Ἀσκήσεις 8.1.4 (σελ. 172)

Λύση 31.

Η κυκλική συχνότητα της Α.Α.Τ. αυτής είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \, \frac{rad}{s}$$

Η σταθερά επαναφοράς D είναι

$$D = m\omega^2 = 0,1\pi^2 = \frac{\pi^2}{10} \, \frac{N}{m}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το Σ διέρχεται από τη θέση $x = 10cm$,

$$x(0) = 10cm = 0,1m$$

οπότε από την εξίσωση κίνησής του παίρνουμε

$$0,1 = 0,2\sin\left(\omega \cdot 0 + \varphi_0\right) \;\Leftrightarrow\; \sin\varphi_0 = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

οπότε

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \varphi = \frac{5\pi}{6}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το Σ κινείται προς τη θέση ισορροπίας,

$$v(0) < 0 \tag{i}$$

Η ταχύτητα του Σ τη χρονική στιγμή t είναι

$$v(t) = 0,2\pi\cos(\pi t + \varphi)$$

οπότε τη χρονική στιγμή $t = 0$

$$v(0) = 0,2\pi\cos\varphi$$

Ἐτσι, λόγω της (i)

$$\cos\varphi < 0$$

οπότε η τιμή της σταθεράς φ είναι

$$\varphi = \frac{5\pi}{6}$$

Επομένως, η εξίσωση κίνησης του Σ είναι

$$x(t) = 0,2\sin\left(\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) \tag{ii}$$

α) Σύμφωνα με τον β′ νόμο του Νεύτωνα ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του Σ είναι ίσος με τη συνολική δύναμη που δέχεται,

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -Dx \tag{iii}$$

οπότε, λόγω της (ii), η (iii) γίνεται

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\pi^2}{10}0,2\sin\left(\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\pi^2}{50}\sin\left(\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

β) Η κινητική ενέργεια του Σ είναι

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)]^2 = \frac{1}{2}0,1 \cdot 0,2^2\pi^2\cos^2\left(\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 2 \cdot 10^{-3}\pi^2\cos^2\left(\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) \quad (S.I.) \end{aligned}$$

Λύση 32.
Η εξίσωση κίνησης του Σ είναι

$$x = A\sin\omega t, \quad \text{όπου} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{i}$$

α) Οι χρονικές στιγμές τις οποίες το Σ διέρχεται από τη θέση $x = -\frac{A}{2}$ προκύπτουν αντικαθιστώντας $x = -\frac{A}{2}$ στην (i)

$$\begin{aligned} x = A\sin\omega t \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{A}{2} = A\sin\omega t \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\omega t = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\omega t = \sin\frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

Οι λύσεις της τριγωνομετρικής αυτής εξίσωσης είναι

$$\omega t = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \omega t = 2k\pi + \pi - \frac{7\pi}{6} \quad k \in Z$$

Δίνοντας κατάλληλες ακέραιες τιμές στο k, προκύπτει ότι οι δυο μικρότερες θετικές λύσεις δίνονται από τις σχέσεις

$$\omega t = \frac{7\pi}{6}$$

ή

$$\omega t = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

Άρα, το Σ διέρχεται την πρώτη περίοδο από τη θέση $x = -\frac{A}{2}$ τις χρονικές στιγμές

$$t = \frac{7\pi}{6\omega} = \frac{7\pi}{6\frac{2\pi}{T}} = \frac{7T}{12}$$

και

$$t = \frac{11\pi}{6\omega} = \frac{11\pi}{6\frac{2\pi}{T}} = \frac{11T}{12}$$

α) i) Το Σ διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση $x = \frac{\sqrt{3}}{2}A$ τη μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}A \quad &\Leftrightarrow \quad A\sin\omega t = \frac{\sqrt{3}}{2}A \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\omega t = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\omega t = \sin\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\omega t = \frac{\pi}{3}$$

Άρα, το Σ διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση αυτή τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{6}$$

ii) Το Σ διέρχεται για δεύτερη φορά από τη θέση $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}A$ τη δεύτερη θετική ρίζα της εξίσωσης (βλ. Σχήμα 8.83)

$$x(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}A \quad \Leftrightarrow \quad A\sin\omega t = -\frac{\sqrt{2}}{2}A$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin\omega t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin\omega t = \sin\frac{5\pi}{4}$$

