Γενικές ασκήσεις Κεφαλαίου 3.

Λύση 17.

Θεωρώντας άξονα y κατακόρυφο με θετική φορά προς τα κάτω και αρχή το σημείο βολής, από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής προκύπτει (m η μάζα του σώματος)

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad k \text{ σταθερά}$$

ή

$$\frac{dv}{mg - kv^2} = \frac{1}{m}dt \Leftrightarrow \frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}dt$$

ολοκληρώνοντας αυτή τη διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$\int_0^v \frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{k}} = \int_0^t -\frac{k}{m}dt \qquad (i)$$

Για να υπολογίσουμε το πρώτο ολοκλήρωμα αναλύουμε τη συνάρτησή του σε μερικά κλάσματα

$$\frac{1}{v^2 - \frac{mg}{k}} = \frac{A}{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}} + \frac{B}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}}$$

οπότε

$$1 = A\left(v + \sqrt{\frac{mg}{k}}\right) + B\left(v - \sqrt{\frac{mg}{k}}\right) \qquad (ii)$$

Για $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ η (ii) δίνει

$$1 = A\left(\sqrt{\frac{mg}{k}} + \sqrt{\frac{mg}{k}}\right) \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}$$

Για $v = -\sqrt{\frac{mg}{k}}$ η (ii) δίνει

$$1 = B\left(-\sqrt{\frac{mg}{k}} - \sqrt{\frac{mg}{k}}\right) \Leftrightarrow B = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}$$

Έτσι, το ολοκλήρωμα του Α′ μέλους της (i) είναι

$$\begin{aligned}
\int \frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{k}} &= \int \left(\frac{A}{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}} + \frac{B}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}}\right)dv \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left|v - \sqrt{\frac{mg}{k}}\right| - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left|v + \sqrt{\frac{mg}{k}}\right| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left|\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}}\right|
\end{aligned}$$

Έτσι, η (i) δίνει

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left|\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}}\right| = -\frac{k}{m}t$$

ή

$$\ln\left|\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}}\right| = -2\sqrt{\frac{kg}{m}}t \qquad (iii)$$

Για $v < \sqrt{\frac{mg}{k}}$, η (iii) δίνει

$$\frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}-v}{v+\sqrt{\frac{mg}{k}}}=e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} \Leftrightarrow ve^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}+\sqrt{\frac{mg}{k}}e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}=\sqrt{\frac{mg}{k}}-v$$
$$\Leftrightarrow v\left(1+e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}\right)=\sqrt{\frac{mg}{k}}\left(1-e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}\right)$$

οπότε

$$v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{1-e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{1+e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}} \qquad (iv)$$

Μετά από αρκετό χρόνο η ταχύτητα του Σ είναι

$$v_o=\lim_{t\to+\infty}v(t)=\sqrt{\frac{mg}{k}}\lim_{t\to+\infty}\frac{1-e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{1+e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}=\sqrt{\frac{mg}{k}}$$

οπότε

$$\sqrt{\frac{mg}{k}}=v_0 \Leftrightarrow \frac{mg}{k}=v_0^2 \Leftrightarrow k=\frac{mg}{v_0^2}$$

Έτσι, η (iv) γίνεται

$$v=v_0\frac{1-e^{-2\sqrt{\frac{mg}{v_0^2}\frac{g}{m}}t}}{1+e^{-2\sqrt{\frac{mg}{v_0^2}\frac{g}{m}}t}}$$

οπότε η εξίσωση της ταχύτητας του Σ είναι

$$v(t)=v_0\frac{1-e^{\frac{-2gt}{v_0}}}{1+e^{\frac{-2gt}{v_0}}} \qquad (v)$$

Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα του Σ γίνεται ίση με το μισό της τελικής του ταχύτητας v_0,

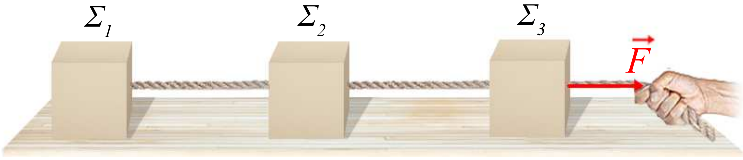
$$v(t_1)=v_0\frac{1-e^{-\frac{2gt_1}{v_0}}}{1+e^{-\frac{2gt_1}{v_0}}} \Leftrightarrow v_0\frac{1-e^{-\frac{2gt_1}{v_0}}}{1+e^{-\frac{2gt_1}{v_0}}}=\frac{v_0}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-e^{-\frac{2gt_1}{v_0}}}{1+e^{-\frac{2gt_1}{v_0}}}=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2-2e^{-\frac{2gt_1}{v_0}}=1+e^{-\frac{2gt_1}{v_0}}$$
$$\Leftrightarrow 3e^{-\frac{2gt_1}{v_0}}=1$$
$$\Leftrightarrow e^{-\frac{2gt_1}{v_0}}=\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{2gt_1}{v_0}=\ln\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{2gt_1}{v_0}=-\ln 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{2gt_1}{v_0}=\ln 3$$
$$\Leftrightarrow v_0=\frac{2gt_1}{\ln 3}$$

