Γενικές ασκήσεις Κεφαλαίου 2

Λύση 26.

α) Από τον ορισμό της επιτάχυνσης προκύπτει

$$a = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g(1 - k^2v^2)$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, της οποίας η γενική λύση είναι

$$\int \frac{dv}{1 - k^2v^2} = \int g dt + c \qquad (i)$$

Το ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους υπολογίζεται αναλύοντας σε μερικά κλάσματα

$$\frac{1}{1 - k^2v^2} = \frac{A}{1 - kv} + \frac{B}{1 + kv}$$

οπότε

$$1 = A(1 + kv) + B(1 - kv) \qquad (ii)$$

Για $v = -\frac{1}{k}$, η (ii) δίνει

$$1 = B\left[1 - k(-\frac{1}{k})\right] \Leftrightarrow B = \frac{1}{2}$$

Για $v = \frac{1}{k}$ η (ii) δίνει

$$1 = A\left[1 + k\frac{1}{k}\right] \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Έτσι, από την (i) προκύπτει

$$\int \left(\frac{1}{2k}\frac{1}{1 - kv} + \frac{1}{2k}\frac{1}{1 + kv}\right) dv = g \int dt + c$$

ή

$$-\frac{1}{2k} \ln|1 - kv| + \frac{1}{2k} \ln|1 + kv| = gt + c \qquad (iii)$$

Επειδή το σώμα αφήνεται να πέσει, $v(0) = 0$, οπότε

$$-\frac{1}{2k} \ln|1 - k \cdot 0| + \frac{1}{2k} \ln|1 + k \cdot 0| = c \Leftrightarrow c = 0$$

Έτσι, η (iii) γίνεται

$$\frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 + kv}{1 - kv}\right| = kgt. \qquad (iv)$$

Για $|kv| < 1 \Leftrightarrow |v| < \frac{1}{k}$ από την (iv) προκύπτει ($z = e^{2kgt}$)

$$\frac{1 + kv}{1 - kv} = e^{2gkt}$$

ή

$$1 + kv = e^{2gkt} - kve^{2gkt}$$

ή

$$v(t) = \frac{e^{2gkt} - 1}{k\left(1 + e^{2gkt}\right)}$$

ii) Θεωρώντας άξονα x κατακόρυφο προς τα κάτω με αρχή το σημείο στο οποίο αφήσαμε ελεύθερο το σώμα, $x(0) = 0$, οπότε (θέτοντας $z = e^{2gkt}$)

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(t)dt \\ &= \int_0^t \frac{e^{2gkt} - 1}{k\left(1 + e^{2gkt}\right)}dt \\ &= \frac{1}{2gk^2} \int_0^{e^{2gkt}} \frac{z - 1}{z(1 + z)}dz \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αυτό αναλύοντας σε μερικά κλάσματα, οπότε προκύπτει

$$\frac{z - 1}{z(1 + z)} = -\frac{1}{z} + \frac{2}{1 + z}$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2gk^2}\left[-\ln z + 2\ln(z+1)\right]_0^{e^{2gkt}} \\
&= \frac{1}{2gk^2}\left[-\ln e^{2gkt} + 2\ln\left(e^{2gkt}+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2gk^2}\left(-2gkt + 2\ln\left(e^{2gkt}+1\right)\right]
\end{aligned}
$$

β) Η ταχύτητα του Σ μετά από αρκετό x είναι

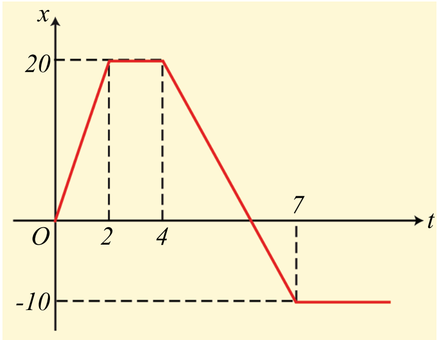
$$
v_{o\rho} = \lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{2gkt}-1}{k\left(1+e^{2gkt}\right)} = \frac{1}{k}
$$

Λύση 30.

