$
45. $f = \int v_1 dx + \int v_2 dy + \int v_3 dz$

Προβλήματα εδαφίου 9.8, page 406

1. $2x + 8y + 18z; 7$
3. 0, μετά την απλοποίηση
5. $9x^2y^2z^2; 1296$
7. $-2e^x(\cos y)z$
9. (b) $(fv_1)_x + (fv_2)_y + (fv_3)_z = f[(v_1)_x + (v_2)_y + (v_3)_z] + f_x v_1 + f_y v_2 + f_z v_3$, etc.
11. $[v_1, v_2, v_3] = \mathbf{r}' = [x', y', z'] = [y, 0, 0], z' = 0, z = c_3, y' = 0, y = c_2$, and $x' = y = c_2, x = c_2 t + c_1$. Επομένως, καθώς το t αυξάνεται από 0 σε 1, αυτή η "διατμητική ροή" μετασχηματίζει τον κύβο σε ένα παραλληλεπίπεδο μοναδιαίου όγκου.
13. $\text{div}(\mathbf{w} \times \mathbf{r}) = 0$ διότι τα v_1, v_2, v_3 δεν εξαρτώνται από τα x, y, z , αντιστοίχως.
15. $-2 \cos 2x + 2 \cos 2y$
17. 0
19. $2/(x^2 + y^2 + z^2)^2$

Προβλήματα εδαφίου 9.9, page 408

3. Να χρησιμοποιήσετε τους ορισμούς και να εφαρμόσετε άμεσους υπολογισμούς.
5. $[x(z^2 - y^2), y(x^2 - z^2), z(y^2 - x^2)]$
7. $e^{-x}[\cos y, \sin y, 0]$
9. $\text{curl } \mathbf{v} = [-6z, 0, 0]$ ασυμπίεστη, $\mathbf{v} = \mathbf{r}' = [x', y', z'] = [0, 3z^2, 0], x = c_1, z = c_3, y' = 3z^2, y = 3c_3^2 t + c_2$
11. $\text{curl } \mathbf{v} = [0, 0, -3]$, ασυμπίεστη, $x' = y, y' = -2x, 2xx' + yy' = 0, x^2 + \frac{1}{2}y^2 = c, z = c_3$
13. $\text{curl } \mathbf{v} = 0$, αστρόβιλη, $\text{div } \mathbf{v} = 1$, συμπίεστη, $\mathbf{r} = [c_1 e^t, c_2 e^t, c_3 e^{-t}]$. Σχεδιάστε το.
15. $[-1, -1, -1]$, το ίδιο (γιατί;)
17. $-yz - zx - xy, 0$ (γιατί;), $-y - z - x$
19. $[-2z - y, -2x - z, -2y - x]$, το ίδιο (γιατί;)

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 9, page 409

11. $-10, 1080, 1080, 65$
 13. $[-10, -30, 0], [10, 30, 0], \mathbf{0}, 40$
 15. $[-1260, -1830, -300], [-210, 120, -540]$, δεν ορίζεται
 17. $-125, 125, -125$
 19. $[70, -40, -50], 0, \sqrt{35^2 + 20^2 + 25^2} = \sqrt{2250}$
 21. $[-2, -6, -13]$
 23. $\gamma_1 = \arccos(-10/\sqrt{65 \cdot 40}) = 1.7682 = -101.3^\circ, \gamma_2 = 23.7^\circ$
 25. $[5, 2, 0] \cdot [4 - 1, 3 - 1, 0] = 19$ 27. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}/|\mathbf{w}| = 22/\sqrt{8} = 7.78$
 29. $[0, 0, -14]$, τάση προς ωρολογιακή στροφή 31. 4
 33. 1, $-2y$
 35. 0, ίδιο (γιατί);, $2(y^2 + x^2 - xz)$
 37. $[0, -2, 0]$ 39. $9/\sqrt{225} = \frac{3}{5}$

Προβλήματα εδαφίου 10.1, page 418

3. 4
 5. $\mathbf{r} = [2 \cos t, 2 \sin t], 0 \leq t \leq \pi/2; \frac{8}{5}$
 7. “Εκθετική έλικα,” $(e^{6\pi} - 1)/3$ 9. 23.5, 0
 11. $2e^{-t} + 2te^{-t^2}, -2e^{-2} - e^{-4} + 3$ 15. $18\pi, \frac{4}{3}(4\pi)^3, 18\pi$
 17. $[4 \cos t, + \sin t, \sin t, 4 \cos t], [2, 2, 0]$ 19. $144t^4, 1843.2$

Προβλήματα εδαφίου 10.2, page 425

3. $\sin \frac{1}{2}x \cos 2y, 1 - 1/\sqrt{2} = 0.293$ 5. $e^{xy} \sin z, e - 0$
 7. $\cosh 1 - 2 = -0.457$
 9. $e^x \cosh y + e^z \sinh y, e - (\cosh 1 + \sinh 1) = 0$
 13. $e^{a^2} \cos 2b$ 15. Εξαρτάται, $x^2 \neq -4y^2$, κ.λπ.
 17. Εξαρτάται, $4 \neq 0$, κ.λπ. 19. $\sin(a^2 + 2b^2 + c^2)$

Προβλήματα εδαφίου 10.3, page 432

3. $8y^3/3, 54$ 5. $\int_0^1 [x - x^3 - (x^2 - x^5)] dx = \frac{1}{12}$
 7. $\cosh 2x - \cosh x, \frac{1}{2} \sinh 4 - \sinh 2$ 9. $36 + 27y^2, 144$
 11. $z = 1 - r^2, dx dy = r dr d\theta$, Απάντηση: $\pi/2 x$
 13. $= 2b/3, y = h/3$ 15. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 4r/3\pi$
 17. $I_x = bh^3/12, I_y = b^3h/4$
 19. $I_x = (a + b)h^3/24, I_y = h(a^4 - b^4)/(48(a - b))$

Προβλήματα εδαφίου 10.4, page 438

1. $(-1 - 1) \cdot \pi/4 = -\pi/2$ 3. $9(e^2 - 1) - \frac{8}{3}(e^3 - 1)$
 5. $2x - 2y, 2x(1 - x^2) - (2 - x^2)^2 + 1, x = -1 \cdots 1, -\frac{56}{15}$
 7. 0. Γιατί; 9. $\frac{16}{5}$
 13. $\nabla^2 w = \cosh x, y = x/2 \cdots 2, \frac{1}{2} \cosh 4 - \frac{1}{2}$

15. $\nabla^2 w = 6xy$, $3x(10 - x^2)^2 - 3x$, 486 17. $\nabla^2 w = 6x - 6y$, -38.4
 19. $|\text{grad } w|^2 = e^{2x}$, $\frac{5}{2}(e^4 - 1)$

Προβλήματα εδαφίου 10.5, page 442

1. Ευθείες γραμμές, \mathbf{k}
 3. $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$, κύκλοι, ευθείες γραμμές, $[-cu \cos v, -cu \sin v, u]$
 5. $z = x^2 + y^2$, κύκλοι, παραβολές, $[-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u]$
 7. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, $[bc \cos^2 v \cos u, ac \cos^2 v \sin u, ab \sin v \cos v]$,
 Ελλείψεις
 11. $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2]$, $\tilde{\mathbf{N}} = [-2\tilde{u}, -2\tilde{v}, 1]$
 13. Θέτουμε $x = u$ και $y = v$.
 15. $[2 + 5 \cos u, -1 + 5 \sin u, v]$, $[5 \cos u, 5 \sin u, 0]$
 17. $[a \cos v \cos u, -2.8 + a \cos v \sin u, 3.2 + a \sin v]$, $a = 1.5$;
 $[a^2 \cos^2 v \cos u, a^2 \cos^2 v \sin u, a^2 \cos v \sin v]$
 19. $[\cosh u, \sinh u, v]$, $[\cosh u, -\sinh u, 0]$

Προβλήματα εδαφίου 10.6, page 450

1. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} = [-u^2, v^2, 0] \cdot [-3, 2, 1] = 3u^2 + 2v^2$, 29.5
 3. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} = \cos^3 v \cos u \sin u$ from (3), εδάφιο 10.5. Απάντηση: $\frac{1}{3}$
 5. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} = -u^3$, -128π
 7. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = [0, \sin u, \cos v] \cdot [1, -2u, 0]$, $4 + (-2 + \pi^2/16 - \pi/2)\sqrt{2} = -0.1775$
 9. $\mathbf{r} = [2 \cos u, 2 \sin u, v]$, $0 \leq u \leq \pi/4$, $0 \leq v \leq 5$. Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση
 $2 \sinh v \sin u$ to get $2(1 - 1/\sqrt{2})(\cosh 5 - 1) = 42.885$.
 13. $7\pi^3/\sqrt{6} = 88.6$
 15. $G(\mathbf{r}) = (1 + 9u^4)^{3/2}$, $|\mathbf{N}| = (1 + 9u^4)^{1/2}$. Απάντηση: 54.4
 21. $I_{x=y} = \iint_S [\frac{1}{2}(x - y)^2 + z^2] \sigma \, dA$
 23. $[u \cos v, u \sin v, u]$, $\int_0^{2\pi} \int_0^h u^2 \cdot u\sqrt{2} \, du \, dv = \frac{\pi}{\sqrt{2}} h^4$
 25. $[\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u]$, $dA = (\cos u) \, du \, dv$, B the z -axis, $I_B = 8\pi/3$,
 $I_K = I_B + 1^2 \cdot 4\pi = 20.9$.

