Ἀσκήσεις 5.5.1 (σελ. 283)

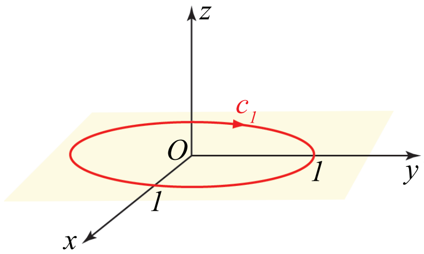
Λύση 1.

α) Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου c_1 είναι

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 0, \quad 0 \le t < 2\pi,$$

οπότε

$$\dot{x} = -\sin t,\ \dot{y} = \cos t,\ \dot{z} = 0$$



Σχήμα 5.74 *Ο κύκλος c_1 διαγράφεται κατά την αρνητική φορά.*

Η παραμετρική αυτή παράσταση αντιστοιχεί σε θετική φορά διαγραφής του κύκλου (αντίθετη των δεικτών του ρολογιού). Ο c_1 όμως διαγράφεται κατά την αρνητική φορά, οπότε

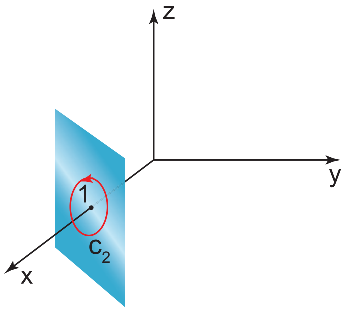
$$\begin{aligned} W &= \int_{c_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ &= -\int_0^{2\pi} \left[a\cos^2 t\cdot \sin t(-\sin t) - \beta\cos t\cdot \sin^2 t\cos t\right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a+\beta)\cos^2 t\sin^2 t dt \\ &= (a+\beta)\cdot\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

β) Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου c_2 είναι

$$x = 1,\ y = \cos t,\ z = \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$$

οπότε

$$\dot{x} = 0,\ \dot{y} = -\sin t,\ \dot{z} = \cos t$$



Σχήμα 5.746 *Ο κύκλος c_2 διαγράφεται κατά τη θετική φορά.*

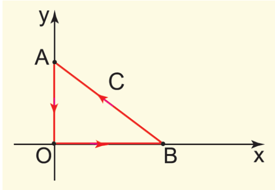
Η παραμετρική αυτή παράσταση αντιστοιχεί σε θετική φορά διαγραφής του κύκλου (αντίθετη των δεικτών του ρολογιού), οπότε

$$\begin{aligned} \int_{c_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi} \left[a\cdot 1^2\cos t\cdot 0 - \beta\cos^2 t(-\sin t)\right] dt \\ &= \int_0^{\pi} (a+\beta)\cos^2 t\sin t dt \\ &= \frac{2(a+\beta)}{3} \end{aligned}$$

Λύση 2.

Σύμφωνα με την (6.2) το I γράφεται

$$I = \int_{OB}(axy^2dx - \beta ydy) + \int_{BA}(axy^2dx - \beta ydy) + \int_{AO}(axy^2dx - \beta ydy). \qquad (i)$$



Σχήμα 5.75 *Η γραμμή $c = OBAO$ διαγράφεται κατά τη θετική φορά.*

Το ευθύγραμμο τμήμα OB έχει παραμετρικές εξισώσεις (βλ. Σχήμα 5.756)

$$OB: x(t) = t, \ \ y(t) = 0$$

οπότε

$$\dot{x}(t) = 1, \ \ \dot{y}(t) = 0$$

και τα σημεία $O(0,0)$ και $B(1,0)$ αντιστοιχούν στις τιμές $t_O = 0$ και $t_B = 1$ της παραμέτρου t. Επομένως,

$$\int_{OB}(xy^2dx - ydy) = \int_{t_O}^{t_B}(axy^2\dot{x} - \beta y\dot{y})dt = \int_0^1(at \cdot 0^2 \cdot 1 - 0)dt = 0.$$

Το ευθύγραμμο τμήμα BA έχει εξίσωση (βλ. Σχήμα 6.11) $y = 1 - x$ και τα σημεία $B(1,0)$ και $A(0,1)$ αντιστοιχούν στις τιμές $x_B = 1$ και $x_A = 0$ της παραμέτρου x, οπότε

$$\begin{aligned}
\int_{BA}(axy^2dx - \beta ydy) &= \int_{x_B}^{x_A}\left[ax(1-x)^2 - \beta(1-x)(1-x)'\right]dx \\
&= \int_1^0(ax(1-x)^2 - \beta(1-x)(-1))dx \\
&= a\int_1^0 x(1-x)^2dx + \beta\int_1^0(1-x)dx \\
&= \frac{a}{12} + \frac{\beta}{2}
\end{aligned}$$

