Ἀσκήσεις 4.1.1 (σελ. 172)

Λύση 2.

Χρησιμοποιώντας τους άξονες του Σχήματος 4.7 το διάνυσμα θέσης, τη χρονική στιγμή t, του Σ_1 είναι

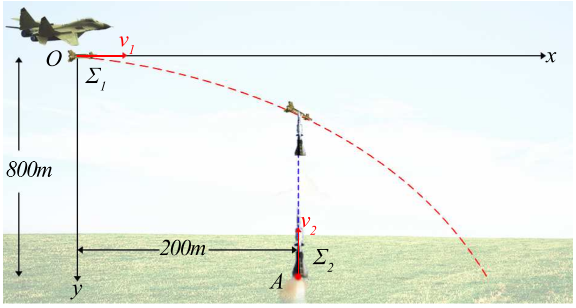
$$\vec{r}_1(t) = v_1 t\hat{e}_x + \frac{1}{2}gt^2\hat{e}_y$$

όπου

$$v_1 = 200\frac{1000}{3600} = 55,6\frac{m}{s}$$

οπότε

$$\vec{r}_1(t) = 55,6t\hat{e}_x + \frac{1}{2}gt^2\hat{e}_y$$



Σχήμα 4.7

Το βλήμα Σ_2 βάλλεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 1s$ με ταχύτητα $-v_2\hat{e}_y$ από το σημείο $(0, h)$, οπότε το διάνυσμα θέσης του τη χρονική στιγμή t είναι

$$\vec{r}_2(t) = 200\hat{e}_x + \left[h - v_2(t-1) + \frac{1}{2}(t-1)^2\right]\hat{e}_y$$

ή

$$\vec{r}_2(t) = 200\hat{e}_x + \left[800 - v_2(t-1) + \frac{1}{2}gt^2 - gt + \frac{1}{2}g\right]\hat{e}_y$$

Το βλήμα χτυπάει την βόμβα τη χρονική στιγμή t για την οποία

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) \Leftrightarrow 55,6t\hat{e}_x + \frac{1}{2}gt^2\hat{e}_y = 200\hat{e}_x + \left[800 - v_2(t-1) + \frac{1}{2}gt^2 - gt + \frac{1}{2}g\right]\hat{e}_y$$

οπότε

$$55,6t = 200 \qquad (i)$$

και

$$\frac{1}{2}gt^2 = 800 - v_2(t-1) + \frac{1}{2}gt^2 - gt + \frac{1}{2}g \qquad (ii)$$

Από την (i) προκύπτει

$$t = \frac{200}{55,6} = 3,6s$$

οπότε η (ii) δίνει

$$v_2(t-1) = 800 - g\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Άρα,

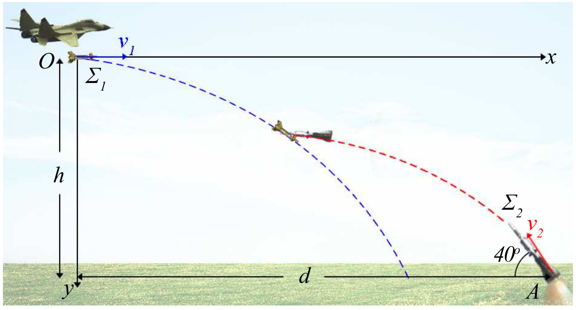
$$v_2 = \frac{800 - 9,81\,(3,6 - 0,5)}{3,6 - 1} = 296\frac{m}{s}$$

3B. *Τη χρονική στιγμή $t = 0\,s$ αφήνεται μία βόμβα Σ_1 σε ύψος h από ένα αεροπλάνο που πετάει οριζόντια με ταχύτητα v_1 και τη χρονική στιγμή t από το σημείο A του Σχήματος 4.8 βάλλεται ένα βλήμα Σ_2 με ταχύτητα v_2, που σχηματίζει γωνία 40^0 με το οριζόντιο επίπεδο. Αν το βλήμα χτυπήσει τη βόμβα, τότε να βρεθούν συναρτήσει των v_1, v_2, d, h και g η χρονική στιγμή t_0 βολής του Σ_2 και η χρονική στιγμή στην οποία γίνεται η σύγκρουση καθώς και την απόσταση του από το έδαφος του σημείου στο οποίο γίνεται.*

Λύση 3B.