Οι λύσεις της τριγωνομετρικής αυτής εξίσωσης είναι

$$\omega t = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \quad \text{ή} \quad \omega t = 2k\pi + \pi - \frac{5\pi}{4} \qquad k \in Z$$

Δίνοντας κατάλληλες ακέραιες τιμές στο k, προκύπτει ότι οι δυο μικρότερες θετικές λύσεις δίνονται από τις σχέσεις

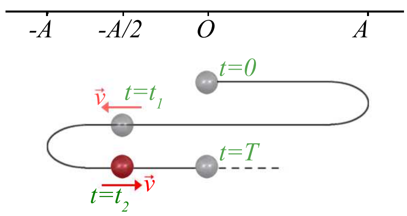
$$\omega t = \frac{5\pi}{4} \quad \text{ή} \quad \omega t = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Άρα, η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι (δεύτερη θετική ρίζα της εξίσωσης αυτής)

$$t_2 = \frac{7\pi}{4\omega} = \frac{7\pi}{4\frac{2\pi}{T}} = \frac{7T}{8}$$

iii) Το Σ διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση $x = -\frac{A}{2}$ κινούμενο προς τη θέση ισορροπίας τη δεύτερη θετική ρίζα της εξίσωσης

$$x = -\frac{A}{2} \qquad (ii)$$



Σχήμα 8.83 *Α.Α.Τ.*

Στο ερώτημα (i) βρήκαμε, (λύνοντας την (ii)), ότι το Σ διέρχεται στην πρώτη περίοδο από τη θέση $x = -\frac{A}{2}$ τις χρονικές στιγμές

$$t_1 = \frac{7T}{12} \quad \text{και} \quad t_2 = \frac{11T}{12}$$

Επομένως, η ζητούμενη χρονική στιγμή (δεύτερη θετική ρίζα της εξίσωσης (ii)) είναι η

$$t = \frac{11T}{12}$$

iv) Το Σ έχει για πρώτη φορά ταχύτητα $v = -\frac{v_{\max}}{2}$ τη μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης

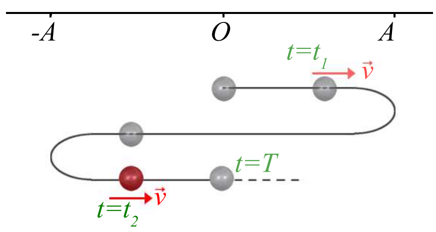
$$v(t) = -\frac{v_{\max}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad v = -\frac{v_{\max}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad v_{\max}\cos\omega t = -\frac{v_{\max}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos\omega t = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos\omega t = \cos\frac{2\pi}{3}$$

η οποία είναι

$$\omega t = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{2\pi}{3\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{3}$$

Επομένως, η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι

$$t = \frac{T}{3}$$



Σχήμα 8.84 *Α.Α.Τ.*

v) Το Σ έχει για πρώτη φορά ταχύτητα

$$v = \frac{\sqrt{3}\pi A}{T} = \frac{\sqrt{3}\pi A}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega A = \frac{\sqrt{3}}{2}v_{\max}$$

ενώ βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα (βλ. Σχήμα 8.84), δηλαδή ψάχνουμε τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}v_{\max}$$

(αφού την πρώτη φορά που $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}v_{\max}$ το Σ βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα).

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}v_{\max} \Leftrightarrow \cos\omega t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ή

$$\cos\omega t = \cos\frac{\pi}{6}$$

Επομένως, η ζητούμενη χρονική στιγμή (δεύτερη θετική ρίζα της εξίσωσης αυτής) είναι

$$\omega t = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

ή

$$t = \frac{11\pi}{6\omega} = \frac{11\pi}{6\frac{2\pi}{T}}$$

οπότε

$$t = \frac{11T}{12}$$

Λύση 38.