Προβλήματα εδαφίου 10.7, page 457

1. 224
 3. $-e^{-1-z} + e^{-y-z}$, $-2e^{-1-z} + e^{-z}$, $2e^{-3} - e^{-2} - 2e^{-1} + 1$
 5. $\frac{1}{2}(\sin 2x)(1 - \cos 2x)$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$
 7. $[r \cos u \cos v, \cos u \sin v, r \sin u]$, $dV = r^2 \cos u \, dr \, du \, dv$, $\sigma = v$, $2\pi^2 a^3/3$
 9. $\text{div } \mathbf{F} = 2x + 2z$, 48 11. $12(e - 1/e) = 24 \sinh 1$
 13. $\text{div } \mathbf{F} = -\sin z$, 0 15. $1/\pi + \frac{5}{24} = 0.5266$
 17. $h^4 \pi/2$ 19. $8abc(b^2 + c^2)/3$
 21. $(a^4/4) \cdot 2\pi \cdot h = ha^4 \pi/2$ 23. $h^5 \pi/10$
 25. Όπως το προηγούμενο πρόβλημα

Προβλήματα εδαφίου 10.8, page 462

- $x = 0, y = 0, z = 0$ καμία συμμετοχή $x = a: \partial f/\partial n = \partial f/\partial x = -2x = -2a$, κ.λπ.
Ολοκληρώματα $x = a: (-2a)bc, y = b: (-2b)ac, z = c: (4c)ab$. Sum 0
- Το ογκικό ολοκλήρωμα της $8y^2 + [0, 8y] \cdot [2x, 0] = 8y^2$ is $8y^3/3 = \frac{8}{3}$. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της $f \partial g/\partial n = f \cdot 2x = 2f = 8y^2$ over $x = 1$ is $8y^3/3 = \frac{8}{3}$. Τα άλλα είναι 0.
- Το ογκικό ολοκλήρωμα $6xz^2 \cdot 4 - 2x^2 \cdot 12$ is 0; $8(x = 1), -8(y = 1)$, τα άλλα είναι 0.
- $\mathbf{F} = [x, 0, 0], \operatorname{div} \mathbf{F} = 1$, use (2*), Sec. 10.7, κ.λπ.
- $z = 0$ and $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2}, dx dy = r dr d\theta,$
 $-2\pi \cdot \frac{1}{2}(a^2 - r^2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^a = \frac{2}{3} \pi a^3$
- $r = a, \phi = 0, \cos \phi = 1, v = \frac{1}{3}a \cdot (4\pi a^2)$

Προβλήματα εδαφίου 10.9, page 468

- $S: z = y (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4), [0, 2z, -2z] \cdot [0, -1, 1], \pm 20$
- $[2e^{-z} \cos y, -e^{-z}, 0] \cdot [0, -y, 1] = ye^{-z}, \pm(2 - 2/\sqrt{e})$
- $[0, 2z, \frac{3}{2}] \cdot [0, 0, 1] = \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{2}a^2$
- $[-e^z, -e^x, -e^y] \cdot [-2x, 0, 1], \pm(e^4 - 2e + 1)$
- Οι ακμές συμμετέχουν κατά $a, 3a^2/2, -a, 0$.
- $-2\pi; \operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \mathbf{13. 5k, 80\pi}$
- $[0, -1, 2x - 2y] \cdot [0, 0, 1], \frac{1}{3}$
- $\mathbf{r} = [\cos u, \sin u, v], [-3v^2, 0, 0] \cdot [\cos u, \sin u, 0], -1$
- $\mathbf{r} = [u \cos v, u \sin v, u], 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi/2,$
 $[-e^z, 1, 0] \cdot [-u \cos v, -u \sin v, u]. \text{ Απάντηση: } 1/2$

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 10, page 469

- $\mathbf{r} = [4 - 10t, 2 + 8t], \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = [2(4 - 10t)^2, -4(2t + 8t)^2] \cdot [-10, 8] dt;$
 $-4528/3$. Επίσης, χρησιμοποιήστε την ακριβή παράσταση.
- Μη ακριβής, $\operatorname{curl} \mathbf{F} = (5 \cos x)\mathbf{k}, \leq 10 \quad \mathbf{15. 0}$ since $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$
- Κατά Stokes, $\pm 18\pi \quad \mathbf{19. F} = \operatorname{grad} (y^2 + xz), 2\pi$
- $M = 8, \bar{x} = \frac{8}{5}, \bar{y} = \frac{16}{5}$
- $M = \frac{63}{20}, \bar{x} = \frac{8}{7} = 1.14, \bar{y} = \frac{118}{49} = 2.41$
- $M = 4k/15, \bar{x} = \frac{5}{16}, \bar{y} = \frac{4}{7} \quad \mathbf{27. 288(a + b + c)\pi}$
- $\operatorname{div} \mathbf{F} = 20 + 6z^2$. Απάντηση: 21 $\mathbf{31. 24 \sinh 1 = 28.205}$
- Άμεση ολοκλήρωση, $\frac{224}{3} \quad \mathbf{35. 72\pi}$

Προβλήματα εδαφίου 11.1, page 482

- $2\pi, 2\pi, \pi, \pi, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \quad \mathbf{3. Δεν υπάρχει μικρότερο } p > 0.$
- $\frac{4}{\pi} (\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots) + 2 (\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots)$
- $\frac{4}{3} \pi^2 + 4 (\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{9} \cos 3x + \dots) - 4\pi (\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots)$
- $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right)$

19. $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right) + \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots$
21. $2(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots)$

Προβλήματα εδαφίου 11.2, page 490

1. Τίποτα, άρτια, περιττή, περιττή, τίποτα. 3. Άρτια 5. Άρτια
9. Περιττή, $L = 2$, $\frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{2} + \dots \right)$
11. Άρτια, $L = 1$, $\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x - \frac{1}{4} \cos 2\pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x - \dots \right)$
13. Rectifier, $L = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \left(\cos 2\pi x + \frac{1}{9} \cos 6\pi x + \frac{1}{25} \cos 10\pi x + \dots \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 2\pi x - \frac{1}{4} \sin 4\pi x + \frac{1}{6} \sin 6\pi x - \frac{1}{8} \sin 8\pi x + \dots \right)$
15. Περιττή, $L = \pi$, $\frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \dots \right)$
17. Άρτια, $L = 1$, $\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x + \frac{1}{25} \cos 5\pi x + \dots \right)$
19. $\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$
23. $L = 4$, (a) 1, (b) $\frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{4} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{4} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{4} + \dots \right)$
25. $L = \pi$, (a) $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right)$,
 (b) $2(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + \dots)$
27. $L = \pi$, (a) $\frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x - \frac{1}{18} \cos 6x + \frac{1}{49} \cos 7x + \frac{1}{81} \cos 9x - \frac{1}{50} \cos 10x + \frac{1}{121} \cos 11x + \dots \right)$
 (b) $\left(1 + \frac{2}{\pi} \right) \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi} \right) \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{25\pi} \right) \sin 5x + \frac{1}{6} \sin 6x + \dots$
29. Rectifier, $L = \pi$,
 (a) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos x + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 3x + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 5x + \dots \right)$, (b) $\sin x$

Προβλήματα εδαφίου 11.3, page 494

3. Η έξοδος καθίσταται μια αμιγώς συνημιτονική σειρά.
5. Για τους A_n , η κατάσταση είναι όμοια με εκείνη της Εικόνας 54, ενώ για τους B_n η φορά είναι η ίδια για κάθε n .

$$7. y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + a(\omega) \sin t, \quad a(\omega) = 1/(\omega^2 - 1) = -1.33, \\ -5.26, 4.76, 0.8, 0.01. \text{ Παρατηρήστε την αλλαγή στα πρόσημα.}$$

$$11. y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{\omega^2 - 9} \sin t + \frac{1}{\omega^2 - 49} \sin 3t + \right. \\ \left. \frac{1}{\omega^2 - 121} \sin 5t + \dots \right)$$

$$13. y = \sum_{n=1}^N (A_n \cos nt + B_n \sin nt), \quad A_n = [(1 - n^2)a_n - nb_n c]/D_n, \\ B_n = [(1 - n^2)b_n + nca_n]/D_n, \quad D_n = (1 - n^2)^2 + n^2 c^2$$

$$15. b_n = (-1)^{n+1} \cdot 12/n^3 \quad (n \text{ odd}), \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt), \\ A_n = (-1)^n \cdot 12nc/n^3 D_n, \quad B_n = (-1)^{n+1} \cdot 12(1 - n^2)/(n^3 D_n) \text{ με το } D_n \text{ να είναι όπως} \\ \text{στο Πρόβλημα 13}$$

$$17. I = 50 + A_1 \cos t + B_1 \sin t + A_3 \cos 3t + B_3 \sin 3t + \dots, \quad A_n = (10 - n^2) \\ a_n/D_n, \quad B_n = 10na_n/D_n, \quad a_n = -400/(n^2 \pi), \quad D_n = (n^2 - 10)^2 + 100n^2$$

$$19. I(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt), \quad A_n = (-1)^{n+1} \frac{2400(10 - n^2)}{n^2 D_n}, \\ B_n = (-1)^{n+1} \frac{24,000}{n D_n}, \quad D_n = (10 - n^2)^2 + 100n^2$$

Προβλήματα εδαφίου 11.4, page 498

$$3. F = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right), \quad E^* = 0.0748, \\ 0.0748, 0.0119, 0.0119, 0.0037$$

$$5. F = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right), \quad E^* = 1.1902, 1.1902, 0.6243, 0.6243, \\ 0.4206 \quad (0.1272 \text{ όταν } N = 20)$$

$$7. F = 2[(\pi^2 - 6) \sin x - \frac{1}{8}(4\pi^2 - 6) \sin 2x + \frac{1}{27}(9\pi^2 - 6) \sin 3x - \dots]; \\ E^* = 674.8, 454.7, 336.4, 265.6, 219.0. \text{ Γιατί το } E^* \text{ είναι τόσο μεγάλο;}$$

Προβλήματα εδαφίου 11.5, page 503

$$3. \text{ Set } x = ct + k. \quad 5. x = \cos \theta, \quad dx = -\sin \theta \, d\theta, \text{ etc.}$$

$$7. \lambda_m = (m\pi/10)^2, \quad m = 1, 2, \dots; \quad y_m = \sin(m\pi x/10)$$

$$9. \lambda = [(2m + 1)\pi/(2L)]^2, \quad m = 0, 1, \dots, \quad y_m = \sin((2m + 1)\pi x/(2L))$$

$$11. \lambda_m = m^2, \quad m = 1, 2, \dots, \quad y_m = x \sin(m \ln |x|)$$

$$13. p = e^{8x}, \quad q = 0, \quad r = e^{8x}, \quad \lambda_m = m^2, \quad y_m = e^{-4x} \sin mx, \quad m = 1, 2, \dots$$