Χρησιμοποιώντας τους άξονες του Σχήματος 4.8 η εξίσωση κίνησης της βόμβας είναι (βλ. Παράδειγμα 4.5)

$$\vec{r}_1(t) = v_1 t\hat{e}_x + \frac{1}{2}gt^2\hat{e}_y$$



Σχήμα 4.8

Η επιτάχυνση του βλήματος είναι

$$\vec{a}_2 = g\hat{e}_y$$

και η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t_0

$$\vec{v}_{20} = -v_2\cos 40^0\hat{e}_x - v_2\sin 40^0\hat{e}_y = -0,8v_2\hat{e}_x - 0,6\hat{e}_y$$

οπότε η εξίσωση της ταχύτητάς του είναι

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2(t) &= \vec{v}_{20} + \int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)dt \\
&= -0,8v_2\hat{e}_x - 0,6\hat{e}_y + \int_{t_0}^{t} g\hat{e}_y \\
&= -0,8v_2\hat{e}_x + \left[-0,6\hat{e}_y + g(t-t_0)\right]\hat{e}_y
\end{aligned}$$

και η εξίσωση κίνησής του είναι (το διάνυσμα θέσης του Σ_2 τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\vec{r}_{20} = d\hat{e}_x + h\hat{e}_y$

$$\begin{aligned}
\vec{r}_2(t) &= \vec{r}_{20} + \int_{t_0}^{t}\vec{v}_2(t)dt \\
&= d\hat{e}_x + h\hat{e}_y + \int_{t_0}^{t}\left\{-0,8v_2\hat{e}_x + \left[-0,6v_2 + g(t-t_0)\right]\hat{e}_y\right\}dt \\
&= \left[d - 0,8v_2(t-t_0)\right]\hat{e}_x + \left[h - (0,6v_2 + gt_0)t + \frac{1}{2}gt^2\right]\hat{e}_y
\end{aligned}$$

Το βλήμα χτυπάει τη βόμβα αν

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t)$$

ή

$$v_1 t\hat{e}_x + \frac{1}{2}gt^2\hat{e}_y = \left[d - 0,8(t-t_0)\right]\hat{e}_x + \left[h - (0,6v_2 + gt_0)t + \frac{1}{2}gt^2\right]\hat{e}_y$$

ή

$$\begin{aligned}
v_1 t &= d - 0,8v_2(t-t_0) && (i)\\
\frac{1}{2}gt^2 &= h - \left[(0,6v_2 + gt_0)t + \frac{1}{2}gt^2\right] \Leftrightarrow h - (v_2 + gt_0)t = 0 && (ii)
\end{aligned}$$

Λύνοντας την (i) ως προς t προκύπτει η χρονική στιγμή της συνάντησης των δύο βλημάτων

$$t_\sigma = \frac{d + 0,8v_2t_0}{v_1 + 0,8v_2} \qquad (iii)$$

και αντικαθιστώντας στη (ii) παίρνουμε

$$h - 0,6v_2\frac{d + 0,8v_2t_0}{v_1 + 0,8v_2} - gt_0\frac{d + 0,8v_2t_0}{v_1 + 0,8v_2} = 0$$

ή

$$-0,8v_0gt_0^2 - (0,48v_2^2 + gd)t_0 + h(v_1 + 0,8v_2) = 0 \qquad (iv)$$

οπότε η χρονική στιγμή της βολής t_0 είναι η θετική ρίζα της δευτεροβάθμιας αυτής εξίσωσης, της οποίας η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = (0,48v_2^2 + gd)^2 - 4(-0,8v_2 g)h(v_1 + 0,8v_2) = (0,48v_2^2 + gd)^2 + 3,2v_2(v_1 + 0,8v_2)gh > 0$$

Έτσι, λύνοντας την εξίσωση αυτή βρίσκουμε το t_0, συναρτήσει των v_1, v_2, d, h, g και στη συνέχεια τη χρονική στιγμή συνάντησης των δύο βλημάτων από την (iii).