Από την (i) προκύπτει ότι το πλάτος και η κυκλική συχνότητα της Α.Α.Τ. αυτής είναι

$$A = 0,4m \quad \text{και} \quad \omega = \pi\,\frac{rad}{s}$$

α) Άρα, η περίοδος ταλάντωσης του Σ είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\,s$$

β) Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι

$$D = m \cdot \omega^2 = 10\pi^2\,\frac{N}{m}$$

γ) Η θέση του Σ τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι (θέτουμε $t = 0$ στην (i)

$$x = 0,4\sin\frac{2\pi}{3} = 0,4\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 0,4\sin\frac{\pi}{3} = 0,4\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,2\sqrt{3}\,m$$

Η εξίσωση της ταχύτητας του Σ είναι

$$v = v_{\max}\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) = 0,4\pi\cos\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) \qquad (ii)$$

η ταχύτητά του (θέτουμε $t = 0$ στην (ii)

$$v = 0,4\pi\cos\frac{2\pi}{3} = 0,4\pi\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 0,4\pi\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = -0,2\pi\,\frac{m}{s}$$

Η επιτάχυνσή του τη στιγμή $t = 0$ είναι

$$a = -\omega^2 x = -\pi^2 \cdot 0,2\sqrt{3}\,\frac{m}{s^2}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ τα v και a είναι όμοσημα, το Σ επιταχύνεται.

δ) Η ταχύτητα του Σ τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}s$$

είναι (θέτουμε $t = \frac{1}{2}s$ στην (ii))

$$\begin{aligned} v_1 &= 0,4\pi\cos\left(\pi\frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 0,4\pi\cos\frac{7\pi}{6} \\ &= 0,4\pi\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -0,4\pi\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -0,2\sqrt{3}\pi\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

Η εξίσωση της επιτάχυνσης του Σ είναι

$$a = -a_{\max}\sin\left(\omega t + \varphi_0\right) = -\pi^2 0,4\sin\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) \qquad (iii)$$

οπότε η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{1}{2}s$ είναι (θέτουμε $t = \frac{1}{2}s$ στην (iii))

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -\pi^2 0,4\sin\left(\pi\frac{1}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\\
&= -\pi^2 0,4\cos\frac{2\pi}{3}\\
&= -\pi^2 0,4\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\\
&= -\pi^2 0,4\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 0,2\pi^2\,\frac{m}{s^2}
\end{aligned}
$$

Λύση 39.

Η ταχύτητα του Σ τη χρονική στιγμή t είναι

$$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \varphi_0 \text{ σταθερά.}$$

Τη σταθερά φ_0 την προσδιορίζουμε από το ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το Σ διέρχεται από τη θέση

$$x(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}A \quad \Leftrightarrow \quad A\sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(\varphi_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής στο $[0, 2\pi)$ είναι

$$\varphi_0 = \frac{5\pi}{4} \quad \text{ή} \quad \varphi_0 = \frac{7\pi}{4}$$

Επειδή το Σ τη χρονική στιγμή $t = 0$ κινείται από τη θέση $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}A$ προς τη θέση ισορροπίας, η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι θετική ($v(0) > 0$), οπότε

$$v(0) = \omega A \cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = \omega A \cos\varphi_0 > 0$$

- Αν $\varphi_0 = \frac{5\pi}{4}$

$$v(0) = \omega A \cos\frac{5\pi}{4} < 0$$

- Ενώ, αν $\varphi_0 = \frac{7\pi}{4}$

$$v(0) = \omega A \cos\frac{7\pi}{4} > 0$$

Επομένως,

$$\varphi_0 = \frac{7\pi}{4}$$

οπότε

$$v(t) = \omega A \cos\left(\omega t + \frac{7\pi}{4}\right) = 2\pi f A \cos\left(2\pi f t + \frac{7\pi}{4}\right)$$

Λύση 40.
Η κυκλική συχνότητα της Α.Α.Τ. είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}\frac{rad}{s}$$

και η σταθερά επαναφοράς

$$D = m\omega^2 = 0,1\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{0,1}{16}\pi^2 = \frac{\pi^2}{160}\frac{N}{m} \qquad (i)$$

Έτσι, αφού τη χρονική στιγμή $t = 0$ το Σ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς την ακραία θέση $x = A$, σύμφωνα με το Παράδειγμα 8.2, η εξίσωση κίνησής του είναι

$$x(t) = A\sin\omega t = 0,2\sin\frac{\pi t}{4} \qquad (ii)$$

οπότε:
α) Σύμφωνα με την (ii), η θέση του Σ τη χρονική στιγμή $t = 5\,s$ είναι

$$x(5) = 0,2\sin\frac{5\pi}{4} = -0,2\sin\frac{\pi}{4} = -0,2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