Το ευθύγραμμο τμήμα AO έχει παραμετρικές εξισώσεις (βλ. Σχήμα 5.756).

$$AO: x(t) = 0, \ \ y(t) = t$$

και τα σημεία $A(0,1)$ και $O(0,0)$ αντιστοιχούν στις τιμές $t_A = 1$ και $t_O = 0$ της παραμέτρου t, οπότε

$$\begin{aligned}
\int_{AO}(axy^2dx - \beta ydy) &= \int_{t_A}^{t_O}(axy^2\dot{x} - \beta y\dot{y})dt \\
&= \int_1^0(a \cdot 0 \cdot t^2 \cdot 0 - \beta t \cdot 1)dt \\
&= \int_1^0 -\beta tdt \\
&= \beta\int_0^1 tdt = \frac{\beta}{2}
\end{aligned}$$

Έτσι η (i) δίνει

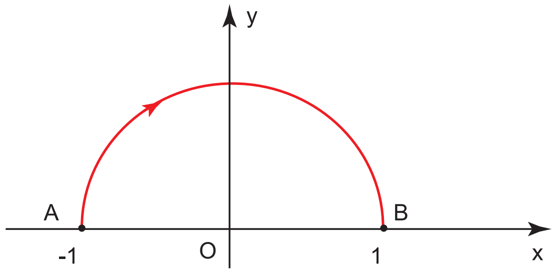
$$I = 0 - \frac{7a}{12} + \frac{\beta}{2}$$

Λύση 3.
Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου αυτού είναι

$$x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,$$

οπότε

$$\dot{x}(t) = -\sin t,\ \dot{y}(t) = \cos t$$



Σχήμα 5.74 *Το τόξο AB*

και τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(1,0)$ αντιστοιχούν στις τιμές $t_A = \pi$ και $t_B = 0$ της παραμέτρου t. Επομένως

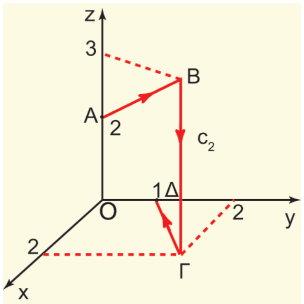
$$\begin{aligned}\int_{AB} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{AB} \left[ax(t)y(t)\dot{x}(t) - \beta x^2(t)\dot{y}(t)\right] dt \\ &= \int_{\pi}^{0} \left[a\cos t \sin t(-\sin t) - \beta(\cos t)^2 \cdot \cos t\right] dt \\ &= 0\end{aligned}$$

Λύση 4.

Η στροφή της $\vec{F}$ είναι

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2} & \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2} & \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2} \end{vmatrix} = \hat{e}_x\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)\right] \\
&- \hat{e}_y\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)\right]+\hat{e}_z\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)\right] \\
&= \hat{e}_x\left[-\frac{2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}-\left(-\frac{2zy}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)\right]-\hat{e}_y\left[-\frac{2zx}{(x^2+y^2+z^2)^2}-\left(-\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)\right] \\
&+ \hat{e}_z\left[-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}-\left(-\frac{2yx}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)\right] = 0,
\end{aligned}$$

και το πεδίο ορισμού της $A = R^3 - \{(0,0,0)\}$ είναι απλά συνεκτικό υποσύνολο του R^3, οπότε η $\vec{F}$ είναι συντηρητική στο A.



Σχήμα 5.75 *Η γραμμή* $AB\Gamma\Delta$

Έτσι:

α) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\vec{F}$ σε κάθε κλειστή γραμμή του A είναι μηδέν, οπότε

$$\oint_{c_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0.$$

β) Λόγω της μορφής της γραμμής c_2, ο άμεσος υπολογισμός του $\int_{c_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ είναι αρκετά περίπλοκος, οπότε, λόγω του ότι η $\vec{F}$ είναι συντηρητική,

$$\int_{c_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = U(\Delta)-U(A) = U(0,1,0)-U(0,0,2) \qquad (i)$$

όπου

$$\begin{aligned}
U(x,y,z) &= \int_0^x \frac{t}{t^2+y^2+z^2}dt+\int_0^y \frac{t}{0^2+t^2+z^2}dt+\int_1^z \frac{t}{0^2+0^2+t^2}dt \\
&= \int_0^x \frac{t}{t^2+y^2+z^2}dt+\int_0^y \frac{t}{t^2+z^2}dt+\int_1^z \frac{1}{t}dt \\
&= \int_{y^2+z^2}^{x^2+y^2+z^2} \frac{1}{2}\frac{1}{u}du+\int_{z^2}^{y^2+z^2} \frac{1}{2}\frac{1}{u}du+\int_1^z \frac{1}{t}dt
\end{aligned}$$