α) Από το Σχήμα 2.83 φαίνεται ότι:

- για $0 < t < 2$, η κλίση της ευθείας του διαγράμματος είναι

$$\lambda = \frac{20}{2} = 10$$



Σχήμα 2.83

οπότε η εξίσωση της κίνησης στο χρονικό αυτό διάστημα είναι

$$x(t) = 10t, \quad 0 \le t < 2$$

- για $2 < t < 4$, η ευθεία είναι οριζόντια, οπότε

$$x(t) = 20, \quad 2 < t < 4$$

- για $4 < t < 7$, η κλίση της ευθείας είναι

$$\lambda = \frac{x(7) - x(4)}{7 - 4} = \frac{-10 - 20}{3} = -10$$

οπότε η εξίσωση της ευθείας αυτής είναι (διέρχεται από το σημείο $(4, 20)$)

$$x - 20 = -10(t - 4)$$

Άρα,

$$x(t) = -10t + 60, \quad 4 < t < 7$$

- για $t > 7$,

$$x(t) = -10$$

οπότε η εξίσωση κίνησης του Σ είναι

$$x(t) = \begin{cases} 10t, & 0 \le t \le 2 \\ 20, & 2 < t \le 4 \\ -10t + 60, & 4 < t \le 7 \\ -10, & t > 7 \end{cases}$$

Έτσι, οι χρονικές στιγμές τις οποίες $x = 10\,m$ προκύπτουν από την εξίσωση

$$x(t) = 10 \;\Leftrightarrow\; 10t = 10 \quad \text{ή} \quad -10t + 60 = 10$$

οπότε το Σ διέρχεται από τη θέση $x_1 = 10\,m$ τις χρονικές στιγμές

$$t_1 = 1\,s \quad \text{ή} \quad t_2 = 5\,s$$

β) Η μετατόπιση του Σ στο χρονικό διάστημα $0 - 7\,s$ είναι

$$x(7) - x(0) = -10 - 0 = -10$$

οπότε η μέση ταχύτητα του στο χρονικό διάστημα $0 - 7\,s$ είναι

$$\overline{v} = \frac{x(7) - x(0)}{7 - 0} = \frac{-10}{7}\,\frac{m}{s}$$

γ) Η μέση τιμή του μέτρου της ταχύτητας του Σ στο χρονικό διάστημα $0 - 7\,s$ είναι

$$|v|_\mu = \frac{s}{\Delta t} = \frac{|x(2) - x(0)| + |x(7) - x(4)|}{7 - 0} = \frac{20 + 30}{7} = \frac{50}{7}\,\frac{m}{s}$$

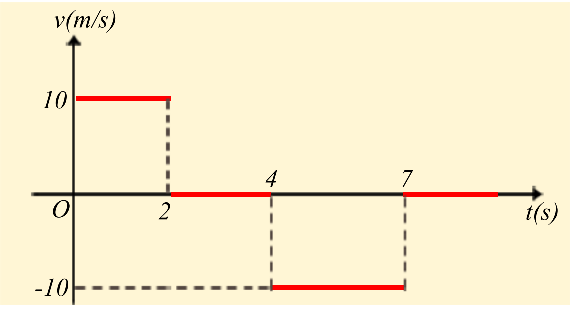
Λύση 31.

α) Από το Σχήμα 2.84 φαίνεται ότι:

- για $0 < t < 2$,

$$v = 10$$

$$\lambda = \frac{20}{2} = 10$$



Σχήμα 2.84

οπότε η εξίσωση της κίνησης στο χρονικό αυτό διάστημα είναι

$$x(t) = 10t,\ \ 0 \leq t < 2,$$

- για $2 < t < 4$,

$$v = 0,$$

οπότε

$$x(t) = 20,\ \ 2 < t < 4,$$

- για $4 < t < 7$,

$$v = 10$$

οπότε η εξίσωση κίνησης του είναι

$$x(t) = 20 - 10(t - 4)$$

Άρα,

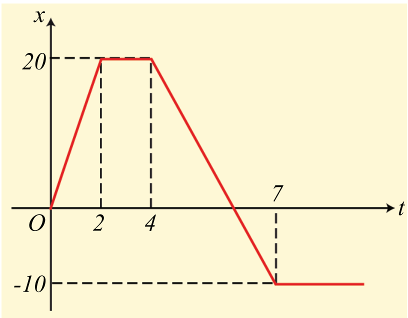
$$x(t) = -10t + 60,\ \ 4 < t < 7$$

- Επίσης,

$$x(t) = -10$$

οπότε η εξίσωση κίνησης του Σ είναι

$$x(t) = \begin{cases} 10t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 20, & 2 < t \leq 4 \\ -10t + 60, & 4 < t \leq 7 \\ -10, & t > 7 \end{cases}$$