β) Η δυναμική ενέργεια του Σ τη χρονική στιγμή $t = 3s$ είναι

$$U = \frac{1}{2}Dx^2$$

όπου, σύμφωνα με την (ii),

$$x = x(3) = 0,2\sin\frac{3\pi}{4} = 0,2\sin\frac{\pi}{4} = 0,2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

η θέση του Σ τη χρονική στιγμή $t = 3\,s$, οπότε

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{160}\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}\cdot 10^{-3}\,J, \qquad (iv),$$

Β΄ Λύση
Η δυναμική ενέργεια του Σ τη χρονική στιγμή t είναι

$$U(t) = \mathrm{E_T}\eta\mu^2\omega t = \frac{1}{2}DA^2\sin^2\omega t$$

οπότε τη χρονική στιγμή $t = 3\,s$ η δυναμική ενέργεια του Σ είναι

$$\begin{aligned} U(3) &= \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{160}\cdot 0,2^2\sin^2\frac{3\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{160}\cdot 0,2^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{\pi^2}{16}\cdot 10^{-3}\,J \end{aligned}$$

γ) Η δύναμη που δέχεται το Σ τη χρονική στιγμή $t = 7\,s$ είναι

$$F = -Dx$$

όπου

$$x = x(7) = 0,2\sin\frac{7\pi}{4} = 0,2\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -0,2\sin\frac{\pi}{4} = -0,2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

οπότε

$$F = -\frac{\pi^2}{160}\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \frac{\pi^2}{8}\cdot 10^{-3} = 0,0087N$$

δ) Σύμφωνα με την Α.Δ.Μ.Ε. και την (iii), η κινητική ενέργεια του Σ τη χρονική στιγμή $t = 3\,s$ είναι

ή

$$K = E - U = \frac{1}{2}DA^2 - U = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{160}(0,2)^2 - \frac{\pi^2}{16}10^{-3} = 6,17\cdot 10^{-4}J$$

Λύση 41.

α) Επειδή

$$U = 3K \Leftrightarrow K = \frac{U}{3}$$

από την Α.Δ.Μ.Ε. παίρνουμε

$$\begin{aligned} K + U = E \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{U}{3} + U = E \Leftrightarrow \frac{4U}{3} = E \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{4}{3}\frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{3A^2}{4} \end{aligned}$$

οπότε η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι τριπλάσια από την κινητική ενέργεια στις θέσεις

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$$

β) Όταν η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με την κινητική ενέργεια

$$U = K$$

οπότε από την Α.Δ.Μ.Ε. προκύπτει

$$\begin{aligned} K + U = E \Leftrightarrow K + K = E \quad &\Leftrightarrow \quad 2K = E \Leftrightarrow 2\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m{v_{\max}}^2 \\ &\Leftrightarrow \quad v^2 = \frac{1}{2}{v_{\max}}^2 \\ &\Leftrightarrow \quad v = \pm\frac{v_{\max}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Επομένως, όταν η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με την κινητική ενέργεια το μέτρο της ταχύτητας του Σ είναι

$$v = \frac{\sqrt{2}v_{\max}}{2} = \frac{\sqrt{2}A\omega}{2}$$

γ) Όταν η ταχύτητα του Σ έχει μέτρο $v_{max}/2$,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_{\max}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m\frac{{v_{\max}}^2}{4} = \frac{\mathrm{E}}{4} = 0,25\,E \quad \text{ή} \quad K = 25\%\,E$$

Έτσι, από την Α.Δ.Μ.Ε.

$$K + U = E$$

προκύπτει ότι η δυναμική ενέργεια του Σ είναι

$$U = 1 - 0,25 = 0,75E$$

οπότε

$$U = 75\%E$$

δ) Τη χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη θέση με απομάκρυνση $x = A/2$, ισχύει

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}D\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}D\frac{A^2}{4} = \frac{E}{4} \Leftrightarrow \frac{U}{E} = \frac{1}{4}$$

οπότε

$$U = \frac{E}{4}$$

Έτσι, από την Α.Δ.Μ.Ε. $K + U = E$ προκύπτει

$$K + U = E \quad \Leftrightarrow \quad K + \frac{E}{4} = E$$
$$\Leftrightarrow \quad K = \frac{3E}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad K = \frac{3E}{4}$$

οπότε

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{3E}{4}}{\frac{E}{4}}$$

οπότε

$$\frac{K}{U} = 3$$

ε) Οι εξισώσεις της δυναμικής ενέργειας και της κινητικής ενέργειας συναρτήσει της απομάκρυνσης είναι

$$U = \frac{1}{2}Dx^2$$

και

$$U + K = E$$

οπότε

$$K = E - U \quad \Leftrightarrow \quad K = E - \frac{1}{2}Dx^2$$

και τα αντίστοιχα διαγράμματα δίνονται στο Σχήμα 8.22α.