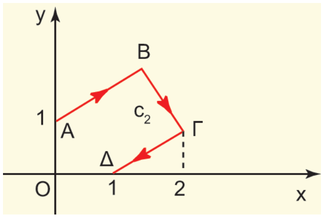
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\ln|u|\right]_{y^2+z^2}^{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{2}\left[\ln|u|\right]_{z^2}^{y^2+z^2} + \left[\ln|t|\right]_1^z \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+y^2+z^2) - \ln(y^2+z^2) + \ln(y^2+z^2) - \ln z^2\right] \\
&+ \ln|z| - \ln 1 = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2) - \ln|z| + \ln|z| \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)
\end{aligned}
$$

Έτσι, η (i) δίνει

$$\int_{c_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\left[\ln(0^2+1^2+0^2) - \ln(0^2+0^2+2^2)\right] = -\frac{1}{2}2\ln 2 = -\ln 2.$$

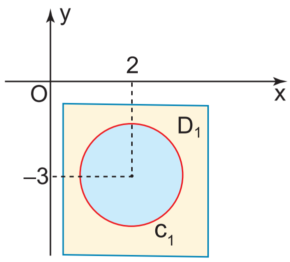
Λύση 6.

Το πεδίο ορισμού της $\vec{F}$ είναι το $A_F = R^2 - \{(0,0)\}$ και η στροφή της είναι



Σχήμα 5.76 *Η πολυγωνική γραμμή $AB\Gamma\Delta$*

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{-x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \hat{e}_x\left[0-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)\right]-\hat{e}_y\left[0-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]+\hat{e}_z\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right] \\
&= 0\hat{e}_x+0\hat{e}_y+\left[\frac{-(x^2+y^2)-(-x)2x}{(x^2+y^2)^2}-\frac{(x^2+y^2)-y2y}{(x^2+y^2)^2}\right]\hat{e}_z \\
&= \left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\hat{e}_z = 0
\end{aligned}$$



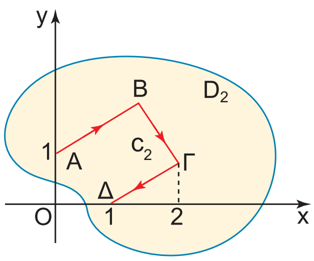
Σχήμα 5.76β *Το D_1 είναι απλά συνεκτικό χωρίο του R^2.*

Όμως το πεδίο ορισμού της $\vec{F}$ δεν είναι απλά συνεκτικό χωρίο του R^2.

α) Ο κύκλος $c_1 : (x-2)^2+(y+3)^2 = 1$ περιέχεται στο απλά συνεκτικό υποσύνολο D_1 του R^2 (βλ. Σχήμα 5.76β), οπότε ($\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$), η $\vec{F}$ είναι συντηρητική στο D_1 και

$$\oint_{c_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0.$$

β) Η γραμμή $c_2 = AB\Gamma\Delta$ περιέχεται στο απλά συνεκτικό υποσύνολο D_2 του R^2 (βλ. Σχήμα 5.76γ) και $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$, οπότε η $\vec{F}$ είναι συντηρητική στο D_2.



Σχήμα 5.76γ *Το D_2 είναι απλά συνεκτικό χωρίο του R^2.*

Έτσι

$$\int_{c_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = U(\Delta)-U(A) = U(1,0)-U(0,1), \qquad (i)$$

όπου

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_0^x \frac{y}{t^2+y^2}dt - \int_1^y \frac{0}{0^2+t^2}dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{\left(\frac{t}{y}\right)^2+1}\frac{1}{y}dt \\ &= \int_0^{\frac{x}{y}} \frac{du}{1+u^2} \\ &= \left[\tan^{-1} u\right]_0^{\frac{x}{y}} = \tan^{-1}\frac{x}{y} \end{aligned}$$

Έτσι η (i) δίνει

$$\begin{aligned} \int_{c_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= U(1,0) - U(0,1) = \tan^{-1}\frac{1}{0} - \tan^{-1}\frac{0}{1} \\ &= \tan^{-1}(+\infty) - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