Προβλήματα εδαφίου 11.6, page 509

$$1. 8(P_1(x) - P_3(x) + P_5(x))$$

$$3. \frac{4}{5}P_0(x) - \frac{4}{7}P_2(x) - \frac{8}{35}P_4(x)$$

$$9. -0.4775P_1(x) - 0.6908P_3(x) + 1.844P_5(x) - 0.8236P_7(x) + 0.1658P_9(x) + \dots, \\ m_0 = 9. \text{ Η } \textit{στρογγυλοποίηση} \text{ φαίνεται να έχει σημαντική επίδραση στα Προβλήματα 8 ως 13.}$$

11. $0.7854P_0(x) - 0.3540P_2(x) + 0.0830P_4(x) - \dots, m_0 = 4$
 13. $0.1212P_0(x) - 0.7955P_2(x) + 0.9600P_4(x) - 0.3360P_6(x) + \dots, m_0 = 8$
 15. (c) $a_m = (2/J_1^2(\alpha_{0,m}))(J_1(\alpha_{0,m})/\alpha_{0,m}) = 2/(\alpha_{0,m}J_1(\alpha_{0,m}))$

Προβλήματα εδαφίου 11.7, page 517

1. $f(x) = \pi e^{-x} (x > 0)$ δίνει $A = \int_0^{\infty} e^{-v} \cos wv \, dv = \frac{1}{1+w^2}, B = \frac{w}{1+w^2}$
 (βλ. Παράδειγμα 3) κ.λπ..
3. Να εργαστείτε με την (11); $B = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\pi}{2} \sin wv \, dv = \frac{1 - \cos \pi w}{w}$
5. $B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{2} \pi v \sin wv \, dv = \frac{\sin w - w \cos w}{w^2}$
7. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin w \cos xw}{w} \, dw$
9. $A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wv}{1+v^2} \, dv = e^{-w} (w > 0)$
11. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi w + 1}{1-w^2} \cos xw \, dw$
15. Για $n = 1, 2, 11, 12, 31, 32, 49, 50$ η τιμή της παράστασης $\text{Si}(n\pi) - \pi/2$ ισούται με 0.28, -0.15, 0.029, -0.026, 0.0103, -0.0099, 0.0065, -0.0064 (στρογγυλοποιημένες τιμές).
17. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos w}{w} \sin xw \, dw$
19. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w - e(w \cos w - \sin w)}{1+w^2} \sin xw \, dw$

Προβλήματα εδαφίου 11.8, page 522

1. $\hat{f}_c(w) = \sqrt{2/\pi} (2 \sin w - \sin 2w)/w$
 3. $\hat{f}_c(w) = \sqrt{2/\pi} (\cos 2w + 2w \sin 2w - 1)/w^2$
 5. $\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(w^2 - 2) \sin w + 2w \cos w}{w^3}$
 7. Ναι. Όχι. 9. $\sqrt{2/\pi} w/(a^2 + w^2)$
11. $\sqrt{2/\pi} ((2 - w^2) \cos w + 2w \sin w - 2)/w^3$
13. $\mathcal{F}_s(e^{-x}) = \frac{1}{w} \left(-\mathcal{F}_c(e^{-x}) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 1 \right) = \frac{1}{w} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{w^2 + 1} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w}{w^2 + 1}$

Προβλήματα εδαφίου 11.9, page 533

3. $i(e^{-ibw} - e^{-iaw})/(w\sqrt{2\pi})$ αν $a < b$; 0 ειδικά
 5. $[e^{(1-iw)a} - e^{-(1-iw)a}]/(\sqrt{2\pi}(1-iw))$
 7. $(e^{-iaw}(1+iaw) - 1)/(\sqrt{2\pi}w^2)$ 9. $\sqrt{2/\pi}(\cos w + w \sin w - 1)/w^2$
 11. $i\sqrt{2/\pi}(\cos w - 1)/w$ $e^{-w^2/2}$ σύμφωνα με την {9}

17. Όχι, οι παραδοχές του Θεωρήματος 3 δεν πληρούνται.
19. $[f_1 + f_2 + f_3 + f_4, f_1 - if_2 - f_3 + if_4, f_1 - f_2 + f_3 - f_4, f_1 + if_2 - f_3 - if_4]$
21.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + f_2 \\ f_1 - f_2 \end{bmatrix}$$

Επαλαληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 11, page 537

11. $1 + \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{2} + \dots \right)$
13. $\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left(\cos \pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x + \frac{1}{25} \cos 5\pi x + \dots \right) +$
 $\frac{1}{\pi} \left(\sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x - \dots \right)$
15. $\cosh x, \sinh x$ ($-5 < x < 5$), αντιστοίχως 17. Βλ. εδάφιο . 11.1.
19. $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x + \dots \right), \frac{2}{\pi} \left(\sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + \dots \right)$
21. $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{\pi^2}{\omega^2} - 12 \left(\frac{\cos t}{\omega^2 - 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos 2t}{\omega^2 - 4} + \frac{1}{9} \cdot \frac{\cos 3t}{\omega^2 - 9} \right.$
 $\left. - \frac{1}{16} \cdot \frac{\cos 4t}{\omega^2 - 16} + \dots \right)$
23. 0.82, 0.50, 0.36, 0.28, 0.23
25. 0.0076, 0.0076, 0.0012, 0.0012, 0.0004
27. $\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\cos w + w \sin w - 1) \cos wx + (\sin w - w \cos w) \sin wx}{w^2} dw$
29. $\sqrt{2/\pi} (\cos aw - \cos w + aw \sin aw - w \sin w)/w^2$

Προβλήματα εδαφίου 12.1, page 542

1. $L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L(u_1) + c_2 L(u_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$
3. $c = 2$ 5. $c = a/b$
7. Για κάθε c και ω 9. $c = \pi/25$
15. $u = 110 - (110/\ln 100) \ln(x^2 + y^2)$ 17. $u = a(y) \cos 4\pi x + b(y) \sin 4\pi x$
19. $u = c(x) e^{-y^3/3}$
21. $u = e^{-3y}(a(x) \cos 2y + b(x) \sin 2y) + 0.1e^{3y}$
23. $u = c_1(y)x + c_2(y)/x^2$ (Euler–Cauchy)
25. $u(x, y) = axy + bx + cy + k$; a, b, c, k είναι αυθαίρετες σταθερές

Προβλήματα εδαφίου 12.3, page 551

5. $k \cos 3\pi t \sin 3\pi x$
7. $\frac{8k}{\pi^3} \left(\cos \pi t \sin \pi x + \frac{1}{27} \cos 3\pi t \sin 3\pi x + \frac{1}{125} \cos 5\pi t \sin 5\pi x + \dots \right)$
9. $\frac{0.8}{\pi^2} \left(\cos \pi t \sin \pi x - \frac{1}{9} \cos 3\pi t \sin 3\pi x + \frac{1}{25} \cos 5\pi t \sin 5\pi x - \dots \right)$

$$11. \frac{2}{\pi^2} \left((2 - \sqrt{2}) \cos \pi t \sin \pi x - \frac{1}{9} (2 + \sqrt{2}) \cos 3\pi t \sin 3\pi x \right. \\ \left. + \frac{1}{25} (2 + \sqrt{2}) \cos 5\pi t \sin 5\pi x - \dots \right)$$

$$13. \frac{4}{\pi^3} \left((4 - \pi) \cos \pi t \sin \pi x + \cos 2\pi t \sin 2\pi x + \frac{4 + 3\pi}{27} \cos 3\pi t \sin 3\pi x \right. \\ \left. + \frac{4 - 5\pi}{125} \cos 5\pi t \sin 5\pi x + \dots \right). \text{ Δεν υπάρχουν όροι με } n = 4, 8, 12, \dots$$

$$17. u = \frac{8L^2}{\pi^3} \left(\cos \left[c \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 t \right] \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^3} \cos \left[c \left(\frac{3\pi}{L} \right)^2 t \right] \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots \right)$$

19. $u(0, t) = 0$ (a) $u(L, t) = 0$, (c) $u_x(0, t) = 0$, (d) $u_x(L, t) = 0$. $C = -A$, $D = -B$ σύμφωνα με τα ερωτήματα (a), (c). Κάνετε αντικατάσταση. Η ορίζουσα των συντελεστών όπως προκύπτει από τα ερωτήματα b και d θα πρέπει να είναι μηδενική ώστε να υφίσταται μια μη τετριμμένη λύση. Έτσι, προκύπτει η $\{22\}$.