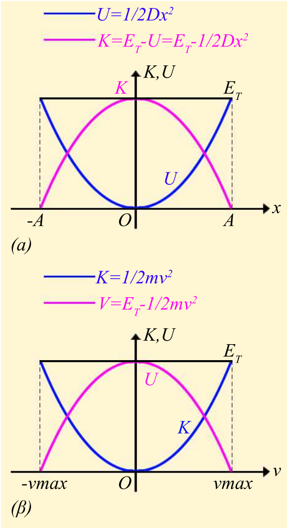
στ) Η κινητική και η δυναμική ενέργεια σε συνάρτηση με την ταχύτητα είναι

$$K(v) = \frac{1}{2}mv^2$$

και

$$U(v) = E - K = E - \frac{1}{2}mv^2$$

και τα αντίστοιχα διαγράμματα δίνονται στο Σχήμα 8.22β.



Σχήμα 8.22 *Καμπύλες δυναμικής και κινητικής ενέργειας*

Λύση 42.

α) Η κυκλική συχνότητα της Α.Α.Τ αυτής είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\,\frac{rad}{s}$$

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ της θέσης x_1 και της ακραίας θέσης $x = A$ παίρνουμε

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}DA^2 \qquad (i)$$

οπότε η (i) δίνει

$$mv_1^2 + Dx_1^2 = DA^2 \quad \Leftrightarrow \quad A^2 = x_1^2 + \frac{m}{D}v_1^2$$
$$\Leftrightarrow \quad A^2 = x_1^2 + \frac{1}{\omega^2}v_1^2$$

Αντικαθιστώντας

$$A^2 = \left(\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\right)^2 + \frac{1}{1^2}\left(-\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\right)^2 = \sqrt{12\cdot 10^{-4}}$$

Έτσι, το πλάτος της ταλάντωσης του Σ είναι

$$A = \left(\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\right)^2 \sqrt{12\cdot 10^{-4}} = 2\sqrt{3}\cdot 10^{-2}$$

β) i) Η συνολική δύναμη που δέχεται το Σ είναι

$$\sum F = -Dx \qquad (ii)$$

όπου

$$D = m\omega^2 = 0,1(1)^2 = 0,1\,\frac{N}{m}$$

και

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) = 2\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\sin(1\cdot t + \varphi_0) \qquad (iii)$$

όπου φ_0 σταθερά, $0 \le \varphi_0 < 2\pi$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το Σ διέρχεται από τη θέση $x_1 = \sqrt{3}\cdot 10^{-2}m$, η (iii) δίνει

$$\sqrt{3}\cdot 10^{-2} = 2\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\sin\varphi_0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\varphi_0 = \frac{1}{2}$$

οπότε

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \varphi = \frac{5\pi}{6}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$

$$v = -\sqrt{3}\frac{cm}{s}$$
$$v = v_{\max}\cos\varphi_0 < 0 \;\Leftrightarrow\; \cos\varphi_0 < 0,$$

Άρα,

$$\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$$

οπότε η (iii) γίνεται

$$x = 2\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\sin\left(t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

και η (ii) δίνει

$$\begin{aligned}\sum F &= -0,1\cdot 2\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\sin\left(t + \frac{5\pi}{6}\right)\\ &= -2\sqrt{3}\cdot 10^{-3}\sin\left(t + \frac{5\pi}{6}\right) \quad S.I.\end{aligned}$$

ii) Η ταχύτητα του Σ είναι

$$v = A\omega\cos\left(t + \frac{5\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\cdot 1\cos\left(t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

iii) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του Σ είναι

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt} &= \sum F \cdot v \\ &= -2\sqrt{3} \cdot 10^{-3} \sin\left(t + \frac{5\pi}{6}\right) \cdot 2\sqrt{3} \cos\left(t + \frac{5\pi}{6}\right) \\ &= -12 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2} \sin\left[2\left(t + \frac{5\pi}{6}\right)\right] \\ &= -6 \cdot 10^{-3} \sin\left(2t + \frac{5\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του Σ είναι

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= -\frac{dK}{dt} \\ &= 6 \cdot 10^{-3} \sin\left(2t + \frac{5\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

Ἀσκήσεις 8.3.6 (σελ. 502)

Λύση 10.