γ) Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει απλά συνεκτικό υποσύνολο του A_F που να περιέχει τον κύκλο $c_3 : x^2 + y^2 = 1$ του Σχήματος 5.76δ, οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την Παρατήρηση 5.;. Υπολογίζουμε, λοιπόν, το $\int_{c_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ με τον άμεσο τρόπο χρησιμοποιώντας τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου c_3

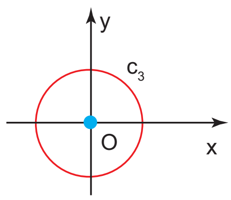
$$x(t) = \cos t,\ \ y(t) = \sin t, \quad 0 \le t < 2\pi$$

για τις οποίες ισχύει

$$\dot{x}(t) = -\sin t,\ \ \dot{y}(t) = \cos t$$

οπότε ($x^2 + y^2 = 1$)

$$\begin{aligned} \oint_{c_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{y}{x^2+y^2}\,\dot{x}(t) - \frac{x}{x^2+y^2}\,\dot{y}(t)\right)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin t}{1}(-\sin t) - \frac{\cos t}{1}\cos t\right)dt \\ &= -\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt \\ &= -\int_0^{2\pi} dt \\ &= -2\pi \end{aligned}$$



Σχήμα 5.76δ *Ο κύκλος* c_3

Γενικές ασκήσεις Κεφαλαίου 5.

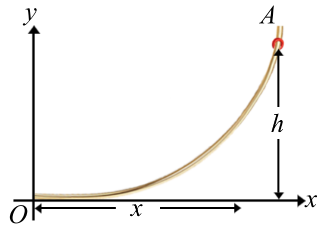
Λύση 48.

α) Επειδή η κάθετη αντίδραση που δέχεται το Σ από την παραβολή δεν παράγει έργο (είναι κάθετη στην ταχύτητα), η μόνη δύναμη που δέχεται το Σ και παράγει έργο είναι το βάρος, οπότε εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ με επίπεδο δυναμικής ενέργειας το $y = 0$, παίρνουμε

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \;\Leftrightarrow\; v^2 = 2g(h - y) \qquad (i)$$

β) Η κεντρομόλος επιτάχυνση του Σ είναι

$$a_k = \frac{v^2}{\rho} \qquad (ii)$$



Σχήμα 5.160 *Κίνηση σε παραβολή*

όπου ρ η ακτίνα καμπυλότητας, η οποία είναι

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} = \frac{\left[1 + (2x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{2} \qquad (iii)$$

οπότε, λόγω και των (i) και (iii), η (ii) δίνει

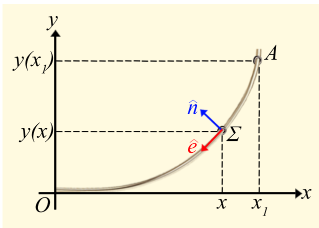
$$a_k = \frac{2g(h-y)}{\frac{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{2}} = 4g\frac{h - x^2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Για την επιτρόχια επιτάχυνση ισχύει

$$ma_\epsilon = B_\epsilon \qquad (v)$$

όπου B_ϵ η επιτρόχιος συνιστώσα του βάρους η οποία είναι (βλ. Σχήμα 5.160β)

$$\hat{\epsilon} = -\frac{\hat{e}_x + y'(x)\hat{e}_y}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} = -\frac{\hat{e}_x + 2x\hat{e}_y}{\sqrt{1+4x^2}} \qquad (vi)$$



Σχήμα 5.160β

Άρα $(\vec{B} = -mg\hat{e}_y)$,

$$B_\epsilon = \hat{\epsilon}\cdot\vec{B} = -\frac{2mgx}{\sqrt{1+4x^2}}$$

οπότε

$$a_\epsilon = \frac{B_\epsilon}{m} = -\frac{2gx}{\sqrt{1+4x^2}}$$

Επομένως, το μέτρο της επιτάχυνσης του Σ είναι

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_\epsilon^2 + a_\epsilon^2} = \sqrt{\left(4g\frac{h-x^2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(-\frac{2gx}{\sqrt{1+4x^2}}\right)^2} \\ &= \frac{2gx}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{x^2(1+4x^2)^2 + 4(h-x^2)^2} \end{aligned}$$