Η απόσταση από το έδαφος στο οποίο γίνεται η σύγκρουση είναι (βλ. Σχήμα 4.8)

$$l = h - y_2(t_\sigma)$$

όπου $y_2(t_\sigma)$ η τεταγμένη του Σ_2 τη χρονική στιγμή t_σ της συνάντησης, οπότε

$$l = h - [h - (0,6v_2 + gt_0)t_\sigma] = (0,6v_2 + gt_0)t_\sigma$$

Έτσι λόγω της (iii),

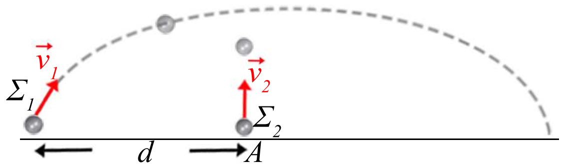
$$l = (0,6v_2 + gt_0)\frac{d + 0,8v_2 t_0}{v_1 + 0,8v_2} = \frac{0,6v_2 + gt_0}{v_1 + 0,8v_2}\,(d + 0,8v_2 t_0)$$

Λύση 5.

Η σφαίρα Σ_2 χτυπάει την πέτρα αν έχει λύση η διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) \qquad (i)$$

όπου $\vec{r}_1(t)$ και $\vec{r}_2(t)$ οι διανυσματικές εξισώσεις κίνησης των Σ_1 και Σ_2. Χρησιμοποιώντας το σύστημα αξόνων του Σχήματος 4.9 και θεωρώντας ως $t = 0$ τη χρονική στιγμή βολής της πέτρας:



Σχήμα 4.9

- η επιτάχυνσή της είναι

$$\vec{a}_1 = -g\hat{e}_y,$$

και η αρχική της ταχύτητα

$$\vec{v}_{01} = v_1 \cos\theta \hat{e}_x + v_1 \sin\theta \hat{e}_y$$

οπότε η εξίσωση της ταχύτητάς της είναι (βλ. Παράδειγμα 4.5)

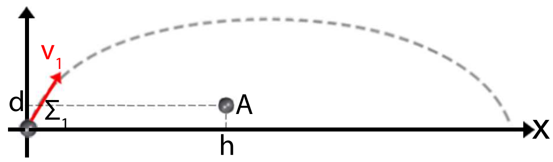
$$\vec{v}_1 = v_1 \cos\theta \hat{e}_x + (v_1 \sin\theta - gt)\hat{e}_y$$

και η εξίσωση κίνησής της (η αρχική της θέση είναι $\vec{r}_{01} = 0$)

$$\vec{r}_1 = tv_1 \cos\theta \hat{e}_x + (tv_1 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2)\hat{e}_y$$

- η επιτάχυνση της πέτρας είναι

$$\vec{a}_2 = -g\hat{e}_y$$



Σχήμα 4.9б

και η ταχύτητά της τη χρονική στιγμή t_0

$$\vec{v}_{02} = v_2\hat{e}_y$$

οπότε η εξίσωση της ταχύτητάς της είναι

$$\begin{aligned}\vec{v}_2(t) &= \vec{v}_{02} + \int_{t_0}^{t} \vec{a}_2 dt = v_2\hat{e}_y - g(t-t_0)\hat{e}_y \\ &= [v_2 - g(t-t_0)]\,\hat{e}_y\end{aligned}$$

Επίσης, η θέση της Σ_2 τη χρονική στιγμή $t_0 = \tau$ είναι

$$\vec{r}_{02} = d\hat{e}_x + h\hat{e}_y$$

οπότε η εξίσωσή της είναι

$$\begin{aligned}\vec{r}_2(t) &= \vec{r}_{02} + \int_{t_0}^{t} \vec{v}_2(t)dt \\ &= d\hat{e}_x + h\hat{e}_y + \int_{t_0}^{t} [(v_2 + gt_0) - gt]\,\hat{e}_y \\ &= d\hat{e}_x + \left[h + (v_2 + gt_0)(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2\right]\hat{e}_y\end{aligned}$$

Έτσι, η (i) δίνει

$$tv_1 \cos\theta \hat{e}_x + \left(tv_1 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{e}_y = d\hat{e}_x + \left[h + (v_2 + gt_0)(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2\right]\hat{e}_y$$

οπότε

$$tv_1 \cos\theta = d \qquad (ii)$$

και

$$tv_1 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 = h + (v_2 + gt_0)(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 \qquad (iii)$$

Η (ii) γράφεται

$$\begin{aligned}
tv_1\sin\theta &= h + (v_2 + gt_0)(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + \frac{1}{2}gt^2 \\
t\left[v_1\sin\theta - (v_2 + 2gt_0)\right] &= h - (v_2 + gt_0)t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2 \qquad (iv)
\end{aligned}$$

Απαλείφοντας τον χρόνο t από τις (ii) και (iv). Λύνουμε την (ii) ως προς t

$$t = \frac{d}{v_1\cos\theta}$$

και αντικαθιστούμε στην (iv)

$$\begin{aligned}
d\tan\theta - \frac{d}{v_1\cos\theta}v_2 - \frac{2gdt_0}{v_1\cos\theta} &= h - v_2t_0 - \frac{3}{2}gt_0^2 \\
\left(t_0 - \frac{d}{v_1\cos\theta}\right)v_2 &= h - d\tan\theta - \frac{3}{2}gt_0^2 + \frac{2gdt_0}{v_1\cos\theta}
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
v_2 &= \frac{h - d\tan\theta - \frac{3}{2}gt_0^2 + \frac{2gdt_0}{v_1\cos\theta}}{t_0 - \frac{d}{v_1\cos\theta}} \\
&= \frac{hv_1\cos\theta - dv_1\sin\theta - \frac{3}{2}gt_0^2v_1\cos\theta + 2gdt_0}{t_0v_1\cos\theta - d}
\end{aligned}$$

Λύση 7.

α) Η επιβράδυνση του κιβωτίου είναι

$$a = \frac{T}{m} = \frac{\mu m g}{m} = \mu g = 0,12 \cdot 9,81 = 1,2\frac{m}{s^2}$$

οπότε οι εξισώσεις κίνησής του είναι

$$v = v_1 - at \quad \Leftrightarrow \quad v = 10 - 1,2t$$

$$x = v_1 t - \frac{1}{2}at^2 \quad = \quad x = 10t - \frac{1}{2}1,2t^2$$

Τη χρονική στιγμή t_1 που το κιβώτιο φτάνει στο άκρο του τραπεζιού

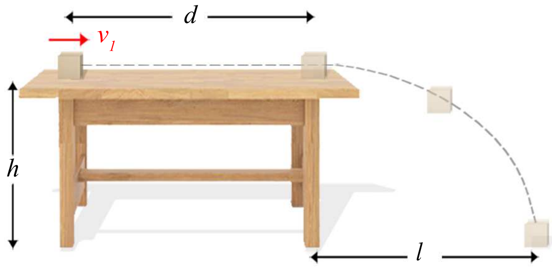
$$x = 2 \;\Leftrightarrow\; 10t - \frac{1}{2}1,2t^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; 0,6t^2 - 10t + 2 = 0$$

οπότε

$$t_1 = \frac{10 - \sqrt{10^2 - 4 \cdot 0,6 \cdot 2}}{1,2} = 0,2s$$

και

$$v_1 = 10 - 1,2t_1 = 10 - 1,2 \cdot 0,2 = 9,76\frac{m}{s}$$



Σχήμα 4.11

Θεωρώντας ως χρονική στιγμή $t' = 0$ την $t = t_1 = 0,2s$ την οποία το κιβώτιο εγκαταλείπει το τραπέζι οι εξισώσεις κίνησής του είναι

$$x = v_1 t'$$

$$y = \frac{1}{2}g t'^2$$

Τη χρονική στιγμή t'_2, την οποία το κιβώτιο φτάνει στο έδαφος ισχύει

$$y = h \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}g t'^2 = h \;\Leftrightarrow\; t'_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,3}{9,81}} = 0,51s$$

Επομένως, το κιβώτιο φτάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή

$$t_1 + t'_2 = 0,2 + 0,51 = 0,71s$$

και η απόσταση στην οποία χτυπάει στο έδαφος είναι

$$x(t'_2) = v_1 t'_2 = 10 \cdot 0,51 = 5,1m$$

β) Οι συνιστώσες της ταχύτητας του κιβωτίου τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος είναι

$$v_{x_2} = v_0 = 9,76\frac{m}{s}$$

$$v_{y_2} = g t'_2 = 9,81 \cdot 0,51 = 5\frac{m}{s}$$

οπότε το μέτρο της ταχύτητάς του είναι

$$v_2 = \sqrt{v_{x2}^2 + v_{y2}^2} = \sqrt{9,76^2 + 5^2} = 11\frac{m}{s}$$

και για τη γωνια θ που σχηματίζει η $\vec{v}$ με τον οριζόντιο άξονα είναι

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_{y2}}{v_{x_2}} = \tan^{-1}\frac{5}{9,76} = 27,13^\circ$$