Προβλήματα εδαφίου 12.4, page 556

$$3. c^2 = 300/[0.9/(2 \cdot 9.80)] = 80.83^2 [\text{m}^2/\text{sec}^2]$$

$$9. \text{Ελλειπτική, } u = f_1(y + 2ix) + f_2(y - 2ix)$$

$$11. \text{Παραβολική, } u = xf_1(x - y) + f_2(x - y)$$

$$13. \text{Υπερβολική, } u = f_1(y - 4x) + f_2(y - x)$$

$$15. \text{Υπερβολική, } xy'^2 + yy' = 0, y = v, xy = w, u_w = z, u = \frac{1}{y} f_1(xy) + f_2(y)$$

17. Ελλειπτική, $\neq f_1(y - (2 - i)x) + f_2(y - (2 + i)x)$. Το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος κάθε συνάρτησης u αυτής της μορφής είναι λύσεις. Γιατί;

Προβλήματα εδαφίου 12.6, page 566

$$3. u_1 = \sin x e^{-t}, u_2 = \sin 2x e^{-4t}, u_3 = \sin 3x e^{-9t} \text{ διαφέρουν ως προς το ρυθμό μεταβολής}$$

$$5. u = \sin 0.1\pi x e^{-1.752\pi^2 t/100}$$

$$7. u = \frac{800}{\pi^3} \left(\sin 0.1\pi x e^{-0.01752\pi^2 t} + \frac{1}{3^3} \sin 0.3\pi x e^{-0.01752(3\pi)^2 t} + \dots \right)$$

9. $u = u_I + u_{II}$, όπου η $u_{II} = u - u_I$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες, ώστε

$$\text{να είναι } u_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-(cn\pi/L)^2 t}, B_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - u_I(x)] \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

$$11. F = A \cos px + B \sin px, F'(0) = Bp = 0, B = 0, F'(L) = -Ap \sin pL = 0, p = n\pi/L, \text{ κ.λπ.}$$

$$13. u = 1$$

$$15. \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left(\cos x e^{-t} + \frac{1}{9} \cos 3x e^{-9t} + \frac{1}{25} \cos 5x e^{-25t} + \dots \right)$$

$$17. -\frac{K\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n B_n e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$19. u = 1000 (\sin \frac{1}{2} \pi x \sinh \frac{1}{2} \pi y) / \sinh \pi$$

$$21. u = \frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \sinh(2n-1)\pi} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{24} \sinh \frac{(2n-1)\pi y}{24}$$

$$23. u = A_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sinh(n\pi x/24)}{\sinh n\pi} \cos \frac{n\pi y}{24},$$

$$A_0 = \frac{1}{24^2} \int_0^{24} f(y) dy, \quad A_n = \frac{1}{12} \int_0^{24} f(y) \cos \frac{n\pi y}{24} dy$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}, \quad A_n = \frac{2}{a \sinh(n\pi b/a)} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

Προβλήματα εδαφίου 12.7, page 574

$$3. A = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos pv}{1+v^2} dv = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-p}, \quad u = \int_0^{\infty} e^{-p-c^2 p^2 t} \cos px dp$$

$$5. A = \frac{2}{\pi} \int_0^1 v \cos pv dv = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos p + p \sin p - 1}{p^2}, \text{ etc.}$$

$$7. A = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v} \cos pv dv = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \text{ if } 0 < p < 1 \text{ and } 0 \text{ if } p > 1,$$

$$u = \int_0^1 \cos px e^{-c^2 p^2 t} dp$$

9. Θέτουμε $w = -v$ in (21) to get $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf} x$.

13. Στη {12}, το όρισμα $x + 2cz\sqrt{t}$ είναι 0 (το σημείο όπου η f κάνει άλμα) όταν $z = -x/(2c\sqrt{t})$. Έτσι προκύπτει το κάτω όριο ολοκλήρωσης.

15. Θέτουμε $w = s/\sqrt{2}$ στην (21).

Προβλήματα εδαφίου 12.9, page 584

1. (a), (b) Πολλαπλασιάζεται με $\sqrt{2}$. (c) Υποδιπλασιάζεται

5. $B_{mn} = (-1)^{n+1} 8/(mn\pi^2)$ αν το m είναι περιττός αριθμός, 0 αν το m είναι άρτιος αριθμός

7. $B_{mn} = (-1)^{m+n} 4ab/(mn\pi^2)$

11. $u = 0.1 \cos \sqrt{20}t \sin 2x \sin 4y$

$$13. \frac{6.4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m,n \text{ περιττός}}}^{\infty} \frac{1}{m^3 n^3} \cos(t\sqrt{m^2 + n^2}) \sin mx \sin ny$$

17. $c\pi\sqrt{260}$ (οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι $F_{4,16}$ και $F_{16,14}$), κ.λπ.

$$19. \cos\left(\pi t \sqrt{\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2}}\right) \sin \frac{6\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{b}$$

Προβλήματα εδαφίου 12.10, page 591

$$5. 110 + \frac{440}{\pi} (r \cos \theta - \frac{1}{3} r^3 \cos 3\theta + \frac{1}{5} r^5 \cos 5\theta - \dots)$$

$$7. 55\pi - \frac{440}{\pi} (r \cos \theta + \frac{1}{9} r^3 \cos 3\theta + \frac{1}{25} r^5 \cos 5\theta + \dots)$$

11. Να λύσετε το πρόβλημα στο δίσκο $r < a$ υπό τη δεδομένη u_0 στο άνω ημικύκλιο και τη $-u_0$ στο κάτω ημικύκλιο

$$u = \frac{4u_0}{\pi} \left(\frac{r}{a} \sin \theta + \frac{1}{3a^3} r^3 \sin 3\theta + \frac{1}{5a^5} r^5 \sin 5\theta + \dots \right)$$

13. Αύξηση κατά έναν παράγοντα $\sqrt{2}$ 15. $T = 6.826\rho R^2 f_1^2$

17. Όχι 25. $\alpha_{11}/(2\pi) = 0.6098$; βλ. Πίνακα A1 του Παραρτήματος 5

Προβλήματα εδαφίου 12.11, page 598

5. $A_4 = A_6 = A_8 = A_{10} = 0$, $A_5 = 605/16$, $A_7 = -4125/128$, $A_9 = 7315/256$

9. $\nabla^2 u = u'' + 2u'/r = 0$, $u''/u' = -2/r$, $\ln |u'| = -2 \ln |r| + c_1$,

$$u' = \tilde{c}/r^2, u = c/r + k$$

13. $u = 320/r + 60$ είναι μικρότερο από το δυναμικό του Προβλήματος 12 για $2 < r < 4$.

17. $u = 1$

19. $\cos 2\phi = 2 \cos^2 \phi - 1$, $2w^2 - 1 = \frac{4}{3}P_2(w) - \frac{1}{3}$, $u = \frac{4}{3}r^2 P_2(\cos \phi) - \frac{1}{3}$

25. Θετούμε $1/r = \rho$. Τότε $u(\rho, \theta, \phi) = rv(\rho, \theta, \phi)$, $u_\rho = (v + rv_\rho)(-1/\rho^2)$,

$$u_{\rho\rho} = (2v_\rho + rv_{\rho\rho})(1/\rho^4) + (v + rv_\rho)(2/\rho^3), u_{\rho\rho} + (2/\rho)u_\rho = r^5(v_{\rho\rho} + (2/r)v_\rho).$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση αυτή και την $u_{\phi\phi} = rv_{\phi\phi}$ κ.λπ. στην $\{7\}$, διατυπωμένης σε όρους της ρ , και διαιρούμε με r^5 .

Προβλήματα εδαφίου 12.12, page 602

5. $W = \frac{c(s)}{x^s} + \frac{x}{s^2(s+1)}$, $W(0, s) = 0$, $c(s) = 0$, $w(x, t) = x(t - 1 + e^{-t})$

7. $w = f(x)g(t)$, $xf'g + fg' = xt$, θέτουμε $f(x) = x$ ώστε να προκύψει $g = ce^{-t} + t - 1$ και $c = 1$ από την $w(x, 0) = x(c - 1) = 0$.

11. Set $x^2/(4c^2\tau) = z^2$. κ.λπ. στην $\{7\}$, διατυπωμένης σε όρους της ρ , και διαιρούμε με $\text{erf}(\infty) = 1$.

Chapter 12 Review Questions and Problems, page 603

17. $u = c_1(x)e^{-3y} + c_2(x)e^{2y} - 3$

19. Υπερβολική $f_1(x) + f_2(y + x)$

21. Υπερβολική, $f_1(y + 2x) + f_2(y - 2x)$ 23. $\frac{3}{4} \cos 2t \sin x - \frac{1}{4} \cos 6t \sin 3x$

25. $\sin 0.01\pi x e^{-0.001143t}$

27. $\frac{3}{4} \sin 0.01\pi x e^{-0.001143t} - \frac{1}{4} \sin 0.03\pi x e^{-0.01029t}$

29. $100 \cos 2x e^{-4t}$

39. $u = (u_1 - u_0)(\ln r)/\ln(r_1/r_0) + (u_0 \ln r_1 - u_1 \ln r_0)/\ln(r_1/r_0)$

Προβλήματα εδαφίου 13.1, page 612

1. $1/i = i/i^2 = -i$, $1/i^3 = i/i^4 = i$ 3. $4.8 - 1.4i$

5. $x - iy = -(x + iy)$, $x = 0$ 9. $-117, 4$

11. $-8 - 6i$ 13. $-120 - 40i$

15. $3 - i$ 17. $-4x^2y^2$

19. $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$, $2xy/(x^2 + y^2)$

Problem Set 13.2, page 618

1. $\sqrt{2} (\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi)$

3. $2(\cos \frac{1}{2}\pi + i \sin \frac{1}{2}\pi)$, $2(\cos \frac{1}{2}\pi - i \sin \frac{1}{2}\pi)$

5. $\frac{1}{2}(\cos \pi + i \sin \pi)$ 7. $\sqrt{1 + \frac{1}{4}\pi^2} (\cos \arctan \frac{1}{2}\pi + i \sin \arctan \frac{1}{2}\pi)$
 9. $3\pi/4$ 11. $\pm \arctan(\frac{4}{3}) = \pm 0.9273$
 13. -1024 . Απάντηση: $\pi^2 + 2i$ 15. $-3i$
 17. 21. $\sqrt[6]{2} (\cos \frac{1}{12}k\pi + i \sin \frac{1}{12}k\pi)$, $k = 1, 9, 17$
 23. 6, $-3 \pm 3\sqrt{3}i$
 25. $\cos(\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi) + i \sin(\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi)$, $k = 0, 1, 2, 3$
 27. $\cos \frac{1}{5}\pi \pm i \sin \frac{1}{5}\pi$, $\cos \frac{3}{5}\pi \pm i \sin \frac{3}{5}\pi$, -1
 29. i , $-1 - i$ 31. $\pm(1 - i)$, $\pm(2 + 2i)$
 33. $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$. Πολλαπλασιάζουμε και χρησιμοποιούμε τη σχέση $\operatorname{Re} z_1\bar{z}_2 \pm |z_1\bar{z}_2|$ (βλ. Πρόβλημα 34).
 $z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re} z_1\bar{z}_2 + |z_2|^2 \pm |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$. Επομένως $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$.
 Θεωρώντας τις ρίζες των δύο μελών προκύπτει η $\{6\}$.
 35. $[(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2] + [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] = 2(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)$