α) Επειδή το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_1 = 2s$ είναι $A_1 = 10\,cm$

$$A_1 = A_0 e^{-\gamma t_1} \Leftrightarrow e^{-\gamma t_1} = \frac{A_1}{A_0} \Leftrightarrow -\gamma t_1 = \ln\frac{A_1}{A_0}$$

οπότε

$$\gamma = \frac{1}{t_1}\ln\frac{A_0}{A_1} = \frac{1}{t_1}\ln\frac{A_0}{A_1} = \frac{1}{2}\ln\frac{0,2}{0,1} = \frac{\ln 2}{2}$$

β) Ο χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους είναι

$$T_{1/2} = t_1 = 2\,s$$

αφού

$$A_1 = 10 = \frac{A_0}{2}$$

γ) Το πλάτος τη χρονική στιγμή $t_2 = 4\,s$ είναι

$$\begin{aligned} A_2 &= A_0 e^{-\gamma t_2} = 20e^{-\frac{\ln 2}{2}\cdot 4} = 20e^{-2\cdot\ln 2} = 20e^{\ln 2^{-2}} = 20\cdot 2^{-2} \\ &= \frac{20}{2^2} = 5cm \end{aligned}$$

δ) Το πλάτος ταλάντωσης γίνεται $A_3 = 2,5\,cm$ τη χρονική στιγμή t_3 την οποία

$$\begin{aligned} A_0 e^{-\gamma t_3} = A_3 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-\gamma t_1} = \frac{A_3}{A_0} \\ &\Leftrightarrow \quad -\gamma t_3 = \ln\frac{2,5}{20} \\ &\Leftrightarrow \quad -\gamma t_3 = -2\ln 2 \\ &\Leftrightarrow \quad t_3 = \frac{3\ln 2}{\gamma} \\ &\Leftrightarrow \quad t_3 = \frac{3\ln 2}{\frac{\ln 2}{2}} = 6s \end{aligned}$$

ε) Η ενέργεια της ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές t_0, t_1, t_2 και t_3 είναι

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2}DA_0{}^2 = \frac{1}{2}\cdot 200\cdot 0,2^2 = 100\cdot 0,04 = 4\,J \\ E_1 &= \frac{1}{2}DA_1{}^2 = \frac{1}{2}\cdot 200\cdot 0,1^2 = 100\cdot 0,01 = 1\,J \\ E_2 &= \frac{1}{2}DA_2{}^2 = \frac{1}{2}\cdot 200\cdot 0,05^2 = 100\cdot 0,0025 = 0,25\,J \\ E_3 &= \frac{1}{2}DA_3{}^2 = \frac{1}{2}\cdot 200\cdot 0,025^2 = 100\cdot 0,000625 = 0,0625\,J \end{aligned}$$

στ) Στο χρονικό διάστημα (t_0, t_1):

- το ποσοστό μείωσης του πλάτους είναι

$$x = \frac{|\Delta \mathrm{A}|}{\mathrm{A}_0}\cdot 100\% = \frac{10}{20}\cdot 100\% = 50\%$$

- το ποσοστό μείωσης της ενέργειας είναι

$$x = \frac{|\Delta E|}{E_0}\cdot 100\% = \frac{3}{4}\cdot 100\% = 75\%$$

Στο χρονικό διάστημα (t_1, t_2):

- το ποσοστό μείωσης του πλάτους είναι

$$x = \frac{|\Delta \mathrm{A}|}{\mathrm{A}_1}\cdot 100\% = \frac{5}{10}\cdot 100\% = 50\%$$

- το ποσοστό μείωσης της ενέργειας είναι

$$x = \frac{|\Delta E|}{E_1} \cdot 100\% = \frac{0,75}{1} \cdot 100\% = 75\%.$$

Στο χρονικό διάστημα (t_2, t_3):

- το ποσοστό μείωσης του πλάτους είναι

$$x = \frac{|\Delta A|}{A_2} \cdot 100\% = \frac{5 - 2,5}{5} \cdot 100\% = 50\%,$$

- το ποσοστό μείωσης της ενέργειας είναι

$$x = \frac{|\Delta E|}{E_2} \cdot 100\% = \frac{0,25 - 0,0625}{0,25} \cdot 100\% = 75\%.$$

ζ) Το έργο της δύναμης απόσβεσης στο χρονικό διάστημα (t_0, t_2) είναι

$$W_a = \Delta E = E_2 - E_0 = 0,25 - 4 = -3,75\,J$$

Γενικές ασκήσεις Κεφαλαίου 8

Λύση 16.