οπότε η (v) γίνεται

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \frac{2gt_1}{\ln 3} \frac{1 - e^{-\frac{2gt}{\frac{2gt_1}{\ln 3}}}}{1 + e^{-\frac{2gt}{\frac{2gt_1}{\ln 3}}}} \\
&= \frac{2gt_1}{\ln 3} \frac{1 - e^{-\frac{2gt}{\frac{2gt_1}{\ln 3}}}}{1 + e^{-\frac{2gt}{\frac{2gt_1}{\ln 3}}}} \\
&= \frac{2gt_1}{\ln 3} \frac{1 - e^{-\frac{t \ln 3}{t_1}}}{1 + e^{-\frac{t \ln 3}{t_1}}} \\
&= \frac{2gt_1}{\ln 3} \frac{1 - \left(e^{-\ln 3}\right)^{\frac{t}{t_1}}}{1 + \left(e^{-\ln 3}\right)^{\frac{t}{t_1}}} \\
&= \frac{2gt_1}{\ln 3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{t_1}}}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{t_1}}} \\
&= \frac{2gt_1}{\ln 3} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{t_1}} - 1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{t_1}} + 1}
\end{aligned}
$$

Λύση 19.

α) Θεωρούμε τους άξονες x και y του Σχήματος 3.1566, σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που δέχεται καθένα από τα τρία κιβώτια και εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής για το κάθε κιβώτιο.



Σχήμα 3.156 *Κίνηση 3 κιβωτίων που συνδέονται με σχοινιά*

- Το κιβώτιο Σ_1 δέχεται τις δυνάμεις:
  - το βάρος του $B_1 = m_1 g$,
  - την κάθετη αντίδραση N_1 από το δάπεδο,
  - την τάση του σχοινιού T_1,

οπότε εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής κατά τον άξονα x για το Σ_1 παίρνουμε (a η κοινή επιτάχυνση των δύο κιβωτίων)

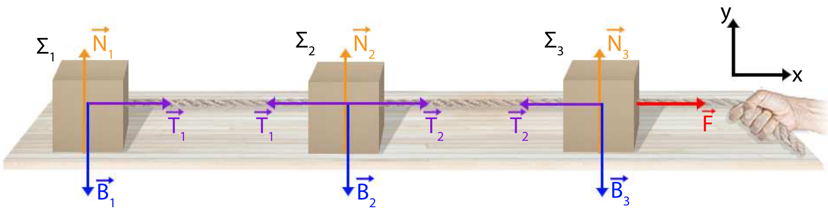
$$\sum F_x = m_1 a \Leftrightarrow T_1 = m_1 a \qquad (i)$$

Το κιβώτιο Σ_2 δέχεται τις εξής δυνάμεις:
  - το βάρος του $B_2 = m_2 g$,
  - την κάθετη αντίδραση N_2 από το δάπεδο,
  - τις τάσεις T_1 και T_2 από τα δύο σχοινιά (βλ. Σχήμα 3.1566)

οπότε εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής κατά τον άξονα x για το Σ_2 παίρνουμε

$$\sum F_x = m_2 a \Leftrightarrow T_2 - T_1 = m_2 a. \qquad (ii)$$

- Το κιβώτιο Σ_3 δέχεται τις δυνάμεις:
  - το βάρος του $B_3 = m_3 g$,
  - την κάθετη αντίδραση N_3 από το δάπεδο,
  - την τάση του σχοινιού T_2,
  - τη δύναμη F,



Σχήμα 3.1566 *Κίνηση 3 κιβωτίων που συνδέονται με σχοινιά*

οπότε εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής κατά τον άξονα x για το Σ_3 παίρνουμε

$$\sum F_x = m_3 a \Leftrightarrow F - T_2 = m_3 a. \qquad (iii)$$

Βρίσκουμε την επιτάχυνση a από το σύστημα των $(i)-(iii)$, προσθέτοντάς τες κατά μέλη, οπότε προκύπτει

$$T_1 + T_2 - T_1 + F - T_2 = m_1 a + m_2 a + m_3 a.$$

Άρα,

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad (iv)$$

ii) Οι τιμές των τάσεων προκύπτουν από τις (i) και (ii) με τη βοήθεια της (iv)

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1 a = \frac{m_1 F}{m_1 + m_2 + m_3} \\ T_2 &= T_1 + m_2 a = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} F + m_2 a \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} F + \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3} F \\ &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} F \end{aligned}$$

β) Για να μην σπάσει το σχοινί που συνδέει τα Σ_1 και Σ_2, πρέπει

$$T_1 < T_0 \Leftrightarrow \frac{m_1 F}{m_1 + m_2 + m_3} < T_0 \Leftrightarrow F < T_0 \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1}$$

δηλαδή
$$F < T_0\left(1 + \frac{m_2 + m_3}{m_1}\right)$$
Για να μην σπάσει το σχοινί που συνδέει τα Σ_2 και Σ_3 πρέπει
$$T_2 < T_0 \;\Leftrightarrow\; \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3}F < T_0 \;\Leftrightarrow\; F < T_0\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2}$$
δηλαδή
$$F < T_0\left(1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}\right)$$
Επομένως, η μέγιστη τιμή της F, ώστε να μην σπάσει κανένα από τα δύο σχοινιά είναι
$$F_{max} = T_0\left(1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}\right)$$

Λύση 23.

Θεωρούμε άξονα x με θετική φορά προς τα κατω και αρχή το σημείο στο οποίο ο αλεξιπτωτιστής πηδάει από το αερόστατο. Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv \;\Leftrightarrow\; \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση ως προς την συνάρτηση $v(t)$ της οποίας η γενική λύση είναι

$$\int \frac{dv}{g - \dfrac{b}{m}v} = \int dt + c$$

ή

$$-\frac{m}{b}\ln\left|g - \frac{b}{m}v\right| = t + c$$

Επειδή $v(0) = -v_0$ (το αερόστατο ανεβαίνει)

$$-\frac{m}{b}\ln\left|g + \frac{b}{m}v\right| = c$$

οπότε

$$-\frac{m}{b}\left(\ln\left|g - \frac{b}{m}v\right| - \ln\left|g + \frac{b}{m}v_0\right|\right) = t \;\Leftrightarrow\; \ln\left|\frac{g - \dfrac{b}{m}v}{g + \dfrac{b}{m}v_0}\right| = -\frac{b}{m}t$$

Άρα ($mg > bv$),

$$\frac{g - \dfrac{b}{m}v}{g + \dfrac{b}{m}v_0} = e^{-\frac{b}{m}t} \quad\Leftrightarrow\quad g - \frac{b}{m}v = \left(g + \frac{b}{m}v_0\right)e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\Leftrightarrow\quad v = \frac{mg}{b}\left[1 - \left(1 + \frac{bv_0}{mg}\right)e^{-\frac{b}{m}t}\right]$$

Η θέση του αλεξιπτωτιστή ως συνάρτηση του χρόνου είναι $(x(0) = 0)$

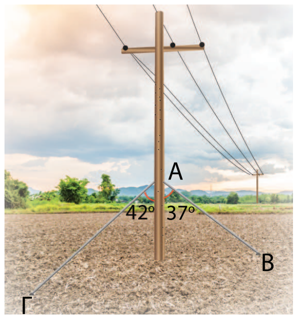
$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t v(t)dt \\
&= \frac{mg}{b}\int_0^t \left[1 - \left(1 + \frac{bv_0}{mg}\right)e^{-\frac{b}{m}t}\right]dt \\
&= \frac{mg}{b}\left[t + \left(\frac{m}{b} + \frac{v_0}{g}\right)e^{-\frac{b}{m}t}\right] - \frac{mg}{b}\left(\frac{m}{b} + \frac{v_0}{g}\right)
\end{aligned}$$

Λύση 27.

α) Χρησιμοποιώντας τους άξονες του Σχήματος 3.1626 τα διανύσματα των τάσεων των δύο συρματόσχοινων είναι

$$\vec{T}_1 = T_1 \sin 37^\circ\, \hat{e}_y - T_1 \cos 37^\circ\, \hat{e}_z \qquad (i)$$

$$\vec{T}_2 = T_2 \sin 42^\circ\, \hat{e}_x - T_2 \cos 42^\circ\, \hat{e}_z \qquad (ii)$$



Σχήμα 3.162 *Στήριξη στύλου*

Επειδή η παράλληλη στον στύλο συνιστώσα της $\vec{T}_1$ ειναι $200N$

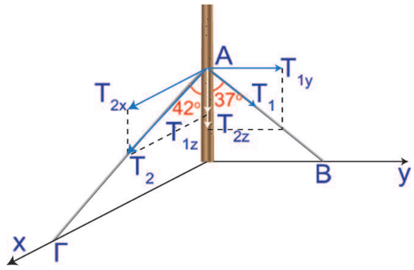
$$|T_{1z}| = 200 \;\Leftrightarrow\; T_1 \cos 37^\circ = 200$$

οπότε το μέτρο της $\vec{T}_1$, είναι

$$T_1 = \frac{200}{\cos 37^\circ} = 250,4\,N$$

Έτσι, από τις (i) και (ii) προκύπτει ότι η συνολική δύναμη που δέχεται ο στύλος από τα δύο συρματόσχοινα είναι ($T_2 = 300N$)

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \\ &= (150,7\,\hat{e}_y - 200\,\hat{e}_z) + (200,7\,\hat{e}_x - 222,9\,\hat{e}_z) \\ &= 200,7\,\hat{e}_x + 150,7\,\hat{e}_y - 422,9\,\hat{e}_z\end{aligned}$$



Σχήμα 3.1626 *Ανάλυση δυνάμεων*

β) Η προβολή της τάσης T_1 στην κατεύθυνση του $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$ είναι ($\hat{e}_2$ το μοναδιαίο στην κατεύθυνση του $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$)

$$\begin{aligned}T_{1\text{ΑΓ}} &= \vec{T}_1 \cdot \hat{e}_2 \\ &= (150,7\,\hat{e}_y - 200\,\hat{e}_z) \cdot (\sin 42^\circ\,\hat{e}_x - \cos 42^\circ\,\hat{e}_z) \\ &= 148,6\,N\end{aligned}$$

Λύση 28.

α) Χρησιμοποιώντας τους άξονες του Σχήματος 3.163β, οι δυνάμεις που δέχεται ο πήρος είναι

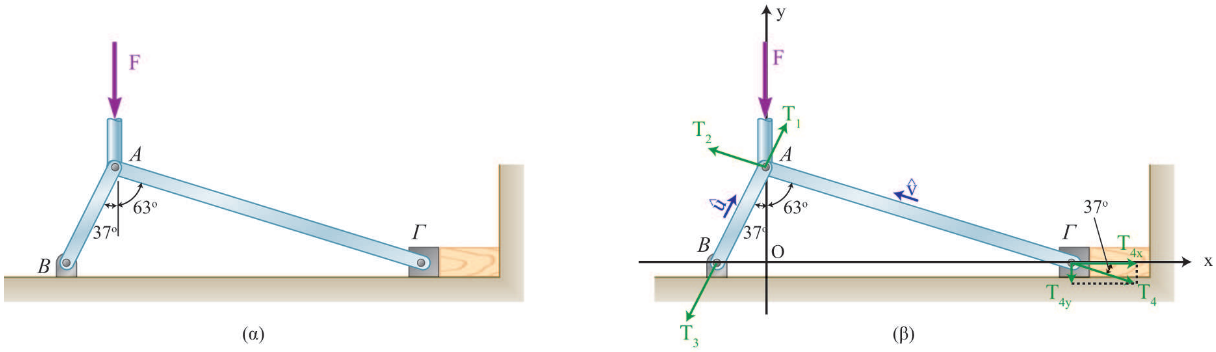
$$\vec{F} = -500\,\hat{e}_y$$

και οι δυνάμεις από τους βραχίονες ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες είναι

$$T_1\hat{v}_1 \quad \text{και} \quad T_2\,\hat{v}_2$$

όπου $\hat{v}_1$ και $\hat{v}_2$ μοναδιαία διανύσματα στην κατεύθυνση των διανυσμάτων $\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{\Gamma A}$.
Από το Σχήμα 3.163β φαίνεται ότι

$$\begin{aligned}\hat{v}_1 &= \sin n37^\circ\hat{e}_x + \cos 37^\circ\hat{e}_y\\ \hat{v}_2 &= -\sin 63^\circ\hat{e}_x + \cos 63^\circ\hat{e}_y\end{aligned}$$



Σχήμα 3.163α,β *Ο μηχανισμός της Άσκησης 3.28*

οπότε

$$\begin{aligned}\vec{T}_1 &= T_1\sin 37^\circ\,\hat{e}_x + T_1\cos 37^\circ\,\hat{e}_y = 0,6T_1\,\hat{e}_x + 0,8T_1\,\hat{e}_y\\ \vec{T}_2 &= -T_2\sin 63^\circ\,\hat{e}_x + T_2\cos 63^\circ\,\hat{e}_y = -0,9T_2\,\hat{e}_x + 0,5T_2\,\hat{e}_y\end{aligned} \qquad (i)$$

Επειδή ο πήρος ισορροπεί, το άθροισμα των δυνάμεων που δέχεται είναι μηδέν, οπότε

$$\vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; -500\,\hat{e}_y + 0,6T_1\,\hat{e}_x + 0,8T_1\,\hat{e}_y - 0,9T_2\,\hat{e}_x + 0,5T_2\,\hat{e}_y = 0$$

Από τη διανυσματική αυτή σχέση προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned}-500 + 0,8T_1 + 0,5T_2 &= 0\\ 0,6T_1 - 0,9T_2 &= 0\end{aligned}$$

Από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει

$$T_1 = 441,2N \quad \text{και} \quad T_2 = 294,1N,$$

οπότε από την (i) παίρνουμε τα διανύσματα των τάσεων $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$,

$$\begin{aligned}\vec{T}_1 &= 264,7\,\hat{e}_x + 353\,\hat{e}_y\\ \vec{T}_2 &= -264,7\,\hat{e}_x + 147,1\,\hat{e}_y\end{aligned}$$

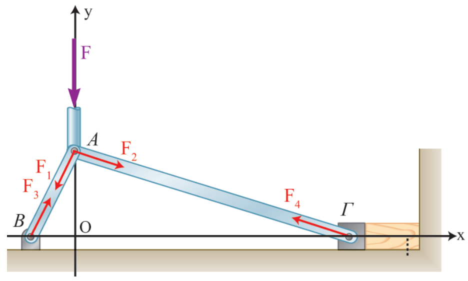
β) Η ράβδος ασκεί στην άρθρωση Β δύναμη $\vec{T}_3$ αντίθετη της $\vec{T}_1$ (βλ. Σχήμα 3.163β). Δηλαδή,

$$\vec{T}_3 = -\vec{T}_1 = -264,7\,\hat{e}_x - 353\,\hat{e}_y$$

γ) i) Η δύναμη που δέχεται ο βραχίονας ΑΒ στο άκρο του Β είναι (βλ. Σχήμα 3.163γ)

$$\vec{F}_3 = -\vec{T}_3 = \vec{T}_1 = 264,37\,\hat{e}_x + 353\,\hat{e}_y$$

ii) Η δύναμη που δέχεται ο βραχίονας ΑΓ στο άκρο του Γ είναι (βλ. Σχήμα 3.163γ)



Σχήμα 3.163γ *Οι δυνάμεις στους δύο βραχίονες*

$$\vec{F}_4 = -\vec{T}_4 = \vec{T}_2 = -264,7\,\hat{e}_x + 147,1\,\hat{e}_y$$

δ) Η δύναμη που ασκεί ο βραχίονας ΑΓ (βλ. Σχήμα 3.163β):

i) στον τοίχο, είναι

$$T_{4x} = T_4 \sin 63^\circ = T_2 \sin 63^\circ = 262\,N$$

ii) στο δάπεδο, είναι

$$T_{4y} = -T_4 \cos 63^\circ = -T_2 \cos 63^\circ = -133,5N$$

Λύση 30.
Από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής παίρνουμε

$$m\frac{dv}{dt} = F + F_a = F_0\cos\omega t - bv$$

ή

$$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{i}$$

Αυτή είναι γραμμική διαφορική εξίσωση της οποίας η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\int \frac{b}{m}dt}\left[c + \int e^{\int \frac{b}{m}dt}\frac{F_0}{m}\cos\omega t\, dt\right] \\ &= e^{-\int \frac{b}{m}dt}\left[c + \frac{F_0}{m}\int e^{\frac{b}{m}t}\cos\omega t\, dt\right] \end{aligned} \tag{ii}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της (ii) χρησιμοποιώντας κατά παράγοντες ολοκλήρωση

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{m}{b}e^{\frac{b}{m}t}\right)'\cos\omega t\, dt \\ &= \frac{m}{b}e^{\frac{b}{m}t}\cos\omega t - \int \frac{m}{b}e^{\frac{b}{m}t}(-\omega\sin\omega t)\, dt \\ &= \frac{m}{b}e^{\frac{b}{m}t}\cos\omega t + \frac{m\omega}{b}\int \left(\frac{m}{b}e^{\frac{b}{m}t}\right)'\sin\omega t\, dt \\ &= \frac{m}{b}e^{\frac{b}{m}t}\cos\omega t + \frac{m^2\omega}{b^2}\left[e^{\frac{b}{m}t}\sin\omega t - \int e^{\frac{b}{m}t}\omega\cos\omega t\, dt\right] \\ &= \frac{m}{b}e^{\frac{b}{m}t}\cos\omega t + \frac{m^2\omega}{b^2}e^{\frac{b}{m}t}\sin\omega t - \frac{m^2\omega^2}{b^2}I \end{aligned}$$

οπότε

$$I + \frac{m^2\omega}{b^2}I = \frac{m}{b}e^{\frac{b}{m}t}\cos\omega t + \frac{m^2\omega}{b^2}e^{\frac{b}{m}t}\sin\omega t$$

ή

$$\frac{b^2 + m^2\omega}{b^2}I = \frac{m}{b}e^{\frac{b}{m}t}\cos\omega t + \frac{m^2\omega}{b^2}e^{\frac{b}{m}t}\sin\omega t$$

Επομένως,

$$I = \frac{b^2}{b^2 + m^2\omega^2}\left(\frac{m}{b}e^{\frac{b}{m}t}\cos\omega t + \frac{m^2\omega}{b^2}e^{\frac{b}{m}t}\sin\omega t\right)$$

Έτσι η (ii) γίνεται

$$v(t) = ce^{-\frac{b}{m}t} + F_0\frac{b}{b^2 + m^2\omega^2}\cos\omega t - F_0\frac{m\omega}{b^2 + m^2\omega^2}\sin\omega t \tag{iii}$$

Επειδή $v(0) = v_0$ η (iii) δίνει

$$c = v_0 - F_0\frac{bm}{b^2 + m^2\omega^2}$$

οπότε από την (iii) προκύπτει ότι η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος είναι

$$v(t) = v_0e^{-\frac{b}{m}t} - F_0\frac{b}{b^2 + m^2\omega}e^{-\frac{b}{m}t} + F_0\frac{b}{b^2 + m^2\omega^2}\cos\omega t - F_0\frac{m\omega}{b^2 + m^2\omega^2}\sin\omega t$$

β) Μετά από αρκετό χρόνο $(t \to +\infty)$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{b}{m}t} = 0$$

οπότε η (iii) γίνεται

$$v(t) = F_0\frac{b}{b^2 + m^2\omega^2}\cos\omega t - F_0\frac{m\omega}{b^2 + m^2\omega^2}\sin\omega t$$

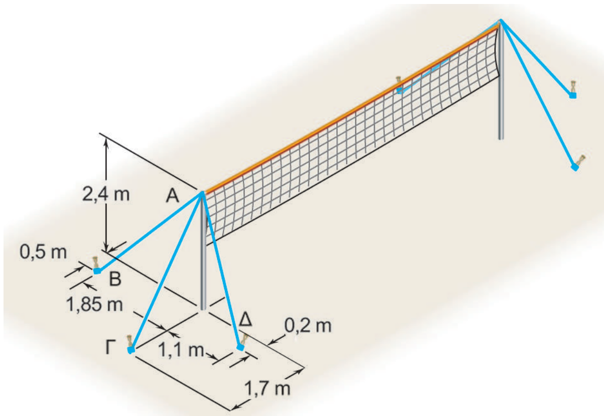
Λύση 31.

α) Αν $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3, \vec{T}_4$ οι τάσεις που ασκούνται στον στύλο από τα σχοινιά ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ και το δίχτυ αντίστοιχα και $\vec{F}$ η δύναμη που δέχεται ο στύλος από το έδαφος, όπου

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= 180\,\hat{e}_z \\
\vec{T}_1 &= T_1\,\hat{e}_1 \\
\vec{T}_2 &= T_2\,\hat{e}_2 \qquad (i) \\
\vec{T}_3 &= T_3\,\hat{e}_3 \\
\vec{T}_4 &= T_4(-\hat{e}_x) = -200\,\hat{e}_x
\end{aligned}$$

όπου $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των σχοινιών ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ, τα οποία είναι

$$\begin{aligned}
\hat{e}_1 &= \frac{\vec{AB}}{(AB)} \\
\hat{e}_2 &= \frac{\vec{A\Gamma}}{(A\Gamma)} \qquad (ii) \\
\hat{e}_3 &= \frac{\vec{A\Delta}}{(A\Delta)}
\end{aligned}$$



Σχήμα 3.164α *Δίχτυ βόλεϋ*

Χρησιμοποιώντας το σύστημα συντεταγμένων του Σχήματος 3.132β, οι συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ και Δ είναι

$$A(0,\,0,\,2,4),\; B(0,5,\,-1,85,\,0),\; \Gamma(1.7,\,0,\,0) \quad \text{και} \quad \Delta(0,2,\,1,1,\,0),$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\vec{AB} &= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (0,5,\,-1,85,\,-2,4) \\
\vec{A\Gamma} &= (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A, z_\Gamma - z_A) = (1,7,\,0,\,-2,4) \\
\vec{A\Delta} &= (x_\Delta - x_A, y_\Delta - y_A, z_\Delta - z_A) = (0,2,\,1,1,\,-2,4)
\end{aligned}$$

Έτσι, οι (ii) δίνουν

$$\hat{e}_1 = (0,16,\,-0,6,\,0,77),\; \hat{e}_2 = (0,59,\,0,\,-0,8)$$

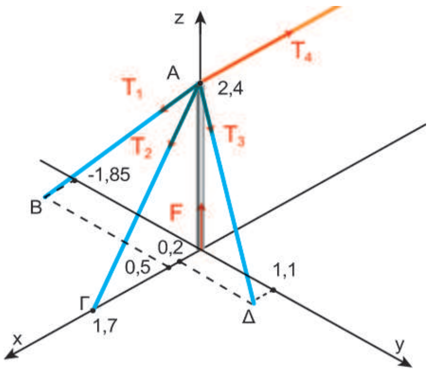
και

$$\hat{e}_3 = (0,08,\,0,4,\,0,9)$$

οπότε οι (i) γίνονται

$$\begin{aligned}
\vec{T}_1 &= T_1(0,16\,\hat{e}_x - 0,6\,\hat{e}_y + 0,77\,\hat{e}_z) \\
\vec{T}_2 &= T_2(0,59\,\hat{e}_x - 0,8\,\hat{e}_z) \\
\vec{T}_3 &= T_3(0,08\,\hat{e}_x + 0,4\,\hat{e}_y + 0,9\,\hat{e}_z)
\end{aligned}$$

Επειδή ο στύλος ισορροπεί, το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που δέχεται είναι μηδέν, οπότε



Σχήμα 3.164β *Δυνάμεις που δέχεται ο στύλος*

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 + \vec{T}_4 + \vec{F} = \vec{0}$$

ή $T_1(0,16\,\hat{e}_x - 0,6\,\hat{e}_y + 0,77\,\hat{e}_z) + T_2(0,59\,\hat{e}_x - 0,8\,\hat{e}_z) + T_3(0,08\,\hat{e}_x + 0,4\,\hat{e}_y + 0,9\,\hat{e}_z) - 200\,\hat{e}_x + 180\,\hat{e}_z = \vec{0}$

ή $(0,16T_1 + 0,59T_2 + 0,08T_3 - 200)\,\hat{e}_x + (-0,6T_1 + 0,4T_3)\,\hat{e}_y + (0,77T_1 - 0,8T_2 + 0,9T_3 + 180)\,\hat{e}_z = \vec{0}$.

Από τη διανυσματική αυτή εξίσωση προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
0,16T_1 + 0,59T_2 + 0,08T_3 - 200 &= 0 \\
-0,6T_1 + 0,4T_3 &= 0 \\
0,77T_1 - 0,8T_2 + 0,9T_3 + 180 &= 0
\end{aligned}$$

Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων ως προς T_1, T_2, T_3, του οποίου η λύση προκύπτει

$$T_1 = 36,47\,N,\; T_2 = 321,7,\; T_3 = 54,7$$

και τα αντίστοιχα διανύσματα προκύπτουν από τις (i)

$$\begin{aligned}\vec{T}_1 &= 36,47(0,16\,\hat{e}_x - 0,6\,\hat{e}_y + 0,77\,\hat{e}_z) = 5,83\,\hat{e}_x - 21,88\,\hat{e}_y + 28,08\,\hat{e}_z\\ \vec{T}_2 &= 321,7(0,59\,\hat{e}_x - 0,8\,\hat{e}_z) = 160,85\,\hat{e}_x - 257,4\,\hat{e}_z\\ \vec{T}_3 &= 54,7(0,08\,\hat{e}_x + 0,4\,\hat{e}_y + 0,9\,\hat{e}_z) = 4,37\,\hat{e}_x + 21,88\,\hat{e}_y + 49,23\,\hat{e}_z\end{aligned}$$

β) Η γωνία θ των σχοινιών ΑΒ και ΑΔ είναι η γωνία των αντίστοιχων μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{e}_1$ και $\hat{e}_3$, οπότε

$$\cos\theta = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = 0,16 \cdot 0,08 - 0,6 \cdot 0,4 + 0,77 \cdot 0,9 = 0,47$$

Άρα,

$$\theta = \cos^{-1}(0,47) = 62^\circ$$

γ) Η προβολή της T_1 (που έχει τη διεύθυνση του σχοινιού ΑΒ) στην κατεύθυνση του σχοινιού ΑΔ είναι

$$T_{1A\Delta} = T_1 \cos\theta$$

όπου θ η γωνία της T_1, με το ΑΔ, οπότε σύμφωνα με το (β)

$$T_{1A\Delta} = 36,47 \cdot 0,47 = 17,14\,N.$$

Λύση 32.

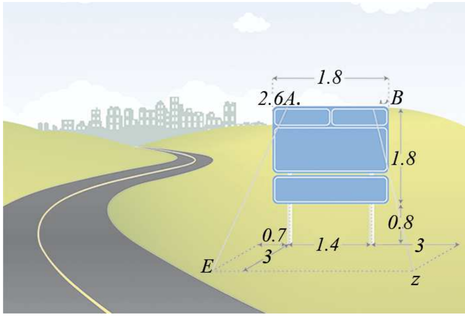
Θεωρώντας το σύστημα συντεταγμένων του Σχήματος 3.165β.

▸ Αν P η πίεση του ανέμου, η κάθετη δύναμη στην πινακίδα είναι (A το εμβαδόν της)

$$\vec{F} = P \cdot A(-\hat{e}_x) = -P \cdot 1,8 \cdot 1,8 \hat{e}_x = -3,24P\,\hat{e}_x$$

▸ Για να ισορροπεί η πινακίδα πρέπει το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που δέχεται να είναι μηδέν, δηλαδή, ονομάζοντας $\vec{R}$ τη δύναμη που δέχεται το στήριγμα της πινακίδας από το έδαφος, ισχύει

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F} + \vec{R} = 0 \qquad (i)$$



Σχήμα 4.165α *Στήριξη πινακίδας*

Από το Σχήμα 3.165β φαίνεται ότι τα διανύσματα των τάσεων των δύο συρματόσχοινων είναι

$$\vec{T}_1 = T_1\,\hat{e}_1 \quad \text{και} \quad \vec{T}_2 = T_2\,\hat{e}_2 \qquad (ii)$$

όπου $\hat{e}_1$ και $\hat{e}_2$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των συρματόσχοινων AE και BZ αντίστοιχα, τα οποία είναι

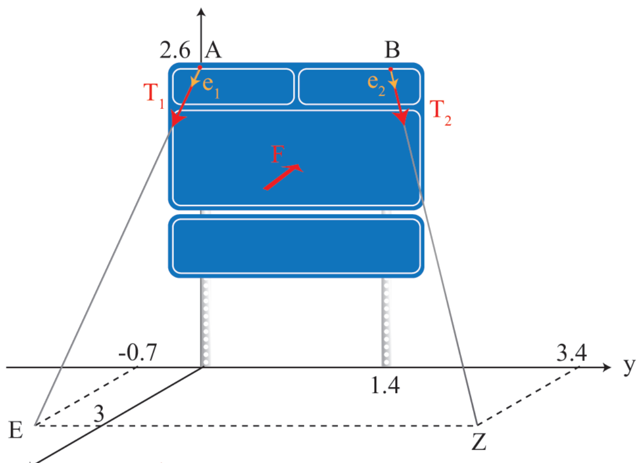
$$\hat{e}_1 = \frac{\overrightarrow{AE}}{(AE)} \quad \text{και} \quad \hat{e}_2 = \frac{\overrightarrow{BZ}}{(BZ)} \qquad (iii)$$

Από το Σχήμα 3.165β φαίνεται ότι οι συντεταγμένες των σημείων A, B, E και Z είναι

$$A(0,0,2.6),\ B(0,1.4,2.6),\ E(3,-0.7,0) \ \text{ και } \ Z(3,3.4,0),$$

οπότε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= (x_E - x_A, y_E - y_A, z_E - z_A)\\ &= (3,\ -0,7,\ -2,6)\\ \overrightarrow{BZ} &= (x_Z - x_B, y_Z - y_B, z_Z - z_B)\\ &= (3,\ 2,\ -2,6)\end{aligned}$$



Σχήμα 4.165β *Σύστημα αξόνων*

Έτσι, οι (iii) δίνουν

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= \frac{(3,\ -0,7,\ -2,6)}{\sqrt{3^2 + (-0,7)^2 + (-2,6)^2}}\\ &= 0,74\,\hat{e}_x - 0,17\,\hat{e}_y - 0,65\hat{e}_z\\ \hat{e}_2 &= \frac{(3,\ 2,\ -2,6)}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-2,6)^2}}\\ &= 0,67\,\hat{e}_x + 0,45\,\hat{e}_y - 0,58\,\hat{e}_z\end{aligned}$$

οπότε από τις (ii) προκύπτει

$$\begin{aligned}\vec{T}_1 &= T_1(0,74\,\hat{e}_x - 0,17\,\hat{e}_y - 0,65\,\hat{e}_z)\\ \vec{T}_2 &= T_2(0,67\,\hat{e}_x + 0,45\,\hat{e}_y - 0,58\,\hat{e}_z)\end{aligned}$$

Έτσι, αντικαθιστώντας στην (i) παίρνουμε (η R είναι κατακόρυφη, οπότε $\vec{R} = R\hat{e}_z$)

$$T_1(0,74\,\hat{e}_x - 0,17\,\hat{e}_y - 0,65\,\hat{e}_z) + T_2(0,67\,\hat{e}_x + 0,45\,\hat{e}_y - 0,58\,\hat{e}_z) - 3,24P\,\hat{e}_x + R\,\hat{e}_z = 0$$

ή $\quad (0,74T_1 + 0,67T_2 - 3,24P)\,\hat{e}_x + (-0,17T_1 + 0,45T_2)\,\hat{e}_y + (-0,65T_1 - 0,58T_2 + R)\,\hat{e}_z = 0$

Από τη διανυσματικη αυτή εξίσωση προκύπτει το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} 0,74T_1 + 0,67T_2 - 3,24P &= 0 \\ -0,17T_1 + 0,45T_2 &= 0 \\ -0,65T_1 - 0,58T_2 + R &= 0 \end{aligned}$$

Από την δεύτερη εξίσωση του συστήματος αυτού προκύπτει

$$T_2 = 0,38T_1, \tag{iv}$$

οπότε αντικαθιστώντας στη πρώτη παίρνουμε

$$0,74T_1 + 0,25T_1 = 3,24P \ \Leftrightarrow\ 0,99T_1 = 3,24P \ \Leftrightarrow\ T_1 = 3,4P \tag{v}$$

Επειδή το όριο θραύσης του συρματόσχοινου ΑΕ είναι $2000N$,

$$T_1 < 2000,$$

οπότε, λόγω της (v), ισχύει

$$3,4P < 2000 \ \Leftrightarrow\ P < 588,2\,\frac{N}{m^2} \tag{vi}$$

Επειδή το όριο θραύσης του συρματόσχοινου ΒΖ είναι $1500N$,

$$T_2 < 1500$$

Από τις (iv) και (v) προκύπτει

$$T_2 = 0,38T_1 = 0,38 \cdot 3,4P = 1,3P$$

οπότε
$$1,3P < 1500 \ \Leftrightarrow\ P < 1153,8\frac{N}{m^2} \tag{vii}$$

Από τις (vi) και (vii) προκύπτει ότι τα συρματόσχοινα δεν σπάνε όσο για την πίεση του ανέμου ισχύει

$$P < 588,2\,\frac{N}{m^2}$$