Προβλήματα εδαφίου 13.3, page 624

1. Κλειστός δίσκος με κέντρο $-1 + 5i$, και ακτίνα $\frac{3}{2}$
 3. Δακτύλιος με κέντρο $4 - 2i$, κι ακτίνες π και 3π
 5. Τομέας ανάμεσα στις ευθείες ευθείες γραμμές του πρώτου τεταρτημορίου και του τέταρτου τεταρτημορίου.
 7. Μισό επίπεδο που εκτείνεται από την κατακόρυφη ευθεία $x = -1$ και προς τα δεξιά
 11. $u(x, y) = (1 - x)/((1 - x)^2 + y^2)$, $u(1, -1) = 0$,
 $v(x, y) = y/((1 - x)^2 + y^2)$, $v(1, -1) = -1$
 15. Ναι, δεδομένου ότι $\operatorname{Im}(|z|^2/z) = \operatorname{Im}(|z|^2\bar{z}/(z\bar{z})) = \operatorname{Im} \bar{z} = -r \sin \theta \rightarrow 0$.
 17. Ναι, επειδή $\operatorname{Re} z = r \cos \theta \rightarrow 0$ και $1 - |z| \rightarrow 1$ όπως $r \rightarrow 0$.
 19. $f'(z) = 8(z - 4i)^7$. Τώρα $z - 4i = 3$, εξ ου και $f'(3 + 4i) = 8 \cdot 3^7 = 17,496$.
 21. $n(1 - z)^{-n-1}i$, ni 23. $3iz^2/(z + i)^4$, $-3i/16$

Προβλήματα εδαφίου 13.4, page 629

1. $r_x = x/r = \cos \theta$, $r_y = \sin \theta$, $\theta_x = -(\sin \theta)/r$, $\theta_y = (\cos \theta)/r$
 (a) $0 = u_x - v_y = u_r \cos \theta + u_\theta(-\sin \theta)/r - v_r \sin \theta - v_\theta(\cos \theta)/r$
 (b) $0 = u_y + v_x = u_r \sin \theta + u_\theta(\cos \theta)/r + v_r \cos \theta + v_\theta(-\sin \theta)/r$
 Πολλαπλασιάζουμε (a) με $\cos \theta$, (b) με $\sin \theta$ και προσθέτουμε. Κ.λπ.
 3. Ναι 5. Όχι, $f(z) = (\bar{z}^2)$
 7. Ναι, όταν $z \neq 0$. Use (7). 9. Ναι, όταν $z \neq 0$, $-2\pi i$, $2\pi i$
 11. Yes 13. $f(z) = -\frac{1}{2}i(z^2 + c)$, c real
 15. $f(z) = 1/z + c$ (c real) 17. $f(z) = z^2 + z + c$ (c real)
 19. No 21. $a = \pi$, $v = e^{\pi x} \sin \pi y$
 23. $a = 0$, $v = \frac{1}{2}b(y^2 - x^2) + c$ 27. $f = u + iv$ συνεπάγεται $if = -v + iu$.
 29. Θέτουμε (4), (5), και (1).

Προβλήματα εδαφίου 13.5, page 632

3. $e^{2\pi i} e^{-2\pi} = e^{-2\pi} = 0.001867$ 5. $e^2(-1) = -7.389$
 7. $e^{\sqrt{2}i} = 4.113i$ 9. $5e^{i \arctan(3/4)} = 5e^{0.644i}$
 11. $6.3e^{\pi i}$ 13. $\sqrt{2}e^{\pi i/4}$

15. $\exp(x^2 - y^2) \cos 2xy, \exp(x^2 - y^2) \sin 2xy$
 17. $\operatorname{Re}(\exp(z^3)) = \exp(x^3 - 3xy^2) \cos(3x^2y - y^3)$
 19. $z = 2n\pi i, n = 0, 1, \dots$

Προβλήματα εδαφίου 13.6, page 636

1. Χρησιμοποιούμε την $\{11\}$, ύστερα την $\{5\}$ για την e^{iy} και απλοποιούμε
 7. $\cosh 1 = 1.543, i \sinh 1 = 1.175i$ 9. $\text{Both } -0.642 - 1.069i$. Why?
 11. $i \sinh \pi = 11.55i$, both
 15. Αντικαθιστούμε τους ορισμούς στο αριστερό μέλος, πολλαπλασιάζουμε και απλοποιούμε.
 17. $z = \pm(2n + 1)i/2$ 19. $z = \pm n\pi i$

Προβλήματα εδαφίου 13.7, page 640

5. $\ln 11 + \pi i$ 7. $\frac{1}{2} \ln 32 - \pi i/4 = 1.733 - 0.785i$
 9. $i \arctan(0.8/0.6) = 0.927i$ 11. $\ln e + \pi i/2 = 1 + \pi i/2$
 13. $\pm 2n\pi i, n = 0, 1, \dots$
 15. $\ln |e^i| + i \arctan \frac{\sin 1}{\cos 1} \pm 2n\pi i = 0 + i + 2n\pi i, n = 0, 1, \dots$
 17. $\ln(i^2) = \ln(-1) = (1 \pm 2n)\pi i, 2 \ln i = (1 \pm 4n)\pi i, n = 0, 1, \dots$
 19. $e^{4-3i} = e^4(\cos 3 - i \sin 3) = -54.05 - 7.70i$
 21. $e^{0.6} e^{0.4i} = e^{0.6}(\cos 0.4 + i \sin 0.4) = 1.678 + 0.710i$
 23. $e^{(1-i) \operatorname{Ln}(1+i)} = e^{\ln\sqrt{2} + \pi i/4 - i \ln\sqrt{2} + \pi/4} = 2.8079 + 1.3179i$
 25. $e^{(3-i) \operatorname{Ln}(3+i)} = 27e^\pi(\cos(3\pi - \ln 3) + i \sin(3\pi - \ln 3)) = -284.2 + 556.4i$
 27. $e^{(2-i) \operatorname{Ln}(-1)} = e^{(2-i)\pi i} = e^\pi = 23.14$

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 13, page 641

1. $2 - 3i$ 3. $27.46e^{0.9929i}, 7.616e^{1.976i}$
 11. $-5 + 12i$ 13. $0.16 - 0.12i$
 15. i 17. $4\sqrt{2}e^{-3\pi i/4}$
 19. $15e^{-\pi i/2}$ 21. $\pm 3, \pm 3i$
 23. $(\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}$ 25. $f(z) = -iz^2/2$
 27. $f(z) = e^{-2z}$ 29. $f(z) = e^{-z^2/2}$
 31. $\cos 3 \cosh 1 + i \sin 3 \sinh 1 = -1.528 + 0.166i$
 33. $i \tanh 1 = 0.7616i$
 35. $\cosh \pi \cos \pi + i \sinh \pi \sin \pi = -11.592$

Προβλήματα εδαφίου 14.1, page 651

1. Ευθύγραμμο τμήμα από $(2, 1)$ έως $(5, 2.5)$.
 3. Παραβολή $y = x^2$ από $(1, 2)$ έως $(2, 8)$.
 5. Κύκλος που διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$, με κέντρο $(3, -1)$, ακτίνα $\sqrt{10}$, με φορά ρολογιού.
 7. Ημικύκλιο με κέντρο 2 και ακτίνα 4.
 9. Κυβική παραβολή $y = x^3$ ($-2 \leq x \leq 2$)
 11. $z(t) = t + (2 + t)i$ ($-1 \leq t \leq 1$)
 13. $z(t) = 2 - i + 2e^{it}$ ($0 \leq t \leq \pi$)

15. $z(t) = 2 \cosh t + i \sinh t$ ($-\infty < t < \infty$)
 17. Κύκλος $z(t) = -a - ib + re^{-it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)
 19. $z(t) = t + (1 - \frac{1}{4}t^2)i$ ($-2 \leq t \leq 2$)
 21. $z(t) = (1 + i)t$ ($1 \leq t \leq 3$), $\operatorname{Re} z = t$, $z'(t) = 1 + i$. *Απάντηση:* $4 + 4i$
 23. $e^{2\pi i} - e^{\pi i} = 1 - (-1) = 2$
 25. $\frac{1}{2} \exp z^2 \Big|_1^i = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^1) = -\sinh 1$
 27. $\tan \frac{1}{4}\pi i - \tan \frac{1}{4} = i \tanh \frac{1}{4} - 1$
 29. $\operatorname{Im} z^2 = 2xy = 0$ επί των αξόνων $z = 1 + (-1 + i)t$ ($0 \leq t \leq 1$),
 $(\operatorname{Im} z^2) \dot{z} = 2(1 - t)y(-1 + i)$ με ολοκλήρωση: $(-1 + i)/3$.
 35. $|\operatorname{Re} z| = |x| \leq 3 = M$ on C , $L = \sqrt{8}$

Προβλήματα εδαφίου 14.2, page 659

1. Εργαζόμαστε με τη $\{12\}$ του εδαφίου 14.1 για $m = 2$. 3. Ναι 5. 5
 7. (a) Ναι. (b) Όχι, θα έπρεπε να μετακινήσουμε τη διαδρομή κατά $\pm 2i$.
 9. 0, ναι 11. πi , no
 13. 0, ναι 15. $-\pi$, no
 17. 0, όχι 19. 0, ναι
 21. $2\pi i$ 23. $1/z + 1/(z - 1)$, hence $2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$.
 25. 0 (γιατί;) 27. 0 (γιατί;)
 29. 0