α) Για την ταλάντωση πριν τη κρούση (ταλαντώνεται μόνο το M) ισχύει:
το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$A = 0,1\sqrt{2}m$$

- η περίοδος,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,5}{100}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{10}s$$

- η κυκλική ταχύτητα

$$\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{2}\pi}{10}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}\,\frac{r}{s}$$

- και η μέγιστη ταχύτητα

$$\upsilon_{\max} = A\omega = 0,1\sqrt{2}\cdot 10\sqrt{2} = 2\,\frac{m}{s}$$

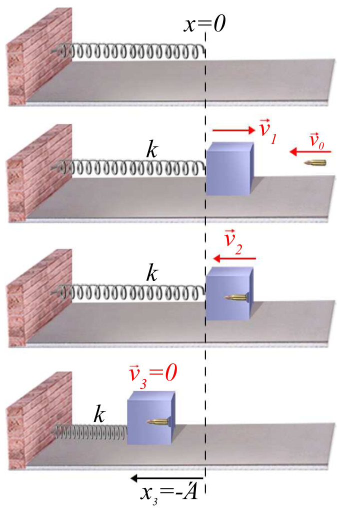
η οποία όμως είναι και η ταχύτητα υ_1 του σώματος μάζας M αμέσως πριν την κρούση, καθώς η θέση (1) είναι η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης,

$$\upsilon_1 = \upsilon_{\max} = 2\,\frac{m}{s}$$

- Για την πλαστική κρούση:

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. για την κρούση των σωμάτων $M - m$ προκύπτει (θετική φορά προς τα δεξιά)

$$\begin{aligned}\vec{P}_{o\lambda(1)} = \vec{P}_{o\lambda(2)} \quad &\Leftrightarrow \quad M\upsilon_1 + m\left(-\upsilon_0\right) = \left(M+m\right)\upsilon_2\\ &\Leftrightarrow \quad 0,5\cdot 2 - 0,5\cdot 6 = 1\cdot \upsilon_2\\ &\Leftrightarrow \quad 1 - 3 = \upsilon_2 \;\Leftrightarrow\; \upsilon_2 = -2\,\frac{m}{s}\end{aligned}$$



Σχήμα Άσκησης 16

όπου υ_2 η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, η οποία όμως είναι και η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσής του (θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του).

- Για την ταλάντωση του συσσωματώματος (μάζας $M+m$) ισχύει:
- η περίοδος είναι

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\pi}{5}\,s$$

- η κυκλική ταχύτητα της ταλάντωσης

$$\omega' = \frac{2\pi}{\mathrm{T}'} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10\frac{rad}{s}$$

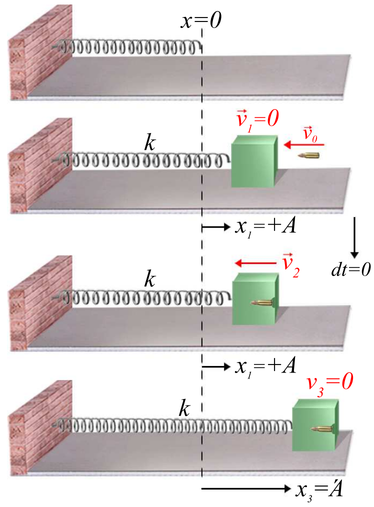
και η μέγιστη ταχύτητα

$$\upsilon_{\max}{}' = A'\cdot\omega' \qquad (i)$$

Επειδή όμως η υ_2 (η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση) είναι και η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσής του έχουμε :

$$\upsilon_2 = \upsilon_{\max}{}' \;\Leftrightarrow\; \upsilon_2 = A'\cdot\omega' \;\Leftrightarrow\; 2 = A'\cdot 10 \;\Leftrightarrow\; A' = \frac{2}{10} = 0,2\,m$$