γ) Για τη δύναμη N που δέχεται ο δακτύλιος από την παραβολή ισχύει

$$m\frac{v^2}{\rho} = N + B_n \qquad (vii)$$

όπου

$$B_n = \vec{B}\cdot\hat{n} \qquad (viii)$$

και $\hat{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην παραβολή.
Επειδή $\hat{\epsilon}\cdot\hat{n} = 0$, από την (vi) και το Σχήμα 5.160β προκύπτει ότι

$$\hat{n} = \frac{-\hat{e}_x + 2x\hat{e}_y}{\sqrt{1+4x^2}}$$

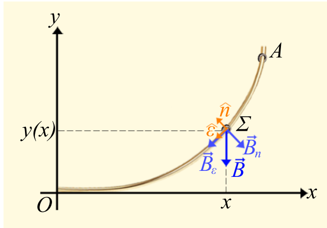
οπότε η $(viii)$ δίνει

$$B_n = -\frac{mg}{\sqrt{1+4x^2}}$$

Έτσι, από την (vii) και την (i) προκύπτει

$$\begin{aligned} N &= m\frac{v^2}{\rho} - B_n = \frac{2mg(h-y)}{\frac{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{2}} + \frac{mg}{\sqrt{1+4x^2}} \\ &= \frac{4mg(h-y)}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{mg}{\sqrt{1+4x^2}} \end{aligned}$$

Λύση 49.



Σχήμα 5.160 *Κίνηση σε παραβολή*

α) Το Σ δέχεται τις δυνάμεις του βάρους και της κάθετης αντίδρασης από την παραβολή, οπότε (η κάθετη αντίδραση δεν παράγει έργο) εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής θέσης (a, με $y = h_1$) και της τυχαίας θέσης του (β) στην οποία το Σ βρίσκεται σε ύψος (τεταγμένη) y, παίρνουμε

$$K_a + U_a = K_\beta + U_\beta \qquad (i)$$

οπότε, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το $y = 0$, αφού

$$h_1 = y(x_1) = x_1^2$$

η (i) γίνεται

$$0 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy(t) \;\Leftrightarrow\; v^2 = 2g(h_1 - y)$$

οπότε

$$v(t) = \sqrt{2g(h_1 - y)} = \sqrt{2g(x_1^2 - x^2)} \qquad (ii)$$

ii) Το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ταχύτητας του Σ είναι το εφαπτόμενο $\hat{\epsilon}$ στην τροχιά προς τα κάτω, το οποίο είναι

$$\hat{\epsilon} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{dx}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dx}\right|}$$

όπου

$$\vec{r}(x) = x\,\hat{e}_x + y\,\hat{e}_y = x\,\hat{e}_x + x^2\,\hat{e}_y$$

οπότε

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \hat{e}_x + 2x\,\hat{e}_y$$

και

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dx}\right| = \sqrt{1 + (2x)^2} = \sqrt{1 + 4x^2}$$

Άρα,

$$\hat{\epsilon} = -\frac{\hat{e}_x + 2x\hat{e}_y}{\sqrt{1 + 4x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}\,\hat{e}_x - \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}\,\hat{e}_y$$

οπότε, λόγω και της (ii), προκύπτει ότι το διάνυσμα της ταχύτητας του Σ είναι

$$\vec{v} = v_\epsilon\,\hat{\epsilon} = \sqrt{2g(x_1^2 - x^2)}\left(-\frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}\,\hat{e}_x - \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}\,\hat{e}_y\right)$$

β) Επειδή $y = x^2$,

προκύπτει

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

οπότε το τετράγωνο της ταχύτητας του Σ τη χρονική στιγμή t είναι

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(2x\frac{dx}{dt}\right)^2 = (1 + 4x^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Έτσι, η (ii) γίνεται

$$(1 + 4x^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2g(x_1^2 - x^2)$$

οπότε $\left(\dfrac{dx}{dt} < 0\right)$

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2g(x_1^2 - x^2)}{1 + 4x^2}} \qquad (iii)$$

Επομένως, ο χρόνος τ στον οποίο το Σ φτάνει στην αρχή των αξόνων προκύπτει ολοκληρώνοντας την διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2g(x_1^2 - x^2)}{1 + 4x^2}}} = -dt$$

που προκύπτει από την (i), μεταξύ 0 και τ, οπότε παίρνουμε ($x(0) = x_1$ και $x(\tau) = 0$)

$$\int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + 4x^2}{2g(x_1^2 - x^2)}} dx = \int_\tau^0 dt$$

Άρα,

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + 4x^2}{x_1^2 - x^2}} dx$$

Λύση 50.

α) Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το $y = 0$, και εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε., αφού η μοναδική δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος (η δύναμη που δέχεται ο δακτύλιος από το σύρμα είναι κάθετη στην ταχύτητα, οπότε δεν παράγει έργο), μεταξύ της αρχικής θέσης (A) και της τυχαίας θέσης $M(x, y)$ του Σ, παίρνουμε

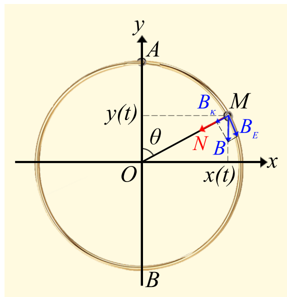
$$\begin{aligned} K_A + U_A = K_B + U_B \quad &\Leftrightarrow \quad 0 + mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &\Leftrightarrow \quad v^2 = 2g(R - y) \\ &\Leftrightarrow \quad v^2 = 2g(R - R\cos\theta) \\ &\Leftrightarrow \quad v^2 = 2gR(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

οποτε το μέτρο της ταχύτητας του Σ είναι

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos\theta)}$$

β) Το τετράγωνο του μέτρου της επιτάχυνσης του Σ στη θέση Μ είναι

$$a^2 = a_k^2 + a_\epsilon^2 \qquad (i)$$



Σχήμα 5.162 *Κίνηση σε κατακόρυφο κυκλικό σύρμα*

όπου

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{v^2}{R} = \frac{2g(R - y)}{R} \\ &= \frac{2g(R - R\cos\theta)}{R} \\ &= \frac{2gR(1 - \cos\theta)}{R} \\ &= 2g(1 - \cos\theta) \end{aligned} \qquad (ii)$$

και η επιτρόχιος επιτάχυνσή του (από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής στη διεύθυνση της εφαπτομένης, όπου η μηδενική δύναμη είναι η εφαπτομένη συνιστώσα του βάρους $B_\epsilon = mg\cos\theta$)

$$a_\epsilon = \frac{B_\epsilon}{m} = \frac{mg\cos\theta}{m} = g\cos\theta$$

Έτσι, η (i) δίνει

$$\begin{aligned} a^2 &= [2g(1 - \cos\theta)]^2 + (g\cos\theta)^2 \\ &= g^2\left[4(1 - \cos\theta)^2 + \cos^2\theta\right] \end{aligned}$$

οπότε το μέτρο της επιτάχυνσης του Σ είναι

$$a = g\sqrt{4 - 8\cos\theta + 5\cos^2\theta}.$$

γ) Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής στη διεύθυνση της ακτίνας (με θετική φορά προς το κέντρο του κύκλου), παίρνουμε

$$ma_k = N + B_n$$

όπου N η δύναμη που ασκεί το σύρμα στον δακτύλιο (κάθετη αντίδραση) και

$$B_n = mg\cos\theta$$

η συνιστώσα του βάρους στη διεύθυνση της ακτίνας, οπότε, λόγω και της (ii), παίρνουμε

$$m2g(1 - \cos\theta) = N + mg\cos\theta$$

ή

$$N = mg\left[2(1 - \cos\theta) - \cos\theta\right]$$

οπότε

$$N = mg\,(2 - 3\cos\theta)$$

δ) Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε. στο (α) παίρνουμε ότι η ταχύτητα του Σ όταν η τεταγμένη του είναι y είναι

$$v = \sqrt{2g(R-y)} \qquad (iii)$$

Επίσης, ισχύει

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \qquad (iv)$$

οπότε για κίνηση στον κύκλο με σταθερή ταχύτητα ισχύει

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

ή

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$$

Έτσι, η (iv) δίνει

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(-\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\ &= \frac{y^2+x^2}{x^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\ &= \frac{R^2}{x^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\ &= \frac{R^2}{R^2-y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \end{aligned}$$

Άρα, για την κίνηση του δακτυλίου προς τα κάτω, κατά την οποία ($\frac{dy}{dt} < 0$), ισχύει

$$v = -\sqrt{\frac{R^2}{R^2-y^2}}\frac{dy}{dt}$$

οπότε η (iii) δίνει

$$\begin{aligned} -\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{dy}{dt} = \sqrt{2g(R-y)} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{2g}}{R}\sqrt{(R-y)^2(R+y)} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{dy}{(R-y)\sqrt{R+y}} = \frac{\sqrt{2g}}{R}\,dt \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας αυτή τη διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών από την ανώτερη θέση A ($y_A = R$) ως την κατώτερη θέση B ($y_B = -R$)

$$-\int_{-R}^{R}\frac{dy}{(R-y)\sqrt{R+y}} = \frac{\sqrt{2g}}{R}\int_{\tau}^{0} dt$$

ή

$$-\int_{-R}^{R}\frac{dy}{(R-y)\sqrt{R+y}} = \frac{\sqrt{2g}}{R}(0-\tau)$$

οπότε

$$\tau = \frac{R}{\sqrt{2g}}\int_{-R}^{R}\frac{dy}{(R-y)\sqrt{R+y}}$$

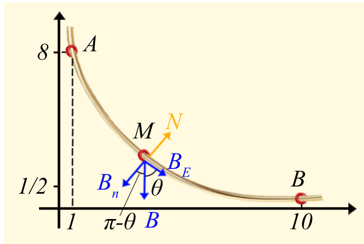
Λύση 51.