Προβλήματα εδαφίου 14.3, page 663

1. $2\pi i z^2/(z - 1) \Big|_{z=-1} = -\pi i$ 3. 0
 5. $2\pi i (\cos 3z)/6 \Big|_{z=0} = \pi i/3$ 7. $2\pi i (i/2)^3/2 = \pi/8$
 11. $2\pi i \cdot \frac{1}{z + 2i} \Big|_{z=2i} = \frac{\pi}{2}$ 13. $2\pi i (z + 2) \Big|_{z=2} = 8\pi i$
 15. $2\pi i \cosh(-\pi^2 - \pi i) = -2\pi i \cosh \pi^2 = -60,739i$ αφού $\cosh \pi i = \cos \pi = -1$
 και $\sinh \pi i = i \sin \pi = 0$.
 17. $2\pi i \frac{\operatorname{Ln}(z + 1)}{z + i} \Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{\operatorname{Ln}(1 + i)}{2i} = \pi(\ln \sqrt{2} + i\pi/4) = 1.089 + 2.467i$
 19. $2\pi i e^{2i}/(2i) = \pi e^{2i}$

Προβλήματα εδαφίου 14.4, page 667

1. $(2\pi i/3!)(-\cos 0) = -\pi i/3$ 3. $(2\pi i/(n - 1)!)e^0$
 5. $\frac{2\pi i}{3!} (\cosh 2z)''' = \frac{\pi i}{3} \cdot 8 \sinh 1 = 9.845i$
 7. $(2\pi i/(2n)!) (\cos z)^{(2n)} \Big|_{z=0} = (2\pi i/(2n)!)(-1)^n \cos 0 = (-1)^n 2\pi i/(2n)!$
 9. $-2\pi i (\tan \pi z)' \Big|_{z=0} = \frac{-2\pi i \cdot \pi}{\cos^2 \pi z} \Big|_{z=0} = -2\pi^2 i$
 11. $\frac{2\pi i}{4} ((1 + z)\sin z)' \Big|_{z=1/2} = \frac{1}{2} \pi i (\sin z + (1 + z) \cos z) \Big|_{z=1/2}$
 $= \frac{1}{2} \pi i (\sin \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos \frac{1}{2})$
 $= 2.821i$

$$13. 2\pi i \cdot \frac{1}{z} \Big|_{z=2} = \pi i$$

$$15. 0. \text{ Why?}$$

17. 0 βάσει του θεωρήματος ολοκλήρωσης Cauchy για μια διπλά συνεκτική περιοχή, όπως προκύπτει από την $\{6\}$ του εδαφίου 14.2

$$19. (2\pi i/2!)4^{-3}(e^{3z})''|_{z=\pi i/4} = -9\pi(1+i)/(64\sqrt{2})$$

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 14, page 668

$$21. \frac{1}{2} \cosh\left(-\frac{1}{4}\pi^2\right) - \frac{1}{2} = 2.469$$

$$23. 2\pi i(e^z)^{(4)}|_{z=0} = ie^z/12|_{z=0} = \pi i/12 \text{ βάσει της ολοκληρωματικής εξίσωσης Cauchy}$$

$$25. -2\pi i(\tan \pi z)'|_{z=1} = -2\pi^2 i/\cos^2 \pi z|_{z=1} = -2\pi^2 i$$

$$27. 0 \text{ αφού } z^2 + \bar{z} - 2 = 2(x^2 - y^2) \text{ και } y = x$$

$$29. -4\pi i$$

Προβλήματα εδαφίου 15.1, page 679

$$1. z_n = (2i/2)^n; \text{ φραγμένη, αποκλίνουσα } \pm 1, \pm i$$

$$3. z_n = -\frac{1}{2}\pi i/(1 + 2/(ni)) \text{ συγκλίνει στην τιμή } -\pi i/2$$

$$5. \text{ Φραγμένη, αποκλίνουσα, } \pm 1 + 10i$$

$$7. \text{ Μη φραγμένη, συνεπώς αποκλίνουσα.}$$

$$9. \text{ Συγκλίνει στο } 0, \text{ συνεπώς είναι φραγμένη}$$

$$17. \text{ Αποκλίνουσα. Να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα } 1/n n > 1/n.$$

$$19. \text{ Συγκλίνουσα. Να χρησιμοποιήσετε τη σειρά } \sum 1/n^2. \quad 21. \text{ Συγκλίνουσα}$$

$$23. \text{ Συγκλίνουσα} \quad 25. \text{ Αποκλίνουσα}$$

29. Βάσει της απόλυτης σύγκλισης και της αρχής σύγκλισης του Cauchy, για ένα δεδομένο $\epsilon > 0$ θα είναι για κάθε $n > N(\epsilon)$ και $p = 1, 2, \dots$

$$|z_{n+1}| + \dots + |z_{n+p}| < \epsilon,$$

επομένως $|z_{n+1} + \dots + z_{n+p}| < \epsilon$ βάσει της Εξίσωσης $\{6^*\}$ του εδαφίου 13.2,

επομένως η σύγκλιση συνάγεται από την αρχή του Cauchy.

Προβλήματα εδαφίου 15.2, page 684

$$1. \text{ Όχι. Μη αρνητικές ακέραιες δυνάμεις του } z \text{ (ή του } z - z_0) \text{ μόνο!}$$

$$3. \text{ Επί του κέντρου, εντός ενός δίσκου, σε όλο το επίπεδο.}$$

$$5. \sum a_n z^{2n} = \sum a_n (z^2)^n, \quad |z^2| < R = \lim |a_n/a_{n+1}|; \text{ επομένως } |z| < \sqrt{R}.$$

$$7. \pi/2, \infty \quad 9. i, \sqrt{3} \quad 11. 0, \sqrt{\frac{26}{5}}$$

$$13. -i, \frac{1}{2} \quad 15. 2i, 1 \quad 17. 1/\sqrt{2}$$

Προβλήματα εδαφίου 15.3, page 689

$$3. f = \sqrt[n]{n}. \text{ Εφαρμόζουμε τον κανόνα l' Hopital στη συνάρτηση. } \ln f = (\ln n)/n$$

$$5. 2 \quad 7. \sqrt{3} \quad 9. 1/\sqrt{2}$$

$$11. \sqrt{\frac{7}{3}} \quad 13. 1 \quad 15. \frac{3}{4}$$

Προβλήματα εδαφίου 15.4, page 697

$$3. 2z^2 - \frac{(2z^2)^3}{3!} + \dots = 2z^2 - \frac{4}{3}z^6 + \frac{4}{15}z^{10} - \dots, \quad R = \infty$$

$$5. \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{8}z^8 - \frac{1}{16}z^{12} + \frac{1}{32}z^{16} - + \dots, \quad R = \sqrt[4]{2}$$

$$7. \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos z = 1 - \frac{1}{2 \cdot 2!} z^2 + \frac{1}{2 \cdot 4!} z^4 - \frac{1}{2 \cdot 6!} z^6 + - \dots, \quad R = \infty$$

$$9. \int_0^z \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 - + \dots \right) dt = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{40}z^5 - + \dots, \quad R = \infty$$

$$11. z^3/(1!3) - z^7/(3!7) + z^{11}/(5!11) - + \dots, \quad R = \infty$$

$$13. (2/\sqrt{\pi})(z - z^3/3 + z^5/(2!5) - z^7/(3!7) + \dots), \quad R = \infty$$

$$17. \text{Ομαδική εργασία. (a) } (\ln(1+z))' = 1 - z + z^2 - + \dots = 1/(1+z).$$

(c) Να εργαστείτε με βάση το γεγονός ότι οι όροι της παράστασης $(\sin iy)/(iy)$

είναι όλοι θετικοί, επομένως το άθροισμα δε μπορεί να είναι μηδενικό.

$$19. \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i(z-i) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)(z-i)^2 - \frac{1}{4}(z-i)^3 + \dots, \quad R = \sqrt{2}$$

$$21. 1 - \frac{1}{2!} \left(z - \frac{1}{2}\pi \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(z - \frac{1}{2}\pi \right)^4 - \frac{1}{6!} \left(z - \frac{1}{2}\pi \right)^6 + - \dots, \quad R = \infty$$

$$23. -\frac{1}{4} - \frac{2}{8}i(z-i) + \frac{3}{16}(z-i)^2 + \frac{4}{32}i(z-i)^3 - \frac{5}{64}(z-i)^4 + \dots, \quad R = 2$$

$$25. 2 \left(z - \frac{1}{2}i \right) + \frac{2^3}{3!} \left(z - \frac{1}{2}i \right)^3 + \frac{2^5}{5!} \left(z - \frac{1}{2}i \right)^5 + \dots, \quad R = \infty$$

Προβλήματα εδαφίου, page 704

$$3. |z+i| \leq \sqrt{3} - \delta, \quad \delta > 0$$

$$5. |z + \frac{1}{2}i| \leq \frac{1}{4} - \delta, \quad \delta > 0$$

7. Πουθενά

$$9. |z - 2i| \leq 2 - \delta, \quad \delta > 0$$

11. $|z^n| \leq 1$ και $\sum 1/n^2$ συγκλίνει. Να εργαστείτε με το Θεώρημα 5.

13. $|\sin^n z| \leq 1$ για κάθε z , και $\sum 1/n^2$ συγκλίνει. Να εργαστείτε με το Θεώρημα 5.

15. $R = 4$ σύμφωνα με το Θεώρημα 2 του εδαφίου 15.2. Να εργαστείτε με το Θεώρημα 1.

17. $R = 1/\sqrt{\pi} > 0.56$; Να εργαστείτε με το Θεώρημα 1.