οπότε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι $A' = 0,2m$



Σχήμα Άσκησης 166

β) Η ταχύτητα v_1 του Μ αμέσως πριν την κρούση είναι μηδέν, αφού τότε βρίσκεται σε ακραία θέση.
Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. του συστήματος των σωμάτων $M-m$ από τη στιγμή αμέσως πριν τη κρούση έως τη στιγμή αμέσως μετά τη κρούση (θετική φορά προς τα δεξιά) προκύπτει:

$$\vec{P}_{o\lambda(1)} = \vec{P}_{o\lambda(2)} \Leftrightarrow Mv_1 + m(-v_0) = (M+m)v_2$$

$$\Leftrightarrow 0 - 0,5\cdot 6 = 1\cdot v_2$$

$$\Leftrightarrow v_2 = -3\,\frac{m}{s}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση προκύπτει εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ της θέσης του αμέσως μετά από την κρούση και της ακραίας θέσης του

$$K_2 + U_2 = E \Leftrightarrow \frac{1}{2}(M+m)v_2^2 + \frac{1}{2}Dx_2{}^2 = \frac{1}{2}DA'^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3^2 + \frac{1}{2}100\left(0,1\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}100\left(A'\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 9 + 100\cdot 0,01\cdot 2 = 100\cdot\left(A'\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{100} = \left(A'\right)^2 \Leftrightarrow A' = \sqrt{\frac{11}{100}} = 0,1\sqrt{11}\,m$$

Λύση 20.
Η εξίσωση κίνησης του Σ είναι
$$x = A\sin\omega t$$
όπου
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\,\frac{rad}{s} \tag{i}$$
α) Οι χρονικές στιγμές τις οποίες το Σ διέρχεται από τη θέση $x = 10\sqrt{2}\,cm$ προκύπτουν από την (i) αντικαθιστώντας την τιμή $x = 10\sqrt{2}\,cm$,
$$\begin{aligned} x = A\sin\omega t \quad &\Leftrightarrow \quad 10\sqrt{2} = 20\sin\pi t \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\pi t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$
οπότε
$$\pi t = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$
ή
$$\pi t = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \tag{iii}$$
Οι ζητούμενες χρονικές στιγμές είναι οι ρίζες στο $[0, 2)$, που προκύπτουν από τις (iii) δίνοντας κατάλληλες τιμές στο k ($k = 0, 1, \dots$), ώστε να προκύπτουν ρίζες στο $[0, 2)$:

- για $k = 0$:
$$\pi t_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad \pi t_2 = \frac{3\pi}{4}$$
- για $k = 1$:
$$\pi t_3 = 2\pi + \frac{\pi}{4} \;\Leftrightarrow\; t_3 = 2 + \frac{1}{4} > 2$$

ή
$$\pi t_4 = 2\pi\frac{3\pi}{4} \;\Leftrightarrow\; t_4 = 2 + \frac{3}{4} > 2$$
Άρα, το Σ διέρχεται την πρώτη περίοδο από τη θέση $x = 10\sqrt{2}cm$ τις χρονικές στιγμές
$$t_1 = \frac{1}{4}\,s \quad \text{και} \quad t_2 = \frac{3}{4}\,s$$
β) Οι χρονικές στιγμές τις οποίες το Σ διέρχεται από τη θέση $x = -20\,cm$ προκύπτουν από την (i) για $x = -20cm$.
$$\begin{aligned} x = A\sin(\omega t) \quad &\Leftrightarrow \quad -20 = 20\sin(\pi t) \\ &\Leftrightarrow \quad \sin(\pi t) = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\pi t = \sin 3\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
οπότε
$$\pi t = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$
ή
$$\pi t = 2k\pi + \left(\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \tag{iv}$$
Δίνουμε τιμές στο k ($k = 0, 1, \dots$) ώστε να πάρουμε ρίζες στο $[0, 2)$:

- για $k = 0$:
$$\pi t_1 = \frac{3\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; t_1 = \frac{3\pi}{2}s$$

ή
$$\pi t_2 = -\frac{\pi}{2} < 0$$

- για $k = 1$:

$$\pi t_3 = 2\pi + \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow t_3 = 2 + \frac{3}{2} > 2$$

ή

$$\pi t_4 = 2\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t_4 = \frac{3}{2} = t_1$$

Άρα το Σ διέρχεται την πρώτη περίοδο από τη θέση $x = 10\,cm$ τη χρονική στιγμή

$$t = \frac{3}{2}\,s$$