α) i) Επειδή η μόνη δύναμη που ασκείται στον δακτύλιο και παράγει έργο είναι το βάρος του, ισχύει η Α.Δ.Μ.Ε. Έτσι, εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του Σ από το σημείο A ως το σημείο $M(x,y)$ παίρνουμε (θεωρώντας ότι η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν στο $y=0$)

$$0+mgy_A=\frac{1}{2}mv_M^2+mgy_M \;\Leftrightarrow\; v_M^2=2g(8-y_M),$$

οπότε, αφού για τα σημεία της υπερβολής ισχύει $y=\dfrac{8}{x}$ το μέτρο της ταχύτητας του Σ στη θέση x είναι

$$v_M=\sqrt{2g\left(8-\frac{8}{x}\right)}=4\sqrt{g\left(1-\frac{1}{x}\right)} \qquad (i)$$



Σχήμα 5.1626 *Κίνηση σε λεία υπερβολή*

ii) Επειδή το Σ κινείται πάνω στην υπερβολή, η επιτάχυνσή του είναι

$$a=\sqrt{a_k^2+a_\epsilon^2} \qquad (ii)$$

όπου

$$a_k=\frac{v^2}{\rho} \qquad (iii)$$

η κεντρομόλος επιτάχυνση του Σ και ρ η ακτίνα καμπυλότητας, η οποία για κίνηση πάνω σε γραμμή με εξίσωση $y(x)$ είναι

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|} \qquad (iv)$$

Στην περίπτωση της υπερβολης αυτής ισχύει

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 8(x^{-1})=-\frac{8}{x^2}\\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -8(x^{-2})=-8(-2)(x^{-3})=\frac{16}{x^3}\end{aligned}$$

οπότε η (iv) δίνει $(x>0)$

$$\rho=\frac{\left[1+\left(-\dfrac{8}{x^2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\dfrac{16}{x^3}\right|}=\frac{\left(\dfrac{x^4+64}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{16}{x^3}}=\frac{(x^4+64)^{\frac{3}{2}}}{16x^3}$$

Έτσι, λόγω της (ii), από την (iii) προκύπτει ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση του Σ στη θέση x είναι

$$a_k=\frac{16g\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{(x^4+64)^{\frac{3}{2}}}{16x^3}}=256g\frac{x^2(x-1)}{(x^4+64)^{\frac{3}{2}}} \qquad x>1 \qquad (v)$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής στην κατεύθυνση της εφαπτόμενης προκύπτει ότι η επιτρόχια επιτάχυνση του Σ είναι

$$a_\epsilon=\frac{B_\epsilon}{m} \qquad (vi)$$

όπου B_ϵ η συνιστώσα του βάρους στην κατεύθυνση της εφαπτομένης στο σημείο $M(x,y)$, η οποία όπως φαίνεται από το Σχήμα 5.626 είναι (η γωνία του βάρους με την εφαπτομένη είναι $\pi-\theta$)

$$B_\epsilon=mg\cos(\pi-\theta) \qquad (vii)$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στο σημείο M με τον άξονα x. Επειδή (θ αμβλεία, οπότε $\cos\theta<0$)

$$
\begin{aligned}
\cos(\pi-\theta) &= -\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\left(-\dfrac{8}{x^2}\right)^2}} = -\frac{x^2}{\sqrt{x^4+64}}
\end{aligned}
$$

Ἐτσι, η (vii) δίνει

$$B_\epsilon = -\frac{mgx^2}{\sqrt{x^4+64}}$$

Έτσι, από την (vi) παίρνουμε

$$a_\epsilon = -\frac{gx^2}{\sqrt{x^4+64}},$$

οπότε η (ii) δίνει

$$a = \sqrt{\left[\frac{256gx^2(x-1)}{(x^4+64)^{\frac{3}{2}}}\right]^2 + \left(-\frac{gx^2}{\sqrt{x^4+64}}\right)^2} = g\sqrt{\frac{2^{16}(x-1)^2}{x(x^4+64)^3} + \frac{x^4}{x^4+64}} \qquad x>1$$

β) Εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ στο (α) προέκυψε ότι το μέτρο της ταχύτητας του Σ στη θέση x, είναι

$$v(x) = 4\sqrt{g\left(1-\frac{1}{x}\right)}, \quad x>1. \tag{viii}$$

Επίσης,

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \tag{ix}$$

και για κίνηση πάνω στην υπερβολή ισχύει

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{8}{x}\right) = -\frac{8}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

οπότε η (ix) δίνει

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(-\frac{8}{x^2}\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(1+\frac{64}{x^4}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Άρα, αφού στην περίπτωση που μελετάμε $\dfrac{dx}{dt} > 0$,

$$v = \sqrt{\frac{x^4+64}{x^4}}\frac{dx}{dt}$$

Έτσι, η $(viii)$ γίνεται

$$\frac{\sqrt{x^4+64}}{x^2}\frac{dx}{dt} = 4\sqrt{9,81\left(1-\frac{1}{x}\right)} \qquad x>1$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών την οποία ολοκληρώνοντας από το A ως το B παίρνουμε

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{x^4+64}}{x^2\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}}\,dx = \int_0^\tau 4\sqrt{9,81}\,dt,$$

οπότε

$$\int_1^{16} \frac{\sqrt{x(x^4+64)}}{x^2\sqrt{x-1}}dx = 12,53\tau.$$

Άρα, ο ζητούμενος χρόνος στον οποίο το Σ διέρχεται από τη θέση $x = 16$ δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\tau = \frac{1}{12,53}\int_1^{16} \frac{\sqrt{x(x^4+64)}}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx$$

Υπολογίζουμε την τιμή του ολοκληρώματος αυτού χρησιμοποιώντας μαθηματικό λογισμικό

$$\int_1^{16} \frac{\sqrt{x(x^4+64)}}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx = 28,16$$

οπότε

$$\tau = \frac{28,16}{12,53} = 2,25s$$

Λύση 52.

α) Από το Σχήμα 5.163 φαίνεται ότι

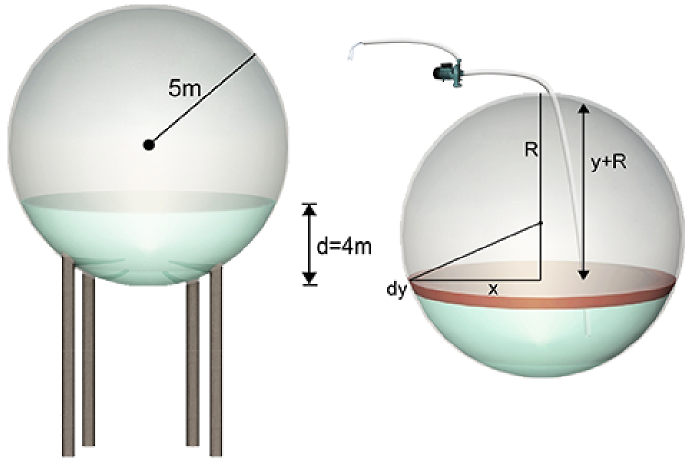
$$x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 = R^2 - y^2$$

οπότε

$$dm = \pi\rho(R^2 - y^2)dy$$

Επομένως, η μάζα του νερού στη δεξαμενή είναι (βλ. Σχήμα 5.116)

$$\begin{aligned} m &= \int dm = \int_{R-d}^{R} \pi\rho(R^2 - y^2)dy \\ &= \pi\rho \int_{5-4}^{5} (5^2 - y^2)dy = 58,67\pi\rho \\ &= 58,67 \cdot \pi \cdot 1000 = 1,85 \cdot 10^5 kg \end{aligned}$$



Σχήμα 5.163 *Εκκένωση σφαιρικής δεξαμενής*

β) Για να αντλήσουμε το νερό του στοιχειώδους δίσκου που απέχει απόσταση y από το κέντρο της σφαίρας απαιτείται έργο

$$dW = -dU = g(y + R)dm = \pi\rho g(R + y)(R^2 - y^2)dy,$$

οπότε το έργο για την άντληση όλου του νερού της δεξαμενής είναι

$$\begin{aligned} W &= \int dW = \int_{R-d}^{R} \pi\rho g(R^2 - y^2)(R + y)dy = \pi 1000 \cdot 9,81 \int_{1}^{5} (25 - y^2)(5 + y)dy \\ &= 9810\pi \int_{1}^{5} (-y^3 - 5y^2 + 25y + 125)dy = 9810 \cdot \pi \cdot \frac{1312}{3} = 1,35 \cdot 10^7 J \end{aligned}$$