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 15, page 706

$$11. 1$$

$$13. 3$$

$$15. \frac{1}{2}$$

$$17. \infty, \quad e^{2z}$$

$$19. \infty, \quad \cosh \sqrt{z}$$

$$21. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(2n+1)!}, \quad R = \infty$$

$$23. \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2z = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2z)^{2n}, \quad R = \infty$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} z^{2n-2}, \quad R = \infty$$

$$27. \cos \left[\left(z - \frac{1}{2}\pi \right) + \frac{1}{2}\pi \right] = -\left(z - \frac{1}{2}\pi \right) + \frac{1}{6} \left(z - \frac{1}{2}\pi \right)^3 - + \dots = -\sin \left(z - \frac{1}{2}\pi \right)$$

$$29. \ln 3 + \frac{1}{3}(z-3) - \frac{1}{2 \cdot 9}(z-3)^2 + \frac{1}{3 \cdot 27}(z-3)^3 - + \dots, \quad R = 3$$

Προβλήματα εδαφίου 16.1, page 714

1. $z^{-4} - \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720}z^2 + \dots, \quad 0 < |z| < \infty$
3. $z^{-3} + z^{-1} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^5 + \dots, \quad 0 < |z| < \infty$
5. $z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2 + \dots, \quad 0 < |z| < 1$
7. $z^3 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{24}z^{-1} + \frac{1}{720}z^3 + \dots, \quad 0 < |z| < \infty$
9. $\exp[1 + (z-1)](z-1)^{-2} = e \cdot [(z-1)^{-2} + (z-1)^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(z-1) + \dots],$
 $0 < |z-1| < \infty$
11. $\frac{[\pi i + (z - \pi i)]^2}{(z - \pi i)^4} = \frac{(\pi i)^2}{(z - \pi i)^4} + \frac{2\pi i}{(z - \pi i)^3} + \frac{1}{(z - \pi i)^2}$
13. $i^{-3} \left(1 + \frac{z-i}{i}\right)^{-3} (z-i)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} i^{-3-n} (z-i)^{n-2} = i(z-i)^{-2}$
 $-3(z-i)^{-1} - 6i + 10(z-i) + \dots, \quad 0 < |z-i| < 1$
15. $(-\cos(z-\pi))(z-\pi)^{-2} = -(z-\pi)^{-2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{24}(z-\pi)^2 + \dots,$
 $0 < |z-\pi| < \infty$
19. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}, \quad |z| < 1, \quad -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+2}}, \quad |z| > 1$
21. $-(z + \frac{1}{2}\pi)^{-1} \cos(z + \frac{1}{2}\pi) = -(z + \frac{1}{2}\pi)^{-1} + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{2}\pi) - \frac{1}{24}(z + \frac{1}{2}\pi)^3 + \dots,$
 $|z + \frac{1}{2}\pi| > 0$
23. $z^8 + z^{12} + z^{16} + \dots, \quad |z| < 1, \quad -z^4 - 1 - z^{-4} - z^{-8} - \dots, \quad |z| > 1$
25. $\frac{i}{(z-i)^2} + \frac{1}{z-i} + i + (z-i)$

Προβλήματα εδαφίου 16.2, page 719

1. $0 \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, 4ης τάξης
3. $-81i$, 4ης τάξης
5. $\pm 1, \pm 2, \dots$, 2ης τάξης
7. $\pm(2 + 2i), \pm i$, απλός
9. $\frac{1}{2} \sin 4z, z = 0, \pm \pi/4, \pm \pi/2, \dots$, απλός
11. $f(z) = (z - z_0)^n g(z), g(z_0) \neq 0$, επομένως $f^2(z) = (z - z_0)^{2n} g^2(z)$.
13. Πόλοι 2ης τάξης στα σημεία i και $-2i$
15. Απλός πόλος στο ∞ , ουσιώδες ανώμαλο σημείο στη θέση $1 + i$
17. Πόλοι 4ης τάξης στα σημεία $\pm n\pi i, n = 0, 1, \dots$, ουσιώδες ανώμαλο σημείο στο ∞
19. $e^z(1 - e^z) = 0, e^z = 1, z = \pm 2n\pi i$ απλά μηδενικά. *Απάντηση:* απλοί πόλοι στα σημεία $\pm 2n\pi i$, ουσιώδες ανώμαλο σημείο στο ∞
21. $1, \infty$ ουσιώδη ανώμαλα σημεία $\pm 2n\pi i, n = 0, 1, \dots$, απλοί πόλοι

Προβλήματα εδαφίου 16.3, page 725

3. $\frac{4}{15}$ στις θέσεις 0
5. $\pm 4i$ στις θέσεις $\mp i$
7. $1/\pi$ στις θέσεις 0, $\pm 1, \dots$
9. -1 στις θέσεις $\pm 2n\pi i$
11. $(e^z)''/2!|_{z=\pi i} = -\frac{1}{2}$ at $z = \pi i$
15. Απλός πόλος στο $\frac{1}{4}$ εντός της C , υπόλοιπο $-1/(2\pi)$. *Απάντηση:* $-i$
17. Απλοί πόλοι στο $\pi/2$, υπόλοιπο $e^{\pi/2}/(-\sin \pi/2)$, και στο $-\pi/2$,
 $e^{-\pi/2}/\sin \pi/2 = e^{-\pi/2}$. *Απάντηση:* $-4\pi i \sinh \pi/2$
19. $2\pi i (\sinh \frac{1}{2}i)/2 = -\pi \sin \frac{1}{2}$
21. $z^{-5} \cos \pi z = \dots + \pi^4/(4!z) - \dots$. *Απάντηση:* $2\pi^5 i/24$

23. Υπόλοιπα $\frac{1}{2}$ at $z = \frac{1}{2}$, 2 at $z = \frac{1}{3}$ -Απάντηση: $5\pi i$
25. Απλοί πόλοι εντός της C στα σημεία $2i, -2i, 3i, -3i$, υπόλοιπα $(2i \cosh 2i)/(4z^3 + 26z)|_{z=2i} = \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}$, respectively. Απάντηση: $2\pi i \cdot \frac{4}{10}$

Προβλήματα εδαφίου 16.4, page 733

1. $2\pi/\sqrt{k^2 - 1}$ 3. $\pi/\sqrt{2}$
5. $5\pi/12$ 7. $2a\pi/\sqrt{a^2 - 1}$
9. 0. Γιατί; (να κατασκευάσετε ένα σχήμα) 11. $\pi/2$
13. 0. Γιατί; 15. $\pi/3$
17. 0. Γιατί;
19. Απλοί πόλοι στα σημεία $\pm 1, i$ (και $-i$); $2\pi i \cdot \frac{1}{4}i + \pi i(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}\pi$
21. Απλοί πόλοι στα σημεία 1 και $\pm 2\pi i$, υπόλοιπα i και $-i$. Απάντηση: $\frac{\pi}{5}(\cos 1 - e^{-2})$
23. $-\pi/2$ 25. 0
27. Let $q(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_k)$. Εργαζόμαστε με την $\{4\}$ του εδαφίου 16.3 για να διατυπώσουμε το άθροισμα των υπολοίπων $1/q'(a_1) + \cdots + 1/q'(a_k)$ και δείχνουμε ότι το άθροισμα αυτό είναι μηδενικό. Εδώ είναι $k > 1$.

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 16, page 733

11. $6\pi i$ 13. $2\pi i(-10 - 10)$
15. $2\pi i(25z^2)'|_{z=5} = 500\pi i$ 17. 0 (n άρτιο), $(-1)^{(n-1)/2} 2\pi i/(n-1)!$ (n περιττό)
19. $\pi/6$ 21. $\pi/60$
23. 0. Γιατί; 25. $\operatorname{Res}_{z=i} e^{iz}/(z^2 + 1) = 1/(2ie)$. Απάντηση: π/e .

Προβλήματα εδαφίου 17.1, page 741

5. Μόνο κτά μέγεθος
7. $x = c, w = -y + ic; y = k, w = -k + ix$
9. Παράλληλη μεταφορά: κάθε σημείο μετακινείται κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 1 μονάδα προς τα πάνω
11. $|w| \leq \frac{1}{4}, -\pi/4 < \operatorname{Arg} w < \pi/4$ 13. $-5 \leq \operatorname{Re} z \leq -2$
15. $u \geq 1$ 17. Δακτύλιος $\frac{1}{2} \leq |w| \leq 4$
19. $0 < u < \ln 4, \pi/4 < v \leq 3\pi/4$
21. $z^3 + az^2 + bz + c, z = -\frac{1}{3}(a \pm \sqrt{a^2 - 3b})$
23. $z = (-1 \pm \sqrt{3})/2$
25. $\sinh z = 0$ στο σημείο $z = 0, \pm \pi i, \pm 2\pi i, \dots$
29. $M = |z| = 1$ επί του μοναδιαίου κύκλου, $J = |z|^2$
31. $|w'| = 1/|z|^2 = 1$ επί του μοναδιαίου κύκλου, $J = 1/|z|^4$
33. $M = e^x = 1$ για $x = 0$, y άξονα, $J = e^{2x}$
35. $M = 1/|z| = 1$ επί του μοναδιαίου κύκλου, $J = 1/|z|^2$

Προβλήματα εδαφίου 17.2, page 745

7. $z = \frac{w + i}{2w}$ 9. $z = \frac{4w + i}{-3iw + 1}$
11. $z = 0, 1/(a + ib)$ 13. $z = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \pm i/2$

$$15. z = i, 2i \quad 17. w = \frac{az}{cz + a} \quad 19. w = \frac{az + b}{-bz + a}$$

Προβλήματα εδαφίου 17.3, page 750

3. Να εφαρμόσετε την αντίστροφη συνάρτηση της f , g , σε αμφότερα τα μέλη της

$$z_1 = f(z_1) \text{ ώστε να καταλήξετε στο αποτέλεσμα } g(z_1) = g(f(z_1)) = z_1.$$

$$\begin{array}{ll} 9. w = iz, \text{ στροφή. Κατασκευάστε ένα σχήμα} & 11. w = (z + i)/(z - i) \\ 13. w = 1/z, \text{ όπως προκύπτει δια της παρατήρησης} & 15. w = 1/z - 1 \\ 17. w = (2z - i)/(-iz - 2) & 19. w = (z^4 - i)(-iz^4 + 1) \end{array}$$

Προβλήματα εδαφίου 17.4, page 754

1. Κύκλος $|w| = e^c$
3. Δακτύλιος $1/\sqrt{e} \leq |w| \leq \sqrt{e}$
5. Το επίπεδο w χωρίς το σημείο $w = 0$
7. $1 < |w| < e, v > 0$
9. $\pm(2n + 1)\pi/2, n = 0, 1, \dots$
11. $u^2/\cosh^2 2 + v^2/\sinh^2 2 < 1, u > 0, v > 0$
13. Ελλειπτικός δακτύλιος που ορίζεται από τις ελλείψεις $u^2/\cosh^2 1 + v^2/\sinh^2 1 = 1$ και $u^2/\cosh^2 3 + v^2/\sinh^2 3 = 1$
15. $\cosh z = \cos iz = \sin(iz + \frac{1}{2}\pi)$
17. $0 < \text{Im } t < \pi$ είναι η εικόνα της R υπό την απεικόνιση $t = z^2/2$. Απάντηση: $e^t = e^{z^2/2}$.
19. Υπερβολές $u^2/\cos^2 c - v^2/\sin^2 c = \cosh^2 c - \sinh^2 c = 1$ όταν $c \neq 0, \pi$, και $u = \pm \cosh y$ (επομένως $|u| \geq 1$), $v = 0$ όταν $c = 0, \pi$.
21. Το εσωτερικό της καμπύλης $u^2/\cosh^2 2 + v^2/\sinh^2 2 = 1$ στο 4ο τεταρτημόριο. Ειδικά, απεικόνιση της περιοχής $\pi/2 < x < \pi, 0 < y < 2$ με τη συνάρτηση $w = \sin z$ (γιατί;).
23. $v < 0$
25. Οι εικόνες των 5 σημείων τους σχήματος προκύπτουν άμεσα από τη συνάρτηση w .