Σχήμα 2.846 *Η μετατόπιση του Σ*

β) Αν t_1 η χρονική στιγμή την οποία το Σ διέρχεται απο την αρχή του άξονα ($x = 0$)

$$-10t_1 + 60 = 0 \ \Leftrightarrow\ t_1 = 6s$$

Έτσι το Σ:

i) βρίσκεται στα αρνητικά του άξονα για $t > 6s$,

ii) βρίσκεται στα αρνητικά του άξονα για $0 < t < 6s$,

iii) βρίσκεται στα θετικά του άξονα κινούμενο προς τα αρνητικά για τα x για τα οποία

$$x > 0 \quad \text{και} \quad v < 0$$

δηλαδή για

$$4 < t < 6s$$

γ) οι χρονικές στιγμές τις οποίες το Σ διέρχεται από τη θέση $x = 3m$ ισχύει

$$x(t) = 3 \ \Leftrightarrow\ 10t = 3 \ \Leftrightarrow\ t = 0,3s \quad \text{και} \quad x(t) = 3 \ \Leftrightarrow\ -10t + 60 = 3 \ \Leftrightarrow\ t = 5,8s$$

Λύση 32.

α) Παίρνοντας άξονα y κατακόρυφο προς τα πάνω, η πέτρα κινείται με σταθερή επιτάχυνση $-g$, οπότε η θέση και η ταχύτητά της τη χρονική στιγμή t είναι (θεωρούμε $t = 0$ τη στιγμή της βολής της πέτρας),

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

και

$$v(t) = v_0 - gt$$

Για τη χρονική στιγμή t_1 την οποία η πέτρα φτάνει στο μέγιστο ύψος ισχύει

$$v(t_1) = 0 \Leftrightarrow v(t) = v_0 - g t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_0}{g}$$

και το μέγιστο ύψος είναι

$$h = y(t_1) = \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

β) Για τη χρονική στιγμή t_2 την οποία η πέτρα επιστρέφει στο σημείο βολής Α ισχύει

$$y(t_2) = 0 \Leftrightarrow v_0 t - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0 \Leftrightarrow t_2 \left(v_0 - \frac{1}{2} g t_2\right) = 0$$

οπότε ($t_2 = 0$ είναι η στιγμή της βολής)

$$t_2 = \frac{2v_0}{g}$$

Λύση 58.

α) Επειδή η ταχύτητα μειώνεται γραμμικά με την απόσταση και $v(0) = v_0$,

$$v = v_0 - kx$$

όπου

$$v(x_1) = v_0 \;\Leftrightarrow\; v_0 - kx_1 = \frac{v_0}{2} \;\Leftrightarrow\; k = \frac{v_0}{2x_1}$$

οπότε

$$v(x) = v_0 - \frac{v_0}{2x_1}x = v_0\left(1 - \frac{x}{2x_1}\right)$$

Άρα,

$$v = \frac{dx}{dt} \;\Leftrightarrow\; \frac{dx}{dt} = v_0\left(1 - \frac{x}{2x_1}\right)$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, της οποίας η γενική λύση είναι

$$\int \frac{dx}{2x_1 - x} = \int \frac{v_0}{2x_1}dt + c \;\Leftrightarrow\; -\ln|2x_1 - x| = \frac{v_0}{2x_1}t + c \qquad (i)$$

Επειδή για $t = 0$ ισχύει $x = 0$

$$c = -\ln|2x_1|$$

Άρα,

$$-\ln|2x_1 - x| + \ln|2x_1| = \frac{v_0}{2x_1}t \;\Leftrightarrow\; \ln\left|\frac{2x_1 - x}{2x_1}\right| = -\frac{v_0}{2x_1}t \qquad (ii)$$

Για $x < 2x_1$, η (ii) δίνει

$$\frac{2x_1 - x}{2x_1} = e^{-\frac{v_0}{2x_1}t} \;\Leftrightarrow\; 2x_1 - x = 2x_1 e^{-\frac{v_0}{2x_1}t}$$

οπότε

$$x = 2x_1\left(1 - e^{-\frac{v_0}{2x_1}t}\right)$$

β) Η ταχύτητα του Σ συναρτήσει του χρόνου είναι

$$v = \frac{dx}{dt} = 2x_1\left(-e^{-\frac{v_0}{2x_1}t}\right)\left(-\frac{v_0}{2x_1}\right) = v_0 e^{-\frac{v_0}{2x_1}t}$$

Λύση 59.

α) Από τον ορισμό της επιτάχυνσης προκύπτει

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{v^3}{100}$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών ως προς τη συνάρτηση $v(t)$, της οποίας η γενική λύση είναι

$$\int \frac{dv}{v^3} = -\int \frac{1}{100}dt + c \Leftrightarrow -\frac{1}{2v^2} = -\frac{1}{100}t + c \qquad (i)$$

Επειδή $v(0) = 10$, από την (i) προκύπτει

$$c = -\frac{1}{2 \cdot 10^2}$$

οπότε η (i) δίνει

$$-\frac{1}{2v^2} = -\frac{1}{100}t - \frac{1}{2 \cdot 10^2} \Leftrightarrow \frac{1}{v^2} = \frac{t}{50} + \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{v^2} = \frac{2t+1}{100}$$

Άρα $(v > 0)$,

$$v = \sqrt{\frac{100}{1+2t}} = \frac{10}{\sqrt{1+2t}}$$

Η θέση του Σ είναι $(x(0) = 0)$

$$x(t) = 2 + \int_0^t v(t)dt = 2 + \int_0^t \frac{10}{\sqrt{1+2t}}dt = 10\left(\sqrt{1+2t} - 1\right)$$

β) Από τον κανόνα αλυσίδας προκύπτει

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dv}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a}{v} = \frac{-\frac{v^3}{100}}{v} = -\frac{v^2}{100}$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών ως προς τη συνάρτηση $v(x)$ της οποίας η γενική λύση είναι $(v(2) = 10)$

$$\int_{10}^{v} \frac{dv}{v^2} = \int_2^t -\frac{1}{100}dx + c \quad \Leftrightarrow \quad -\left[\frac{1}{v}\right]_{10}^{v} = -\left[\frac{1}{100}x\right]_2^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{10} = \frac{x}{100} - \frac{1}{50}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v} = \frac{x}{100} + \frac{4}{50} = \frac{x+8}{100}$$

οπότε η ταχύτητα του Σ στη θέση x είναι

$$v(x) = \frac{100}{x+8}$$

Έτσι, η ταχύτητα του Σ στη θέση $x = 2m$ είναι

$$v(2) = \frac{100}{2+8} = 10\,\frac{m}{s}$$

Λύση 60.

α) Από τον ορισμό της επιτάχυνσης

$$a=\frac{dv}{dt}\;\Leftrightarrow\;\frac{dv}{dt}=-\lambda v^k$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, της οποίας η γενική λύση είναι

$$\int\frac{dv}{v^k}=\int-\lambda dt+c\;\Leftrightarrow\;\frac{v^{1-k}}{1-k}=-\lambda t+c \tag{i}$$

Επειδή $v(0)=v_0$,

$$c=\frac{v_0^{1-k}}{1-k}$$

οπότε η (i) δίνει

$$\frac{v^{1-k}-v_0^{1-k}}{1-k}=-\lambda t\;\Leftrightarrow\;v^{1-k}=(k-1)\lambda t+v_0^{1-k}$$

Άρα, η εξίσωση της ταχύτητας του Σ είναι

$$\begin{aligned}v(t)&=\left[(k-1)\lambda t+v_0^{1-k}\right]^{\frac{1}{1-k}}\\&=\frac{1}{\left[(k-1)\lambda t+v_0^{1-k}\right]^{\frac{1}{1-k}}}\\&=\frac{1}{\left[(k-1)\lambda t+v_0^{1-k}\right]^{-\frac{1}{k-1}}}\end{aligned}$$

β) Σύμφωνα με τον κανόνα αλυσίδας και τους ορισμούς ταχύτητας και επιτάχυνσης

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dv}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a}{v}=\frac{-\lambda v^k}{v}=-\lambda v^{k-1}$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών ως προς τη συνάρτηση $v(x)$ της οποίας η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^{k-1}}=\int_0^x-\lambda dx\quad&\Leftrightarrow\quad\left[\frac{v^{2-k}}{2-k}\right]_{v_0}^{v}=-\lambda x\\&\Leftrightarrow\quad\frac{1}{2-k}\left(v^{2-k}-v_0^{2-k}\right)=-\lambda x\\&\Leftrightarrow\quad v^{2-k}=v_0^{2-k}-\lambda(2-k)x\end{aligned}$$

Άρα,

$$v=\left[v_0^{2-k}-\lambda(2-k)x\right]^{\frac{1}{2-k}}$$

Λύση 61.

α) Από τον ορισμό της ταχύτητας

$$v = \frac{dx}{dt}$$

και λόγω της (i) προκύπτει

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 0,2x^2$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, της οποίας η λύση είναι

$$\int_4^x \frac{dx}{-4x + 0,2x^2} = \int_0^t dt \tag{ii}$$

Υπολογίσαμε το ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους της (ii) αναλύοντας τη συνάρτηση του σε μερικά κλάσματα

$$\frac{1}{-4x + 0,2x^2} = \frac{1}{0,2x(x-20)} = \frac{5}{x(x-20)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-20} = \frac{A(x-20) + Bx}{x(x-2)}$$

οπότε

$$A(x-20) + Bx = 5$$

Θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε

$$A(-20) = 5 \Leftrightarrow A = -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4}$$

και για $x = 20$ προκύπτει

$$B \cdot 20 = 5 \Leftrightarrow B = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Έτσι, η (ii) γίνεται

$$\int_4^x \left(-\frac{1}{4}\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-20}\right) dx = \int_0^t dt \Leftrightarrow \frac{1}{4}\{[-\ln|x| + \ln|x-20|]_4^x\} = t$$

ή

$$-\ln|x| + \ln|x-20| + \ln 4 - \ln 16 = 4t \Leftrightarrow \ln\left|\frac{x-20}{x}\right| = 4t + \ln 4$$

Άρα,

$$\left|\frac{x-20}{x}\right| = e^{4t+\ln 4} = e^{4t}e^{\ln 4} = 4e^{4t}$$

οπότε για $0 < x < 20$ ισχύει

$$\frac{20-x}{x} = 4e^{4t} \Leftrightarrow x\left(1 + 4e^{4t}\right) = 20$$

Άρα, η απομάκρυνση του Σ τη χρονική στιγμή t είναι

$$x(t) = \frac{20}{1 + 4e^{4t}}$$

β) Η συνολική δύναμη που δέχεται το Σ στη θέση x είναι

$$F(x) = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m\frac{dv}{dx}v$$

Έτσι, λόγω και της (i)

$$\begin{aligned} F(x) &= 0,2 \cdot (-4 + 0,4x)(-4x + 0,2x^2) \\ &= 0,016x^3 - 0,48x^2 + 3,2x \end{aligned}$$

Λύση 62.
Από τον ορισμό της επιτάχυνσης και της ταχύτητας και τον κανόνα αλυσίδας

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dv}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a}{v}=\frac{k+\lambda v}{v}=\frac{k}{v}+\lambda$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, της οποίας η γενική λύση είναι

$$\int\frac{vdv}{k+\lambda v}=\int dx+c \qquad (i)$$

Επειδή

$$\frac{v}{k+\lambda v}=\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda v+k-k}{k+\lambda v}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{k}{k+\lambda v}\right)$$

οπότε το ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους της (i) είναι

$$\begin{aligned}\int\frac{vdv}{k+\lambda v} &= \int\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{k}{k+\lambda v}\right)dv\\ &= \frac{1}{\lambda}\left(v-\int\frac{k}{k+\lambda v}dv\right)\\ &= \frac{v}{\lambda}-\frac{k}{\lambda^2}\ln(k+\lambda v)\end{aligned}$$

Έτσι, η (i) γίνεται

$$\frac{v}{\lambda}-\frac{k}{\lambda^2}\ln(k+\lambda v)=x+c \qquad (ii)$$

Αν v_0 η ταχύτητα του Σ στην αρχή του άξονα, $v(0)=v_0$, οπότε η (i) γίνεται

$$\frac{v_0}{\lambda}-\frac{k}{\lambda^2}\ln(k+\lambda v_0)=c$$

Έτσι, η (ii) γίνεται

$$\frac{v}{\lambda}-\frac{k}{\lambda^2}\ln(k+\lambda v)=x+\frac{v_0}{\lambda}-\frac{k}{\lambda^2}\ln(k+\lambda v_0)$$

ή

$$x=\frac{v}{\lambda}-\frac{k}{\lambda^2}\ln(k+\lambda v)-\frac{v_0}{\lambda}+\frac{k}{\lambda^2}\ln(k+\lambda v_0)$$

ή

$$x=\frac{v-v_0}{\lambda}+\frac{k}{\lambda^2}\ln\frac{k+\lambda v_0}{k+\lambda v}$$

Λύση 63.

Θεωρούμε άξονα y κατακόρυφο προς τα κάτω με αρχή το σημείο ρίψης του Σ και χρονική στιγμή $t = 0$ τη στιγμή της ρίψης. Το σώμα κινείται με επιτάχυνση

$$a = \frac{dv}{dt} = g - bv$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, από την οποία προκύπτει

$$\frac{dv}{g - bv} = dt$$

οπότε

$$\int \frac{dv}{g - bv} = \int dt + c \Leftrightarrow -\frac{1}{b}\ln(g - bv) = t + c \qquad (i)$$

Επειδή η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι v_1,

$$v(0) = v_1,$$

οπότε η (i) δίνει

$$-\frac{1}{b}\ln(g - bv_1) = 0 + c \Leftrightarrow c = -\frac{1}{b}\ln(g - bv_1)$$

Έτσι, η (i) γίνεται

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{b}\ln(g - bv) = t - \frac{1}{b}\ln(g - bv_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{b}\ln(g - bv) - \frac{1}{b}\ln(g - bv_1) = -t \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\frac{g - bv}{g - bv_1} = -bt \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{g - bv}{g - bv_1} = e^{-bt} \\
&\Leftrightarrow \quad g - bv = (g - bv_1)\, e^{-bt} \\
&\Leftrightarrow \quad bv = g - (g - bv_1)\, e^{-bt},
\end{aligned}$$

οπότε η ταχύτητα του Σ τη χρονική στιγμή t είναι

$$v(t) = \frac{g}{b} - \left(\frac{g}{b} - v_1\right) e^{-bt}$$

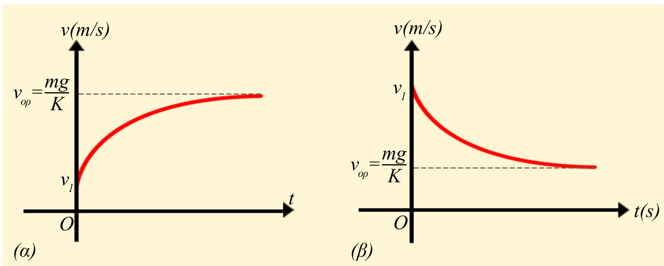
Άρα, η επιτάχυνση του Σ είναι

$$a = \frac{dv}{dt} = b\left(\frac{g}{b} - v_1\right) e^{-bt}$$

Επομένως:

- Αν $\frac{g}{b} > v_1$ τότε
$$a = \frac{dv}{dt} > 0$$
οπότε η $v(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση (βλ. Σχήμα α).

- Αν $\frac{g}{b} < v_1$ τότε
$$a = \frac{dv}{dt} < 0$$
οπότε η $v(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση (βλ. Σχήμα β).



Σχήμα ασκ. 63 *Διαγράμματα ταχύτητας για:* (α) $v_1 < \frac{g}{b}$ (β) $v_1 > \frac{g}{b}$

Επίσης, από την (i) προκύπτει ότι

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{g}{b}$$

Έτσι, προκύπτουν τα διαγράμματα του σχήματος για τις περιπτώσεις (α) $v_1 < \frac{g}{b}$ και (β) $v_1 > \frac{g}{b}$