Προβλήματα εδαφίου 17.5, page 756

1. Η w κινείται μια φορά κατά μήκος του κύκλου $|w| = \frac{1}{2}$.
3. Τέσσερα φύλλα, κλάδος στη θέση $z = -1$
5. $-i/4, 3$ φύλλα
7. z_0, n φύλλα
9. $\sqrt{z(z - i)(z + i)}, 0, \pm i, 2$ φύλλα

Επαναληπτικά Προβλήματα του Κεφαλαίου 17, page 756

11. $1 < |w| < 4, |\arg w| < \pi/4$
13. Η οριζόντια λωρίδα $-8 < v < 8$
15. $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$, το ίδιο (γιατί;)
17. $|w| > 1$
19. $\frac{1}{3} < |w| < \frac{1}{2}, v < 0$
21. $w = 1 + iv, v < 0$
23. $w = \frac{10z + 5i}{z + 2i}$
25. Στροφή $w = iz$
27. $w = 1/z$
29. $z = 0$
31. $z = 2 \pm \sqrt{6}$
33. $z = 0, \pm i, \pm 3i$
35. $w = e^{4z}$
37. $w = iz^2 + 1$
39. $w = z^2/(2c)$

Προβλήματα εδαφίου 18.1, page 762

1. $2.5 \text{ mm} = 0.25 \text{ cm}; \quad \Phi = \operatorname{Re} 110(1 + (\operatorname{Ln} z)/\ln 4)$
3. $\Phi = \operatorname{Re} \left(30 - \frac{20}{\ln 10} \operatorname{Ln} z \right)$
5. $\Phi(x) = \operatorname{Re} (375 + 25z)$
7. $\Phi(r) = \operatorname{Re} (32 - z)$
13. Να εργαστείτε με την Εικόνα 391, εναλλάσσοντας τα επίπεδα w και z και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\cos z = \sin(z + \frac{1}{2}\pi)$.
15. $\Phi = 220(x^3 - 3xy^2) = \operatorname{Re} (220z^3)$

Προβλήματα εδαφίου 18.2, page 766

3. $w = iz^2$ απεικονίζει την R στη λωρίδα $-2 \leq u \leq 0$; και $\Phi^* = U_2 + (U_1 - U_2)(1 + \frac{1}{2}u) = U_2 + (U_1 - U_2)(1 - xy)$.
5. (a) $\frac{(x-2)(2x-1) + 2y^2}{(x-2)^2 + y^2} = c$, (b) $x^2 - y^2 = c$, $xy = c$, $e^x \cos y = c$
7. βλ. Εικόνα 392. $\Phi = \operatorname{Re} (\sin^2 z)$, $\sin^2 x (y=0)$, $\sin^2 x \cosh^2 1 - \cos^2 x \sinh^2 1 (y=1)$, $-\sinh^2 y (x=0, \pi)$.
9. $\Phi(x, y) = \cos^2 x \cosh^2 y - \sin^2 x \sinh^2 y$; $\cosh^2 y (x=0)$, $-\sinh y (x = \frac{\pi}{2})$, $\cos^2 x (y=0)$, $\cos^2 x \cosh^2 1 - \sin^2 x \sinh^2 1 (y=1)$
13. Οι αντίστοιχες ακτίνες στο επίπεδο w σχηματίζουν ίσες γωνίες και η απεικόνιση είναι σύμμορφη.
15. Να εφαρμόσετε τη συνάρτηση $w = z^2$.
17. $z = (2Z - i)/(-iZ - 2)$ σύμφωνα με την {3} του εδαφίου Π.3
19. $\Phi = \frac{5}{\pi} \operatorname{Arg} (z - 2)$, $F = -\frac{5i}{\pi} \operatorname{Ln} (z - 2)$

Προβλήματα εδαφίου 18.3, page 769

1. $(80/d)y + 20$. Στροφή κατά $\pi/2$.
5. $\frac{80}{\pi} \arctan \frac{y}{x} = \operatorname{Re} \left(-\frac{80i}{\pi} \operatorname{Ln} z \right)$
7. $T_1 + \frac{2}{\pi} (T_2 - T_1) \arctan \frac{y}{x} = \operatorname{Re} \left(T_1 - \frac{2i}{\pi} (T_2 - T_1) \operatorname{Ln} z \right)$
9. $\frac{T_1}{\pi} \left(\arctan \frac{y}{x-b} - \arctan \frac{y}{x-a} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{iT_1}{\pi} \operatorname{Ln} \frac{z-a}{z-b} \right)$
11. $\frac{100}{\pi} (\operatorname{Arg} (z-1) - \operatorname{Arg} (z+1)) = \operatorname{Re} \left(\frac{100i}{\pi} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1} \right)$
13. $\frac{100}{\pi} [\operatorname{Arg} (z^2 - 1) - \operatorname{Arg} (z^2 + 1)]$ από τη σχέση $w = z^2$ και το Πρόβλημα 11.
15. $-20 + (320/\pi) \operatorname{Arg} z = \operatorname{Re} \left(-20 - \frac{320i}{\pi} \operatorname{Ln} z \right)$
17. $\operatorname{Re} F(z) = 100 + (200/\pi) \operatorname{Re} (\arcsin z)$

Προβλήματα εδαφίου 18.4, page 776

1. $V(z)$ συνεχώς παραγωγίσιμη.
3. $|F'(iy)| = 1 + 1/y^2$, $|y| \geq 1$, μέγιστη στα σημεία $y = \pm 1$, ίσο με, 2.

5. Να υπολογίσετε ή να παρατηρήσετε ότι $\nabla^2 = \text{div grad}$ και curl grad είναι το μηδενικό διάνυσμα. Βλ. εδάφιο 9.8 και Προβλήματα εδαφίου 9.7.
7. Οριζόντια παράλληλη ροή προς τα δεξιά.
9. $F(z) = z^4$
11. Ομοιόμορφη παράλληλη ροή προς τα επάνω $V = \overline{F'} = iK$, $V_1 = 0$, $V_2 = K$
13. $F(z) = z^3$
15. $F(z) = z/r_0 + r_0/z$
17. Να εργαστείτε με δεδομένο ότι η σχέση $w = \arccos z$ δίνει $z = \cos w$ και να εναλλάξετε τα επίπεδα z και w .
19. $y/(x^2 + y^2) = c$ or $x^2 + (y - k)^2 = k^2$

Προβλήματα εδαφίου 18.5, page 781

5. $\Phi = \frac{3}{2} r^3 \sin 3\theta$
7. $\Phi = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} ar^8 \cos 8\theta$
9. $\Phi = 3 - 4r^2 \cos 2\theta + r^4 \cos 4\theta$
11. $\Phi = \frac{2}{\pi} \left(r \sin \theta - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta + \frac{1}{3} r^3 \sin 3\theta - + \dots \right)$
13. $\Phi = \frac{2}{\pi} r \sin \theta + \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta - \frac{2}{9\pi} r^3 \sin 3\theta - \frac{1}{4} r^4 \sin 4\theta + + - \dots$
15. $\Phi = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(r \cos \theta - \frac{1}{3} r^3 \cos 3\theta + \frac{1}{5} r^5 \cos 5\theta - + \dots \right)$
17. $\Phi = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left(r \cos \theta - \frac{1}{4} r^2 \cos 2\theta + \frac{1}{9} r^3 \cos 3\theta - + \dots \right)$

Προβλήματα εδαφίου 18.6, page 784

1. Να εργαστείτε με τη $\{2\}$. $F(z_0 + e^{i\alpha}) = (\frac{7}{2} e^{i\alpha})^3$, κ.λπ. $F(\frac{5}{2}) = \frac{343}{8}$
3. Να εργαστείτε με τη $\{2\}$. $F(z_0 + e^{i\alpha}) = (2 + 3e^{i\alpha})^2$, κ.λπ. $F(4) = 100$
5. Όχι, διότι η $|z|$ δεν είναι αναλυτική
7. $\Phi(2, -2) = -3 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + r \cos \alpha)(-3 + r \sin \alpha)r dr d\alpha$
 $= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-3r + \dots) dr d\alpha = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot 2\pi$
9. $\Phi(1, 1) = 3 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3 + r \cos \alpha + r \sin \alpha + r^2 \cos \alpha \sin \alpha)r dr d\alpha$
 $= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi$
13. $|F(z)| = [\cos^2 x + \sinh^2 y]^{1/2}$, $z = \pm i$, $\text{Max} = [1 + \sinh^2 1]^{1/2} = 1.543$
15. $|F(z)|^2 = \sinh^2 2x \cos^2 2y + \cosh^2 2x \sin^2 2y = \sinh^2 2x + 1 \cdot \sin^2 2y$, $z = 1$,
 $\text{Max} = \sinh 2 = 3.627$
17. $|F(z)|^2 = 4(2 - 2 \cos 2\theta)$, $z = \pi/2, 3\pi/2$, $\text{Max} = 4$
19. Όχι. Να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα.