Γενικές ασκήσεις Κεφαλαίου 9

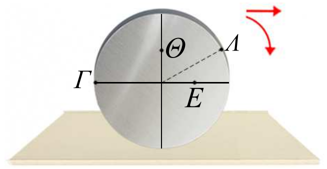
Λύση 1.

Για το σημείο Γ ισχύει

$$\vec{v}\varphi_{\Gamma} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\pi}$$

οπότε

$$\begin{aligned} v_{\Gamma} &= |\vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\pi}| = \sqrt{{v_{cm}}^2 + {v_{\pi}}^2} = \sqrt{{v_{cm}}^2 + {v_{cm}}^2} = \sqrt{2}v_{cm} \\ &= \sqrt{2}\omega R \end{aligned}$$



Σχήμα 9.192 *Κύλιση δίσκου*

και

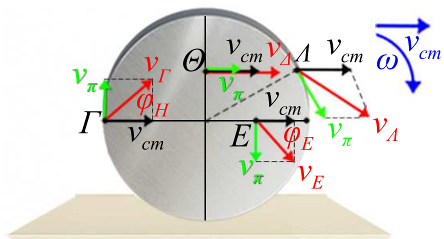
$$\tan\varphi_{\Gamma} = \frac{v_{\pi}}{v_{cm}} = \frac{\omega R}{\omega R} = 1 \iff \varphi_{\Gamma} = 45^o$$

Για το σημείο Λ ισχύει (με τη βοήθεια του νομου συνημιτόνων)

$$\vec{v}_{\Lambda} = |\vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\pi}| = \sqrt{{v_{cm}}^2 + {v_{\pi}}^2 + 2v_{cm}v_{\pi}\cos\theta}$$

και

$$\tan\varphi_{\Lambda} = \frac{v_{\pi}\sin\theta}{v_{cm} + v_{\pi}\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$$



Σχήμα 9.1926 *Μεταφορική και περιστροφική ταχύτητα*

Για το σημείο Ε ισχύει ($v_{cm} = \omega R$ και $v_{\pi} = \omega\frac{R}{2}$)

$$\begin{aligned} v_E &= |\vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\pi}| = \sqrt{{v_{cm}}^2 + {v_{\pi}}^2} = \sqrt{{v_{cm}}^2 + \left(\frac{v_{cm}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4{v_{cm}}^2}{4} + \frac{{v_{cm}}^2}{4}} = \sqrt{\frac{5{v_{cm}}^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}v_{cm} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\omega R \end{aligned}$$

και

$$\tan\varphi_E = \frac{v_{\pi}}{v_{cm}} = \frac{\omega\frac{R}{2}}{\omega R} = \frac{1}{2}$$

Για το σημείο Θ ισχύει ($v_{cm} = \omega R$ και $v_{\pi} = \omega\frac{R}{2}$)

$$v_{\Theta} = |\vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\pi}| = v_{cm} + v_{\pi} = v_{cm} + \frac{v_{cm}}{2} = \frac{3}{2}v_{cm} = \frac{3}{2}\omega R$$

Λύση 2.

α) Για τη χρονική στιγμή $t_1 = 5s$ ισχύει

$$\omega_1 = \omega_0 - a_\gamma t_1 \;\Leftrightarrow\; 0 = 10 - a_\gamma \cdot 5 \;\Leftrightarrow\; a_\gamma = \frac{10}{5} = 2\,\frac{rad}{s^2}$$

β) Έως τη χρονική στιγμή t_1 το Σ διέγραψε γωνία

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2} a_\gamma t_1^2 \; = 10 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2 = 25\,rad$$

οπότε ο αριθμός των περιστροφών είναι

$$\frac{25}{2\pi} = 3,98$$

άρα έχει κάνει περίπου 4 κύκλους.

γ) Για τη χρονική στιγμή $t_2 = 3s$ ισχύει

$$\omega_2 = \omega_0 - a_\gamma t_2 \;\Leftrightarrow\; \omega_2 = 10 - 2 \cdot 3 \;\Leftrightarrow\; \omega_2 = 4\,\frac{rad}{s}$$

οπότε η κεντρομόλος επιτάχυνση του Α την στιγμή $t_2 = 3s$ είναι

$$a_{kA} = \frac{{v_\text{A}}^2}{r} = \frac{{\omega_2}^2 r^2}{r} = \omega_2^2 r = 4^2 \cdot 0,1 = 1,6\,\frac{m}{s^2}$$

Λύση 3.

α) Το στερεό σταματάει μετά από 10 πλήρεις στροφές ($\theta_1 = 10 \cdot 2\pi = 20\ (rad)$, οπότε για τη χρονική στιγμή t_1 που σταματάει ισχύει:

- η γωνιακή του ταχύτητα γίνεται μηδέν όταν

$$\omega_1 = \omega_0 - a_\gamma t_1 \ \Leftrightarrow\ 0 = 10 - a_\gamma t_1 \ \Leftrightarrow\ t_1 = \frac{10}{a_\gamma} \qquad (i)$$

- η γωνία του τη χρονική στιγμή t_1 είναι ($\theta_1 = \theta(t_1) = 10 \cdot 2\pi = 20\pi$), οπότε

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2} a_\gamma t_1^2 \ \Leftrightarrow\ 20\pi = 10 t_1 - \frac{1}{2} a_\gamma t_1^2$$

Αντικαθιστώντας την t_1 από την (i) παίρνουμε

$$20\pi = 10\frac{10}{a_\gamma} - \frac{1}{2} a_\gamma \left(\frac{10}{a_\gamma}\right)^2 \ \Leftrightarrow\ 20\pi = \frac{10^2}{2a_\gamma} \ \Leftrightarrow\ a_\gamma = \frac{10^2}{2 \cdot 20\pi} = \frac{5}{2\pi}\ \frac{rad}{s^2}$$

β) Αντικαθιστώντας την a_γ από την (i) την παίρνουμε

$$t_1 = \frac{10}{a_\gamma} = \frac{10}{\frac{5}{2\pi}} = 4\pi\ (s)$$

γ) Η ταχύτητα και η κεντρομόλος επιτάχυνση του Α τη χρονική στιγμή

$$t_2 = \frac{t_1}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi\ (s)$$

είναι

$$v_A = r\omega_2 = r\left(\omega_0 - a_\gamma t_2\right) = 0,1 \cdot \left(10 - \frac{5}{2\pi} \cdot 2\pi\right) = 0,1 \cdot 5 = 0,5\ \frac{m}{s}$$

και

$$a_{kA} = r\omega_2 62 = 0,1 \cdot 5^2 = 2,5\ \frac{m}{s^2}$$

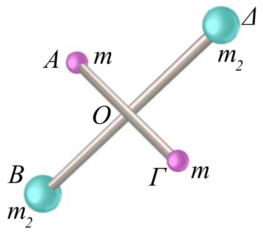
Λύση 4.

α) Η ροπή αδράνειας των Β και Δ ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το Ο είναι

$$I_B = m_2(OB)^2 = 3ml^2$$

και των Α και Γ

$$I_A = m_1(OA)^2 = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{4}$$



Σχήμα 9.193 *Το στερεό της Άσκησης 4*

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ΑΓ ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το Ο είναι

$$I_1 = \frac{1}{12}mA\Gamma^2 = \frac{1}{12}ml^2$$

και όμοια της ράβδου μήκους ΒΔ είναι

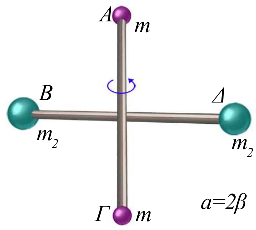
$$I_2 = \frac{1}{12}2mB\Delta^2 = \frac{1}{12}2m(2l)^2 = \frac{2ml^2}{3}$$

Άρα η ροπή αδράνειας του στερεού αυτού είναι

$$I_B = 2I_A + 2I_B + I_1 + I_2 = 2\cdot\frac{ml^2}{4} + 2\cdot 3ml^2 + \frac{ml^2}{3} + \frac{2ml^2}{3} = 8ml^2$$

β) Η ροπή αδράνειας των Β και Δ ως προς την ευθεία ΑΓ είναι

$$I_B = m_2 l^2 = 3ml^2$$



Σχήμα 9.1936 *Το στερεό της Άσκησης 4*

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα ΑΓ των Α και Γ καθώς και της ράβδου ΑΓ είναι μηδέν,

$$I_A = 0 \quad \text{και} \quad I_1 = 0$$

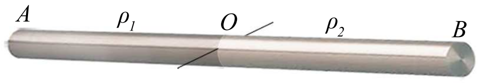
Επίσης, η ροπή αδράνειας της ράβδου ΒΔ ως προς τον άξονα ΑΓ είναι :

$$I_2 = \frac{1}{12}2m(2l)^2 = \frac{1}{12}2m(2l)^2 = \frac{2ml^2}{3}$$

Έτσι, η ροπή αδράνειας του στερεού αυτού είναι

$$\begin{aligned} I_A &= 2I_B + 2I_A + I_1 + I_2^2 = 3ml^2 + 2\cdot 0 + 0 + \frac{ml^2}{3} \\ &= \frac{19ml^2}{3} \end{aligned}$$

Λύση 8.



Σχήμα 9.197 *Το στερεό της Άσκησης 8*

α) Σύμφωνα με τον Πίνακα 9.1, οι ροπές αδράνειας ως προς τον άξονα I_a των δύο τμημάτων της ράβδου είναι

$$I_{a_1} = I_{cm} + m_1 d_1^2 = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m_1 l^2}{3}$$

και

$$\begin{aligned} I_{a_2} &= I_{cm} + m_2 d_2^2 = \frac{1}{12} m_2 l^2 + m_2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ &= \frac{m_2 l^2}{3} \end{aligned}$$

Άρα,

$$I_a = I_{a_1} + I_{\alpha_2} = \frac{1}{3}(m_1 + m_2) l^2$$

β) Οι ροπές αδράνειας ως προς τον άξονα I_β των δύο τμημάτων της ράβδου είναι

$$I_{\beta 1} = I_{cm} + m_1 d_1^2 = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m_1 l^2}{3}$$

και

$$I_{\beta 2} = I_{cm} + m_2 d_2^2 = \frac{1}{12} m_2 l^2 + m_2 \left(\frac{3l}{2}\right)^2 = \frac{28 m_2 l^2}{12} = \frac{7 m_2 l^2}{3}$$

Άρα,

$$I_\beta = I_{\beta_1} + I_{\beta_2} = \frac{m_1 l^2}{3} + \frac{7 m_2 l^2}{3} = \frac{(m_1 + 7 m_2)\, l^2}{3}$$

Λύση 10.

Επειδή το στερεό δέχεται σταθερή ροπή $\tau = 2\,Nm$, περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση a_γ για την οποία ισχύει

$$\tau = I a_\gamma \qquad (i)$$

όπου I η ζητούμενη ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής.
Επειδή το στερεό δεν έχει αρχική γωνιακή ταχύτητα, η γωνιακή ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t είναι

$$\omega(t) = a_\gamma t$$

οπότε τη χρονική στιγμή $t_1 = 10\,s$ η γωνιακή ταχύτητά του είναι

$$\omega_1 = 0 + a_\gamma \cdot 10 = 10 a_\gamma \qquad (ii)$$

Επειδή η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου Α τη χρονική στιγμή $t_1 = 10\,s$ είναι $a_{1A} = 10\,m/s^2$

$$a_{1A} = \omega^2 r_A \;\Leftrightarrow\; 10 = \omega^2 \cdot 0,1 \;\Leftrightarrow\; \omega = 10\,\frac{rad}{s}$$

Έτσι, η (ii) γίνεται

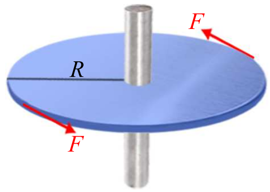
$$\omega = 10 a_\gamma \;\Leftrightarrow\; 10 = 10 a_\gamma \;\Leftrightarrow\; a_\gamma = 1\,\frac{rad}{s^2}$$

οπότε η (i) δίνει

$$I = \frac{\tau}{a_\gamma} = \frac{2}{1} = 2\,kg \cdot m^2$$

Λύση 11.

α) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενεργείας για τον δίσκο από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ως τη χρονική στιγμή που έχει ολοκληρώσει 5 στροφές, (όπου $\theta_1 = 5 \cdot 2\pi = 10\pi rad$) παίρνουμε



Σχήμα 9.182 *Περιστρεφόμενος δίσκος*

$$\begin{aligned} K_1 - K_0 = \Sigma W_F = \quad &\Leftrightarrow \frac{1}{2}I\omega_1^2 - 0 = W_\tau \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega_1^2 = \tau\theta_1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0,2^2\cdot\omega_1^2 = \frac{4}{5\pi}\cdot 10\pi \\ &\Leftrightarrow 0,02\cdot\omega_1^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{8}{0,02}} = 20\frac{rad}{s} \end{aligned}$$

Η ταχύτητα ενός σημείου Α της περιφέρειας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$v_A = \omega_1 R = 20\cdot 0,2 = 4\,m/s$$

β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου τη χρονική στιγμή που ολοκλήρωσε την πρώτη περιστροφή είναι

$$\frac{dK}{dt} = P_{\Sigma\tau} = P_\tau = \tau\omega_2, \qquad (i)$$

όπου ω_2 η γωνιακή ταχύτητά του τη χρονική στιγμή που ολοκλήρωσε την πρώτη περιστροφή. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. προκύπτει

$$\begin{aligned} K_1 - K_0 = \Sigma W_F \quad &\Leftrightarrow \frac{1}{2}I\omega_2^2 - 0 = W_\tau \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega_2^2 = \tau\theta_2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0,2^2\cdot\omega_2^2 = \frac{4}{5\pi}\cdot 2\pi \\ &\Leftrightarrow 0,02\cdot\omega_2^2 = \frac{8}{5} \\ &\Leftrightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{8}{0,1}} = 4\sqrt{5}\,\frac{rad}{s} \end{aligned}$$

Έτσι η (i) δίνει

$$\frac{dK}{dt} = \tau\omega_2 = \frac{4}{5\pi}\cdot 4\sqrt{5} = \frac{16\sqrt{5}}{5\pi}\,\frac{J}{s}$$

γ) $i)$ Ο ρυθμός παραγωγής έργου από τη ροπή τη χρονική στιγμή t_2 είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου, οπότε

$$\frac{dW_\tau}{dt} = \frac{dK}{dt} = \frac{16\sqrt{5}}{5\pi}\,\frac{J}{s}$$

$ii)$ Ο ρυθμός παραγωγής έργου από τη ροπή τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$\frac{dW_\tau}{dt} = \tau\cdot\omega_1 = \frac{4}{5\pi}\cdot 20 = \frac{16}{\pi}\,\frac{J}{s}$$

Λύση 22.

α) Για να ισορροπεί το σύστημα πρέπει:

- Για το σύστημα Σ_1 - κινούμενη τροχαλία να ισχύει

$$\begin{aligned}\sum F = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad T_1 + T_3 - B_1 - B = 0\\ &\Leftrightarrow \quad T_1 + T_3 - m_1 g - Mg = 0\\ &\Leftrightarrow \quad T_1 + T_3 = 2\cdot 10 + 4\cdot 10\end{aligned}$$

Σχήμα 9.210 *Δύο τροχαλίες*

οπότε

$$T_1 + T_3 = 60 \qquad (i)$$

- Για την κάτω τροχαλία ισχύει

$$\sum M = 0 \;\Leftrightarrow\; M_{T_3} - M_{T_1} = 0 \;\Leftrightarrow\; T_3 R - T_1 R = 0$$

οπότε

$$T_3 = T_1 \qquad (ii)$$

Έτσι από την (i) προκύπτει

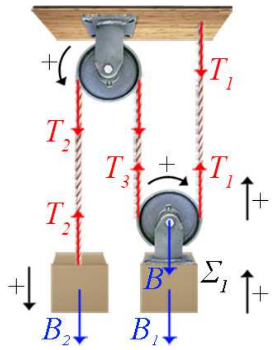
$$T_3 = T_1 = 30\mathrm{N}$$

- Για την πάνω τροχαλία ισχύει

$$\sum M = 0 \;\Leftrightarrow\; M_{T_2} - M_{T_3} = 0 \;\Leftrightarrow\; T_2 R - T_3 R = 0 \;\Leftrightarrow\; T_2 = T_3 = 30\,\mathrm{N}$$

- Για το Σ_2 ισχύει

$$\sum F = 0 \;\Leftrightarrow\; B_2 - T_2 = 0 \Rightarrow m_2 g = T_2 \;\Leftrightarrow\; m_2 = \frac{30}{10} = 3\ kg$$



Σχήμα 9.210β *Δυνάμεις στις δύο τροχαλίες*

β) Επειδή $m_2 = 6kg > 3kg$ το Σ_2 θα κατεβαίνει και το Σ_1 μαζί με την κινούμενη τροχαλία θα ανεβαίνει.
Σχεδιάζουμε ξανά όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σε όλα τα σώματα και θεωρούμε ως θετική φορά για κάθε σώμα τη φορά κίνησής του. Έτσι:

- από τον θεμελιώδη νόμο της μεταφορικής κίνησης για το Σ_2 παίρνουμε

$$\sum F = m_2 a_{cm2} \;\Leftrightarrow\; m_2 g - T_2 = m_2 a_{cm2} \;\Leftrightarrow\; 60 - T_2 = 6a_{cm2} \qquad (i)$$

- από τον θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης για την πάνω (αβαρή) τροχαλία προκύπτει

$$\sum M = I a_\gamma \;\Leftrightarrow\; M_{T_2} - M_{T_3} = 0\cdot a_{\gamma 2} \;\Leftrightarrow\; T_2 R - T_3 R = 0 \;\Leftrightarrow\; T_2 = T_3 \qquad (ii)$$

- από τον θεμελιώδη νόμο της μεταφορικής κίνησης για το σύστημα τροχαλία - Σ_1 προκύπτει

$$\begin{aligned}\sum F = m a_{cm1} \quad &\Leftrightarrow \quad T_1 + T_3 - B_1 - B = (M + m_1)\, a_{cm1}\\ &\Leftrightarrow \quad T_1 + T_3 - m_1 g - Mg = (M + m_1)\, a_{cm1}\\ &\Leftrightarrow \quad T_1 + T_3 - 20 - 40 = 6a_{cm1}\end{aligned}$$

οπότε

$$T_1 + T_3 = 6a_{cm1} + 60 \qquad (iii)$$

- από τον θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης για την κάτω τροχαλία προκύπτει

$$\begin{aligned}\sum M = I a_\gamma \quad &\Leftrightarrow \quad M_{T_3} - M_{T_1} = \frac{1}{2} M R^2 a_{\gamma 1}\\ &\Leftrightarrow \quad T_3 R - T_1 R = \frac{1}{2} M R^2 a_{\gamma 1}\\ &\Leftrightarrow \quad T_3 - T_1 = \frac{1}{2} M R a_{\gamma 1}\\ &\Leftrightarrow \quad T_3 - T_1 = \frac{1}{2} 4\cdot 0,2 a_{\gamma 1}\end{aligned}$$

οπότε

$$T_3 - T_1 = 0,4\cdot a_{\gamma 1} \qquad (iv)$$

Επειδή

$$v_\Delta = v_\Gamma = v_\mathrm{B} \;\Leftrightarrow\; v_{cm2} = v_{\pi 2} = v_\mathrm{B}$$

παίρνουμε

$$v_{cm2} = \omega_2 R = v_\mathrm{B} \qquad (v)$$

Επειδή το σχοινί από το σημειο Ε εως το Α είναι μη ελαστικό, τεντωμένο και ακίνητο, ισχύει

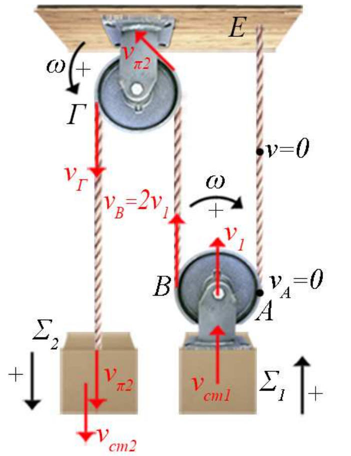
$$v_\mathrm{A} = 0$$

Επίσης, επειδή το σχοινί δεν ολισθαίνει πάνω στη κινούμενη τροχαλία ισχύει

$$v_1 = v_{cm1} = v_{\pi 1} = \omega_1 R \qquad (vi)$$

και

$$v_B = v_{cm} + v_{\pi 1} = 2v_1 \qquad (vii)$$



Σχήμα 9.227γ *Δυνάμεις στις δύο τροχαλίες*

οπότε από τις (v), (vi) και (vii) προκύπτει

$$v_{cm2} = \omega_2 R = 2v_{cm1} = 2\omega_1 R = \alpha_{\gamma 2} R = 2\alpha_{cm1} = 2\alpha_{\gamma 1} R \qquad (viii)$$

Λύνουμε το σύστημα των (i), (ii), (iii), (iv) και $(viii)$.
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (i), (iii) και (iv) προκύπτει

$$60 - T_2 + T_1 + T_3 + T_3 - T_1 = 6a_{cm2} + 6a_{cm1} + 60 + 0,46a_\gamma$$

ή

$$T_3 = 6a_{cm2} + 3a_{cm2} + a_{cm2}$$

ή (λόγω και της (ii))

$$T_3 = T_2 = 10a_{cm2}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (i) παίρνουμε

$$60 - T_2 = 6a_{cm2} \;\Leftrightarrow\; 60 - 10a_{cm2} = 6a_{cm2} \;\Leftrightarrow\; a_{cm2} = \frac{60}{16} = \frac{15}{4}\,\frac{m}{s^2}$$

Από την $(viii)$ προκύπτει

$$\alpha_{cm2} = 2\alpha_{cm1} \;\Leftrightarrow\; \alpha_{cm1} = \frac{15}{8}\,\frac{m}{s^2}$$

και

$$\alpha_{cm2} = 2\alpha_{\gamma 1} R \;\Leftrightarrow\; \alpha_{\gamma 1} = \frac{15}{4 \cdot 2 \cdot 0,2} = \frac{15}{1,6}\,\frac{rad}{s^2}$$

Από την (i) παίρνουμε

$$60 - T_2 = 6a_{cm2} \;\Leftrightarrow\; T_2 = 60 - 6\frac{15}{4} \;\Leftrightarrow\; T_2 = 37,5\,N.$$

και από την (ii)

$$T_2 = T_3 = 37,5\,N$$

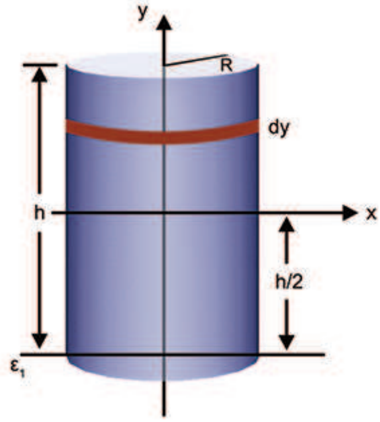
Έτσι, η (iv) δίνει

$$T_3 - T_1 = 0,4a_{\gamma 1} \;\Leftrightarrow\; 37,5 - T_1 = 0,4 \cdot \frac{15}{1,6} \;\Leftrightarrow\; T_1 = 37,5 - \frac{15}{4} = 33,75\,\mathrm{N}$$

Λύση 26.

α) Χρησιμοποιούμε σύστημα συντεταγμένων με άξονα y τον άξονα του κυλινδρικού φλοιού και άξονα x μία διάμετρό του που διέρχεται από το κέντρο του και τον χωρίζουμε σε δακτυλίους ακτίνας R, πάχους dy και μάζας (a το πάχος του φλοιού και ρ η σταθερή πυκνότητά του)

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi R a dy$$



Σχήμα 9.214

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 9.186 και το θεώρημα Steiner, η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα x (διάμετρος του) ενός τέτοιου δακτυλίου είναι

$$dI = \frac{1}{2}R^2 dm + y^2 dm = \left(\frac{1}{2}R^2 + y^2\right) 2\pi\rho R a dy,$$

οπότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.;, η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου είναι

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_\Delta dI = 2\pi\rho R a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{1}{2}R^2 + y^2\right) dy \\
&= 2\pi\rho R a 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \left(\frac{1}{2}R^2 + y^2\right) dy \\
&= 4\pi\rho R a \left(\frac{1}{2}R^2 \left[y\right]_0^{\frac{h}{2}} + \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{h}{2}}\right) \\
&= 4\pi\rho R a \left(\frac{1}{2}R^2 \frac{h}{2} + \frac{h^3}{24}\right) \\
&= \pi\rho R a h \left(R^2 + \frac{h^2}{6}\right) \\
&= \frac{m}{2}\left(R^2 + \frac{h^2}{6}\right)
\end{aligned}$$

αφού η μάζα του κυλίνδρου είναι

$$m = \rho V = \rho 2\pi R h a$$

β) Σύμφωνα με το θεώρημα Steiner και το (α), η ροπή αδράνειας του κυλινδρικού φλοιού ως προς μία διάμετρο της βάσης του είναι

$$\begin{aligned}
I_2 &= I_1 + m\left(\frac{h}{2}\right)^2 \\
&= \frac{m}{2}\left(R^2 + \frac{h^2}{6}\right) + m\left(\frac{h}{2}\right)^2 \\
&= \frac{m}{2}\left(R^2 + \frac{2h^2}{3}\right)
\end{aligned}$$

γ) Αν ο δίσκος ακινητοποιηθεί τη χρονική στιγμή t_1, η γωνιακή επιβράδυνσή του είναι

$$a_\gamma = \left|\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right| = \left|\frac{0-\omega_0}{t_1 - 0}\right| = \frac{\omega_0}{t_1}$$

οπότε, σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής της περιστροφικής κίνησης, το μέτρο της επιβραδύνουσας ροπής που δέχεται είναι

$$\tau = I_a|a_\gamma| = \frac{1}{2}mR^2|a_\gamma| = \frac{1}{2}mR^2\frac{\omega_0}{t_1} = \frac{mR^2\omega_0}{2t_1}$$

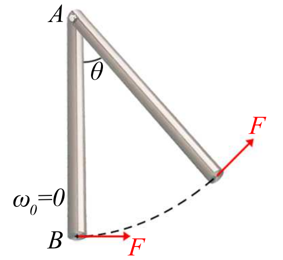
δ) Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου στην περίπτωση αυτή είναι

$$a_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - 0}{t_2 - 0} = \frac{\omega_2}{t_2}$$

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής της περιστροφικής κίνησης, το μέτρο της επιβραδύνουσας ροπής είναι

$$\tau = I_a|a_\gamma| = \frac{1}{2}mR^2|a_\gamma| = \frac{mR^2\omega_2}{2t_2}$$

Λύση 32.



Σχήμα 9.220

Από το θεώρημα Steiner προκύπτει ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής (που περνάει από το A) είναι

$$\begin{aligned} I &= I_{cm} + md^2 \\ &= \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3} \\ &= \frac{0,1 \cdot 0,3^2}{3} = 0,003\, kg\, m^2 \end{aligned}$$

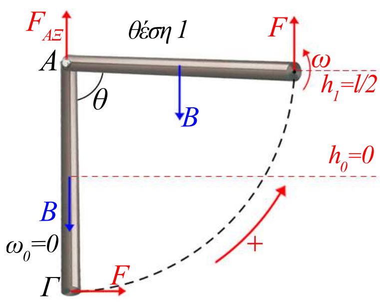
Το βάρος είναι συντηρητική δύναμη και το έργο του είναι

$$W = -\Delta U = -mg\frac{l}{2}$$

Επειδή η δύναμη $F_{a\xi}$ που δέχεται η ράβδος από τον άξονα διέρχεται από το σημείο A, η ροπή της είναι μηδέν, οπότε

$$W_{F_{a\xi}} = 0$$

Το έργο της F στην περιστροφική αυτή κίνηση είναι



Σχήμα 9.220б

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_F d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} Fl d\theta \\ &= l\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{2\theta}{\pi}\right) d\theta \\ &= 0,3\left[2\theta - \frac{\theta^2}{\pi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0,3\left[2\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] \\ &= 0,3 \cdot \frac{3\pi}{4}^2 = \frac{0,9\pi}{4} \\ &= 0,225\pi \end{aligned}$$

Έτσι, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε., με αρχική θέση την κατακόρυφη και τελική την οριζόντια θέση της ράβδου, παίρνουμε

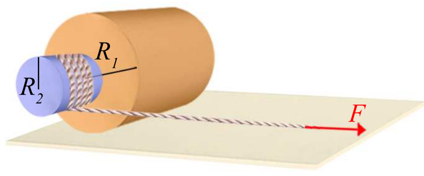
$$\begin{aligned} K_\tau - K_a = \Sigma W \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}I\omega_1^2 = W_F + W_B \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}I\omega_1^2 = 0,225\pi - mg\frac{l}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot 0,003 \cdot \omega_1^2 = 0,225\pi - 0,1\cdot 10 \cdot \frac{0,3}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 0,0015\omega_1^2 = 0,225\pi - 0,15 \\ &\Leftrightarrow \quad \omega_1^2 = \frac{0,225\pi - 0,15}{0,0015} = 371,24 \end{aligned}$$

οπότε

$$\omega_1 = \sqrt{371,24} = 19,28\frac{rad}{s}$$

Λύση 33.

α) Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και ορίζουμε ως θετική φορά, τη φορά κίνησης (θετική φορά προς τα δεξιά και θετική φορά της περιστροφικής κίνησης την φορά των δεικτών του ρολογιού). Επειδή ο κύλινδρος επιταχύνεται, η στατική τριβή έχει φορά προς τα αριστερά (είναι η μόνη δύναμη με ροπή που μπορεί να επιταχύνει την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου - η ροπή της F είναι αρνητική).



Σχήμα 9.221 *Κύλιση κυλίνδρου χωρίς ολίσθηση*

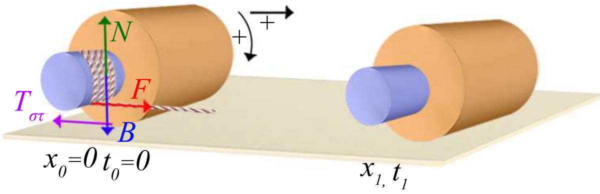
- Από τον θεμελιώδη νόμο της μεταφορικής κίνησης

$$\sum F = ma_{cm} \Leftrightarrow F - T = ma_{cm} \Leftrightarrow 12 - T = 2a_{cm} \qquad (i)$$

- Από τον θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης προκύπτει

$$\sum M = \mathrm{I}a_\gamma = M_T - M_F = Ia_\gamma \Leftrightarrow TR_1 - FR_2 = Ia_\gamma$$

$$\Leftrightarrow T\frac{1}{5} - 12\frac{1}{10} = 0,2a_\gamma$$



Σχήμα 9.221β *Οι δυνάμεις*

οπότε

$$0,2T - 1,2 = 0,2a_\gamma \qquad (ii)$$

- Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει

$$a_{cm} = a_\gamma R_1 \Leftrightarrow a_{cm} = 0,2a_\gamma \qquad (iii)$$

Διαιρώντας τις εξισώσεις (i) και (ii) κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{12 - T}{0,T_1} = \frac{a_{cm}}{0,2a_\gamma}$$

ή

$$\frac{12 - T}{0,2T - 1} = 2 \Leftrightarrow 12 - T = 0,4T - 2 \Leftrightarrow 1,4T = 14$$

ή

$$T = \frac{14}{1,4} = 10N$$

Από την (i) προκύπτει

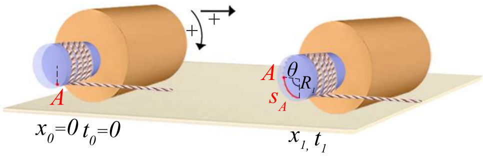
$$12 - T_{\sigma M} = 2a_{cm} \Leftrightarrow 12 - 10 = 2a_{cm} \Leftrightarrow a_{cm} = 1\,\frac{m}{s^2}$$

Η (iii) δίνει

$$a_{cm} = 0,2a_\gamma \Leftrightarrow a_\gamma = \frac{1}{0,2} = 5\,\frac{rad}{s^2}$$

β) Το μήκος του σκοινιού που τυλίγεται ως τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με το διάστημα s_A που διανύει το σημείο A, δηλαδή

$$s_A = R_1\theta_1 = R_1\frac{1}{2}a_\gamma t_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2^2 = \frac{5}{6}$$



Σχήμα 9.221γ

γ) Από τον θεμελιώδη νόμο της μεταφορικής κίνησης παίρνουμε

$$\sum F_x = ma_{cm} \Leftrightarrow F - T = 2a_{cm} \qquad (iv)$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης προκύπτει

$$\sum M = \mathrm{I}a_\gamma \Leftrightarrow M_T - M_F = Ia_\gamma \Leftrightarrow TR_2 - FR_1 = Ia_\gamma$$

οπότε

$$T\frac{1}{5} - F\frac{1}{12} = 0,2a_\gamma \qquad (v)$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει

$$a_{cm} = a_\gamma R_2 \;\Leftrightarrow\; a_{cm} = 0,2a_\gamma \qquad (vi)$$

Διαιρώντας τις εξισώσεις (iv) και (v) κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{F - T}{\frac{1}{5} - \frac{1}{12}F} = \frac{2a_{cm}}{0,2a_\gamma}$$

ή

$$\frac{F - T}{\frac{1}{5} - \frac{1}{12}F} = 2$$

ή

$$F - T = \frac{2}{5} - \frac{1}{6}F$$

ή

$$\frac{7}{6}F = \frac{7}{5}T$$

ή

$$T = \frac{5}{6}F$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει για την στατική τριβή ισχύει

$$T \le \mu N$$

ή

$$\frac{5}{6}F \le 0,6mg$$

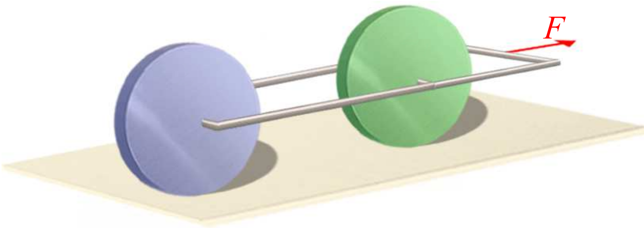
ή

$$F \le \frac{6}{5} \cdot 0,6 \cdot 2 \cdot 10 = 14,4N$$

οπότε η μέγιστη τιμή της F ώστε να μην γλιστρήσει ο κύλινδρος είναι

$$F_{\max} = 14,4\,N$$

Λύση 34.



Σχήμα 9.222 *Κύλιση δύο κυλίνδρων*

Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε κύλινδρο και ορίζουμε ως θετική φορά τη φορά κίνησης (θετική φορά προς τα δεξιά και θετική φορά της περιστροφικής κίνησης την φορά των δεικτών του ρολογιού).
Αφού οι δύο κύλινδροι κάνουν επιταχυνόμενη κίνηση (και μεταφορική και περιστροφική), οι τριβές έχουν φορά προς τα αριστερά (αφού είναι οι μόνες δυνάμεις με ροπή, οι οποίες μπορούν να επιταχύνουν την περιστροφική κίνηση).
Επομένως αφού η επιτάχυνση του Σ_2 είναι προς τα δεξιά, η συνολική δύναμη που δέχεται έχει φορά προς τα δεξιά, οπότε η δύναμη που δέχεται από τη ράβδο έχει φορά προς τα δεξιά. Άρα οι δυνάμεις που ασκεί η ράβδος έχουν φορά προς τα μέσα.

- Από τον θεμελιώδη νόμο της μεταφορικής κίνησης για το Σ_1

$$\sum F = m_1 a_{cm1} \Leftrightarrow F - T_1 - T = m_1 a_{cm1}$$

ή

$$3 - T_1 - T = a_{cm1} \qquad (i)$$

- Από τον θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης για το Σ_1 προκύπτει

$$\begin{aligned}\sum M = I_1 \cdot a_{\gamma 1} \quad &\Leftrightarrow \quad T_1 R = \frac{1}{2} m_1 R^2 a_{\gamma 1} \\ &\Leftrightarrow \quad T_1 = \frac{1}{2} m_1 R a_{\gamma 1} \\ &\Leftrightarrow \quad T_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,1 a_{\gamma 1} \\ &\Leftrightarrow \quad T_1 = 0,05 a_{\gamma 1}\end{aligned} \qquad (ii)$$

- Επειδή ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει

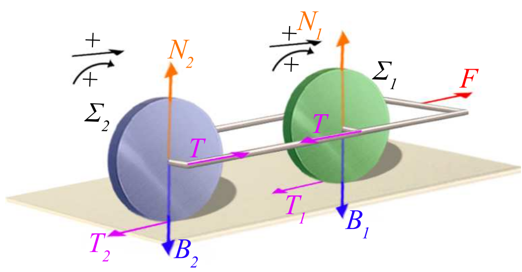
$$a_{cm1} = a_{\gamma 1} R \Leftrightarrow a_{cm1} = 0,1 a_{\gamma 1} \qquad (iii)$$

- Από τον θεμελιώδη νόμο της μεταφορικής κίνησης για το Σ_2 παίρνουμε

$$\sum F = m_2 a_{cm2} \Leftrightarrow T - T_2 = m_2 a_{cm2}$$

ή

$$T - T_2 = 2 a_{cm2} \qquad (iv)$$



Σχήμα 9.222б

- Από τον θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης για το Σ_2 προκύπτει

$$\begin{aligned}\sum M = I_2 a_{\gamma 2} \quad &\Leftrightarrow \quad T_2 R = \frac{1}{2} m_2 R^2 a_{\gamma 2} \\ &\Leftrightarrow \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 R a_{\gamma 2} \Leftrightarrow T_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,1 \cdot a_{\gamma 2} \\ &\Leftrightarrow \quad T_2 = 0,1 a_{\gamma 2}\end{aligned} \qquad (v)$$

- Επειδή ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει

$$a_{cm2} = a_{\gamma 2} R \Leftrightarrow a_{cm2} = 0,1 a_{\gamma 2} \qquad (vi)$$

- Επειδή οι κύλινδροι συνδέονται με τη ράβδο, τα κέντρα μάζας τους κινούνται με την ίδια ταχύτητα άρα και με την ίδια επιτάχυνση

$$a_{cm1} = a_{cm2} = a_{cm}$$

και από τις (iii) και (vi)

$$a_{cm1} = a_{cm2} = a_{cm} = 0,1 \alpha_{\gamma 1} = 0,1 \alpha_{\gamma 2} = 0,1 \alpha_{\gamma} \qquad (vii)$$

Και τώρα λύνουμε το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων ((i)-(vii)) Προσθέτοντας κατά μέλη τις (i), (ii), (iv) και (v):

$$3 - T_1 - T = a_{cm} \tag{i}$$

$$T_1 = 0,05a_\gamma \tag{ii}$$

$$T - T_2 = 2a_{cm} \tag{iv}$$

$$T_2 = 0,1a_\gamma \tag{v}$$

προκύπτει

$$3 = 0,05a_\gamma + 0,05a_\gamma + 2a_{cm2} + 0,1a_\gamma$$

ή

$$3a_{cm} + 0,15a_\gamma$$

ή

$$3 \cdot 0,1a_{cm2} + 0,15a_\gamma = 3 \Leftrightarrow 0,45a_\gamma = 3$$

οπότε

$$a_\gamma = \frac{3}{0,45} = \frac{20}{3}\,\frac{rad}{s}$$

Έτσι από την (vii) προκύπτει

$$a_{cm1} = a_{cm2} = a_{cm} = 0,1\alpha_\gamma = 0,1 \cdot \frac{20}{3} = \frac{2}{3}\,\frac{m}{s^2}$$

και από την (ii)

$$T_1 = 0,05a_{\gamma 1} = 0,05 \cdot \frac{20}{3} = \frac{1}{3}N$$

Έτσι, η (v) δίνει

$$T_2 = 0,1 \cdot a_{\gamma 2} = 0,1 \cdot \frac{20}{3} = \frac{2}{3}N$$

Τέλος η (iv) δίνει

$$T - T_2 = 2a_{cm2} \Leftrightarrow T = 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2\,\mathrm{N}$$

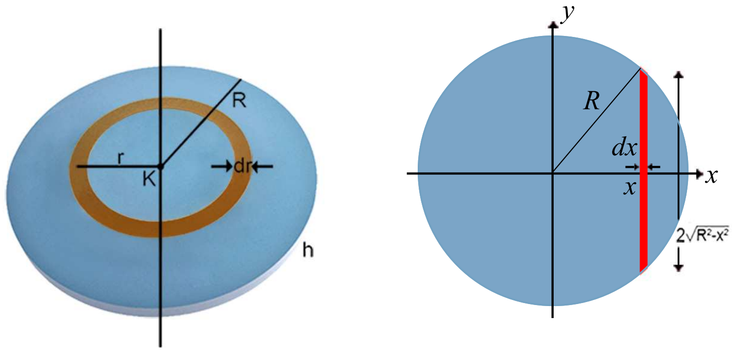
Λύση 35.

α) Χωρίζουμε τον δίσκο σε στοιχειώδεις λεπτούς ομόκεντρους δακτυλίους (βλ. σχήμα α) ακτίνων r και $r + dr$, πάχους h όγκου dV και μάζας (ρ η σταθερή πυκνότητά του)

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r dr h$$

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα x ενός τέτοιου δακτυλίου είναι

$$dI = r^2 dm = r^2 2\pi \rho h r dr = 2\pi \rho h r^3 dr,$$



Σχήμα ασκ 35 *Ροπή αδράνειας δίσκου*

οπότε η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονά του (κάθετος στο επίπεδό του) είναι

$$\begin{aligned} I_a &= \int_\Delta dI = \int_0^R 2\pi \rho h r^3 dr \\ &= 2\pi \rho h \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \\ &= \frac{\pi \rho h}{2} R^4 \end{aligned} \qquad (i)$$

Η μάζα του δίσκου είναι (V ο όγκος του)

$$m = \rho V = \rho \pi R^2 h = \pi \rho h R^2$$

οπότε η (i) δίνει

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

β) Θεωρούμε σύστημα αξόνων με άξονες x και y δύο κάθετες διαμέτρους του δίσκου (βλ. σχήμα) και χωρίζουμε τον δίσκο σε στοιχειώδη ορθογώνια παράλληλα στον άξονα y μάζας

$$\begin{aligned} dm &= \rho dV \\ &= \rho dA h \\ &= \rho 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx h \end{aligned}$$

όπου ρ η σταθερή πυκνότητά του και ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα y

$$\begin{aligned} dI &= x^2 dm \\ &= x^2 2\rho h \sqrt{R^2 - x^2}\, dx \end{aligned}$$

οπότε θέτοντας

$$x = R \sin t$$

παίρνουμε

$$dx = R \cos t dt$$

και

$$\begin{aligned} \sqrt{R^2 - x^2} &= \sqrt{R^2 - (R \sin t)^2} \\ &= \sqrt{R^2 \left(1 - \sin^2 t\right)} = R\sqrt{\cos^2 t} \\ &= R \cos t \end{aligned}$$

Έτσι, η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς μία διάμετρό του (άξονα y) είναι

$$
\begin{aligned}
I_\delta &= \int_\Delta dI = \int_{-R}^{R} \rho h 2x^2\sqrt{R^2-x^2}\,dx \\
&= 2\cdot 2\rho h \int_0^R x^2\sqrt{R^2-x^2}\,dx \\
&= 4\rho h \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R\sin t)^2 R\cos t R\cos t dt \\
&= 4\rho R^4 h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt \\
&= 4\rho R^4 h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\frac{1+\cos 2t}{2} dt \\
&= 4\rho R^4 h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2 2t}{4} dt \\
&= \rho R^4 h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{1+\cos 4t}{2}\right) dt \\
&= \rho R^4 h \left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 4t}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt \\
&= \rho R^4 h \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi\rho R^4 h}{4} \\
&= \frac{mR^2}{4}
\end{aligned}
$$

αφού η μάζα του δίσκου είναι

$$m = \rho\pi R^2 h$$

γ) Αν ο δίσκος ακινητοποιηθεί σε $8s$, η γωνιακή επιβράδυνσή του είναι

$$a_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{20-0}{0-8} = -2,5\,\frac{rad}{s}$$

οπότε, σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής της περιστροφικής κίνησης, το μέτρο της επιβραδύνουσας ροπής που δέχεται είναι

$$\tau = I_a|a_\gamma| = \frac{1}{2}mR^2|a_\gamma| = \frac{1}{2}\cdot 0,8\cdot 0,2^2\cdot 2,5 = 0,04Nm$$

δ) Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου στην περίπτωση αυτή είναι

$$a_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{6-0}{4-0} = 1,5\,\frac{rad}{s}$$

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής της περιστροφικής κίνησης, το μέτρο της επιβραδύνουσας ροπής είναι

$$\tau = I_a|a_\gamma| = \frac{1}{2}mR^2|a_\gamma| = \frac{1}{2}\cdot 0,8\cdot 0,2^2\cdot 1,5 = 0,024Nm.$$

Λύση 36.

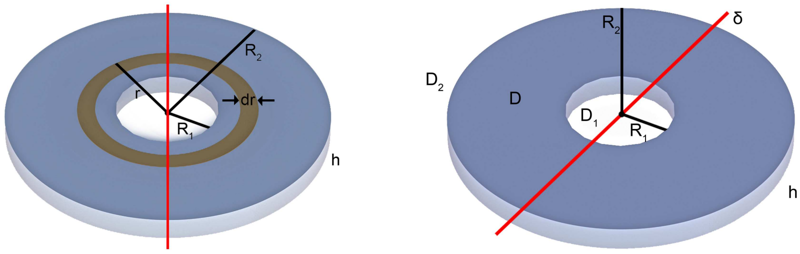
α) Χωρίζουμε το δακτύλιο σε στοιχειώδεις ομόκεντρους δακτυλίους (βλ. Σχήμα α) ακτίνων r και $r+dr$, πάχους h, όγκου V και μάζας (ρ η σταθερή πυκνότητα)

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r dr h,$$

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y ενός τέτοιου δακτυλίου είναι

$$dI = r^2 dm = r^2 2\pi\rho h r dr = 2\pi\rho h r^3 dr,$$

οπότε η ροπή αδράνειας όλου του δακτυλίου είναι



Σχήμα ασκ. 36 *Ροπή αδράνειας δακτυλίου ως προς: α) τον άξονά του, β) μία διάμετρό του*

$$\begin{aligned} I &= \int_\Delta dI \\ &= \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\rho h r^3 dr \\ &= 2\pi\rho h \left[\frac{r^4}{4}\right]_{R_1}^{R_2} \\ &= \frac{2\pi\rho h}{4}\left(R_2^4 - R_1^4\right) \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho h\left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right) \end{aligned} \qquad (i)$$

Η μάζα του δακτυλίου είναι

$$m = \rho V = \rho\left(\pi R_2^2 - \pi R_1^2\right)h = \pi\rho h\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

οπότε η (i) δίνει

$$I = \frac{1}{2}m\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

β) Αν ονομάσουμε D_1, D_2 τους δίσκους ακτίνων R_1, R_2 (βλ. σχήμα) και m_1, m_2 και I_1, I_2 τις μάζες και τις ροπές αδράνειάς τους, τότε

$$I_2 = I + I_1,$$

οπότε (ρ η σταθερή πυκνότητα)

$$\begin{aligned} I &= I_2 - I_1 = \frac{1}{4}m_2R_2^2 - \frac{1}{4}m_1R_1^2 \\ &= \frac{1}{4}\rho\pi R_2^2R_2^2 - \frac{1}{4}\pi\rho R_1^2R_1^2 \\ &= \frac{\pi\rho}{4}\left(R_2^4 - R_1^4\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\left(R_2^4 - R_1^4\right)\frac{m}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2} \\ &= \frac{\pi}{4}\frac{m\left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \\ &= \frac{m}{4}\left(R_2^2 + R_1^2\right) \end{aligned}$$

γ) Αν ο δίσκος ακινητοποιηθεί σε $10s$, η γωνιακή επιβράδυνσή του είναι

$$a_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{8-0}{0-10} = -0,8\frac{rad}{s}$$

οπότε, σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής της περιστροφικής κίνησης, το μέτρο της επιβραδύνουσας ροπής που δέχεται είναι

$$\tau = I|a_\gamma| = \frac{1}{2}m\left(R_1^2 + R_2^2\right)|a_\gamma| = \frac{1}{2}\cdot 4(0,4^2 + 0,6^2)\cdot 0,8 = 0,83Nm$$

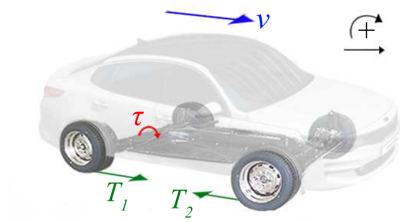
δ) Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου στην περίπτωση αυτή είναι

$$a_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{20-0}{5-0} = 4\,\frac{rad}{s}$$

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής της περιστροφικής κίνησης, το μέτρο της επιβραδύνουσας ροπής είναι

$$\tau = I|a_\gamma| = \frac{1}{2}m\left(R_1^2 + R_2^2\right)|a_\gamma| = \frac{1}{2}\cdot 4(0,4^2 + 0,6^2)\cdot 4 = 4,16Nm$$

Λύση 73.



Σχήμα 9.253

Από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής για την περιστροφική κίνηση των πίσω και μπροστά τροχών και της μεταφορικής κίνησης του αυτοκινήτου παίρνουμε

$$\begin{aligned} I a_\gamma &= \tau - T_1 R && (i) \\ I a_\gamma &= T_2 R && (ii) \\ mR a_\gamma &= T_1 - T_2 && (iii) \end{aligned}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (i) και (iii) παίρνουμε

$$\frac{mR}{I} = \frac{T_1 - T_2}{T_2 R}$$

ή

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{mR^2}{I} + 1 \qquad (iv)$$

Επίσης, από τις (i) και (ii) παίρνουμε

$$\tau - T_1 R = T_2 R$$

ή

$$T_1 + T_2 = \frac{\tau}{R} \qquad (v)$$

Έτσι, η (iv) δίνει

$$T_1 = \left(\frac{mR^2}{I} + 1\right) T_2 \qquad (vi)$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (v) παίρνουμε

$$\left(\frac{mR^2}{I} + 1\right) T_2 + T_2 = \frac{\tau}{R}$$

ή

$$\left(\frac{mR^2}{I} + 2\right) T_2 = \frac{\tau}{R}$$

Άρα, η δύναμη τριβής στους πισινούς τροχούς του αυτοκινήτου είναι

$$T_2 = \frac{\frac{\tau}{R}}{\frac{mR^2 + 2I}{I}} = \frac{I\tau}{R(mR^2 + 2I)}$$

οπότε από την (vi) προκύπτει ότι η δύναμη τριβής στους μπροστινούς τροχούς του αυτοκινήτου είναι

$$T_1 = \frac{mR^2 + I}{I} \frac{I\tau}{R(mR^2 + 2I)} = \frac{mR^2 + I}{mR^2 + 2I} \frac{\tau}{R}$$

Σύμφωνα με την (ii) η επιτάχυνση του αυτοκινήτου είναι

$$a_{cm} = R a_\gamma = R \frac{T_2 R}{I} = \frac{I\tau}{R(mR^2 + 2I)} \frac{R^2}{I} = \frac{\tau R}{mR^2 + 2I}$$

Οι μπροστινοί τροχοί δεν γλιστρούν αν

$$T_1 < \mu N_1$$

ή

$$\frac{mR^2 + I}{mR^2 + 2I} \frac{\tau}{R} < \frac{\mu m g}{2}$$

ή

$$\tau < \frac{mR^2 + 2I}{mR^2 + I} \frac{\mu m g R}{2}$$

και οι πίσω τροχοί δεν γλιστρούν αν

$$T_2 < \mu N_2$$

ή

$$\frac{I\tau}{R(mR^2 + 2I)} < \frac{\mu mg}{2}$$

ή

$$I\tau < (mR^2 + I)\frac{\mu mgR}{2}$$

ή

$$\tau < \frac{mR^2 + I}{I}\frac{\mu mgR}{2}$$

ή

$$\tau < \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)\frac{\mu mgR}{2}$$

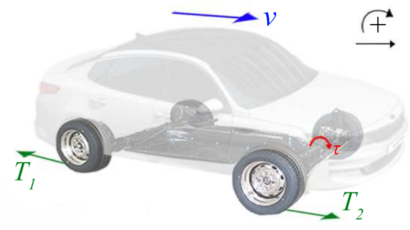
Επομένως, η μέγιστη τιμή της ροπής, ώστε να μην γλιστρήσουν οι τροχοί του αυτοκινήτου είναι

$$\tau_{max} = \frac{\mu mgR}{2}\frac{mR^2 + 2I}{mR^2 + I} \qquad (vi)$$

Από τις (v) και (vi) προκύπτει ότι η μέγιστη επιτάχυνση με την οποία μπορεί να κινηθεί το αυτοκίνητο χωρίς να γλιστρήσουν οι τροχοί του είναι

$$\begin{aligned} a_{cm,max} &= \frac{\mu mgR}{2}\frac{mR^2 + 2I}{mR^2 + I}\frac{R}{mR^2 + 2I} \\ &= \frac{\mu mgR^2}{2(mR^2 + I)} \\ &= \frac{\mu g}{2\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)} \end{aligned}$$

Λύση 74.



Σχήμα 9.254

Από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής για την περιστροφική κίνηση των πίσω και μπροστά τροχών και της μεταφορικής κίνησης του αυτοκινήτου παίρνουμε

$$\begin{aligned} Ia_\gamma &= T_1 R & (i) \\ Ia_\gamma &= \tau - T_2 R & (ii) \\ mRa_\gamma &= T_2 - T_1 & (iii) \end{aligned}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (i) και (iii) παίρνουμε

$$\frac{mR}{I} = \frac{T_2 - T_1}{T_1 R}$$

ή

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{mR^2}{I} + 1 \qquad (iv)$$

Επίσης, από τις (i) και (ii) παίρνουμε

$$\tau - T_2 R = T_1 R$$

ή

$$T_1 + T_2 = \frac{\tau}{R} \qquad (v)$$

Έτσι, η (iv) δίνει

$$T_2 = \left(\frac{mR^2}{I} + 1\right) T_1 \qquad (vi)$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (v) παίρνουμε

$$T_1 + \left(\frac{mR^2}{I} + 1\right) T_1 = \frac{\tau}{R}$$

ή

$$\left(\frac{mR^2}{I} + 2\right) T_1 = \frac{\tau}{R}$$

Άρα, η δύναμη τριβής στους μπροστινούς τροχούς του αυτοκινήτου είναι

$$T_1 = \frac{\frac{\tau}{R}}{\frac{mR^2 + 2I}{I}} = \frac{I\tau}{R(mR^2 + 2I)}$$

οπότε από την (vi) προκύπτει ότι η δύναμη τριβής στους πισινούς τροχούς του αυτοκινήτου είναι

$$T_2 = \frac{mR^2 + I}{I} \frac{I\tau}{R(mR^2 + 2I)} = \frac{mR^2 + I}{mR^2 + 2I} \frac{\tau}{R}$$

Σύμφωνα με την (ii) η επιτάχυνση του αυτοκινήτου είναι

$$a_{cm} = Ra_\gamma = R\frac{T_1 R}{I} = \frac{I\tau}{R(mR^2 + 2I)} \frac{R^2}{I} = \frac{\tau R}{mR^2 + 2I}$$

Οι μπροστινοί τροχοί δεν γλιστρούν αν

$$T_1 < \mu N_1$$

ή

$$\frac{I\tau}{R(mR^2 + 2I)} < \frac{\mu m g}{2}$$

ή

$$I\tau < (mR^2 + I)\frac{\mu m g R}{2}$$

ή

$$\tau < \frac{mR^2 + I}{I} \frac{\mu mgR}{2}$$

ή

$$\tau < \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right) \frac{\mu mgR}{2}$$

και οι πίσω τροχοί δεν γλιστρούν αν

$$T_2 < \mu N_2$$

ή

$$\frac{mR^2 + I}{mR^2 + 2I} \frac{\tau}{R} < \frac{\mu mg}{2}$$

ή

$$\tau < \frac{mR^2 + 2I}{mR^2 + I} \frac{\mu mgR}{2}$$

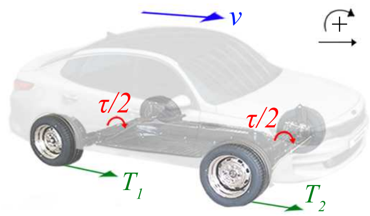
Επομένως, η μέγιστη τιμή της ροπής, ώστε να μην γλιστρήσουν οι τροχοί του αυτοκινήτου είναι

$$\tau_{max} = \frac{\mu mgR}{2} \frac{mR^2 + 2I}{mR^2 + I} \qquad (vi)$$

Από τις (v) και (vi) προκύπτει ότι η μέγιστη επιτάχυνση με την οποία μπορεί να κινηθεί το αυτοκίνητο χωρίς να γλιστρήσουν οι τροχοί του είναι

$$\begin{aligned} a_{cm,max} &= \frac{\mu mgR}{2} \frac{mR^2 + 2I}{mR^2 + I} \frac{R}{mR^2 + 2I} \\ &= \frac{\mu mgR^2}{2(mR^2 + I)} \\ &= \frac{\mu g}{2\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)} \end{aligned}$$

Λύση 75.



Σχήμα 9.255

Από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής για την περιστροφική κίνηση των πίσω και μπροστά τροχών και της μεταφορικής κίνησης του αυτοκινήτου παίρνουμε

$$\begin{aligned} Ia_\gamma &= \frac{\tau}{2} - T_1 R && (i) \\ Ia_\gamma &= \frac{\tau}{2} - T_2 R && (ii) \\ mRa_\gamma &= T_1 + T_2 && (iii) \end{aligned}$$

Από τις (i) και (ii) παίρνουμε

$$\frac{\tau}{2} - T_1 R = \frac{\tau}{2} - T_2 R$$

ή

$$T_1 = T_2 \qquad (iv)$$

οπότε διαιρώντας κατά μέλη τις (ii) και (iii) προκύπτει

$$\tau - T_1 R = T_2 R$$

ή

$$\frac{mRa_\gamma}{Ia_\gamma} = \frac{2T_2}{\dfrac{\tau}{2} - T_2 R}$$

ή

$$2IT_2 = \frac{mR\tau}{2} - mR^2 T_2$$

ή

$$(2I + mR^2)T_2 = \frac{mR\tau}{2} -$$

ή

$$T_2 = \frac{mR\tau}{2(2I + mR^2)}$$

Έτσι, η (iv) δίνει

$$T_1 = T_2 = \frac{mR\tau}{2(2I + mR^2)}$$

Επίσης, από την (iii) προκύπτει ότι η επιτάχυνση του αυτοκινήτου είναι

$$a_{cm} = Ra_\gamma = R\frac{2T_1}{mR} = \frac{2}{m}\frac{mR\tau}{2(mR^2 + 2I)} = \frac{R\tau}{mR^2 + 2I} \qquad (iv)$$

Οι μπροστινοί τροχοί δεν γλιστρούν αν

$$T_1 < \mu N_1$$

ή

$$\frac{mR\tau}{2(2I + mR^2)} < \frac{\mu mg}{2}$$

ή

$$\tau < \frac{\mu g(2I + mR^2)}{R}$$

και οι πίσω τροχοί δεν γλιστρούν αν

$$T_2 < \mu N_2$$

ή

$$\frac{mR\tau}{2(2I + mR^2)} < \frac{\mu mg}{2}$$

ή

$$\tau < \frac{\mu g(2I + mR^2)}{R}$$

Επομένως, η μέγιστη τιμή της ροπής, ώστε να μην γλιστρήσουν οι τροχοί του αυτοκινήτου είναι

$$\tau_{max} = \frac{\mu g(2I + mR^2)}{R} \qquad (v)$$

Από τις (iv) και (v) προκύπτει ότι η μέγιστη επιτάχυνση με την οποία μπορεί να κινηθεί το αυτοκίνητο χωρίς να γλιστρήσουν οι τροχοί του είναι

$$\begin{aligned} a_{cm,max} &= \frac{R\tau_{max}}{mR^2 + 2I} \\ &= \frac{R}{mR^2 + 2I}\frac{\mu g(2I + mR^2)}{R} \\ &= \mu g \end{aligned}$$

Λύση 76.

Λόγω της ισορροπίας των δυνάμεων στην κατακόρυφη κατεύθυνση,

$$N_2 + N_1 = mg \qquad (i)$$

οπότε αφού

$$N_2 = 1,5N_1$$

από την (i) προκύπτει

$$1,5N_1 + N_1 = mg \;\Leftrightarrow\; 2,5N_1 = mg$$

Άρα,

$$N_1 = \frac{mg}{2,5} = 0,4mg$$

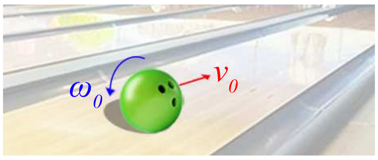
και

$$N_2 = mg - N_1 = mg - 0,4mg = 0,6mg$$

Οι τροχοί δεν ολισθαίνουν όσο ισχύει

$$T_1 \leq N_1 = mg - 0,4mg = 0,6mg$$

Λύση 94.



Σχήμα 9.270

Έστω άξονας x με φορά προς τα δεξιά και θετική φορά περιστροφής η φορά των δεικτών του ρολογιού, οπότε

$$\omega(0) = -|\omega_0|$$

και η τριβή έχει φορά προς τα αριστερά, οπότε

$$T = -\mu mg$$

Άρα,

$$a_\gamma = \frac{TR}{I} = \frac{-\mu mgR}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5\mu g}{2R}$$

και

$$a_{cm} = -\frac{\mu mg}{m} = -\mu g$$

οπότε

$$v_{cm}(t) = v_{cm0} - \mu gt$$

και

$$\omega(t) = -|\omega_0| + a_\gamma t$$

Έτσι, η σφαίρα αρχίζει να κυλίεται τη χρονική στιγμή t_1 την οποία ισχύει

$$\begin{aligned} v_{cm}(t_1) = \omega(t_1) \quad &\Leftrightarrow \quad v_{cm0} - \mu g t_1 = -|\omega_0| + a_\gamma t_1 \\ &\Leftrightarrow \quad v_{cm0} + |\omega_0| = (a_\gamma + \mu g)t_1 \\ &\Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{v_{cm0} + |\omega_0|}{a_\gamma + \mu g} \end{aligned}$$

Τότε η ταχύτητα της είναι

$$\begin{aligned} v_{cm}(t_1) &= v_{cm0} - \mu g t_1 \\ &= v_{cm0} - \mu g \frac{v_{cm0} + |\omega_0|}{a_\gamma + \mu g} \\ &= \frac{v_{cm0}a_\gamma - \mu g|\omega_0|}{a_\gamma + \mu g} \end{aligned}$$

Επομένως:

α) η μπάλλα ακινητοποιείται αν

$$v_{cm}(t_1) = 0$$

ή

$$\begin{aligned} |\omega_0| &= \frac{v_{cm0}a_\gamma}{\mu g} \\ &= \frac{v_{cm0}\frac{5\mu g}{2R}}{\mu g} \\ &= \frac{5v_{cm0}}{2R} \end{aligned}$$

β) κινείται προς τα δεξιά αν

$$v_{cm}(t_1) > 0$$

ή

$$\tfrac{v_{cm0}a_\gamma - \mu g|\omega_0|}{a_\gamma + \mu g} > 0$$

ή

$$v_{cm0}a_\gamma - \mu g|\omega_0| > 0$$

ή

$$|\omega_0| \leq \frac{5v_{cm0}}{2R}$$

γ) κινείται προς τα αριστερά (αφού αρχικά κινηθεί προς τα δεξιά) αν

$$v_{cm}(t_1) < 0$$

ή

$$|\omega_0| \geq \frac{5v_{cm0}}{2R}$$

Λύση 95.

α) Από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής περιστροφικής κίνησης

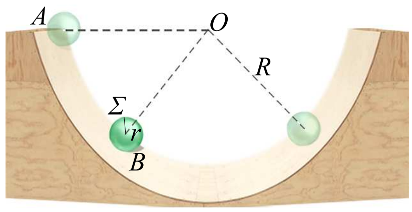
$$Tr = Ia_\gamma$$

και από τον θεμελιώδη νόμο της μεταφορικής κίνησης

$$\sum F_\epsilon = ma_{cm} \qquad (i)$$

ή

$$mg\cos\varphi - T = mra_\gamma \qquad (ii)$$



Σχήμα 9.271

Διαιρώντας κατά μέλη τις (i) και (ii) παίρνουμε

$$\frac{mg\cos\varphi - T}{Tr} = \frac{mr}{I}$$

ή

$$mg\cos\varphi - T = \frac{mr^2}{I}T$$

ή

$$\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)T = mg\cos\varphi$$

ή

$$T = \frac{mg\cos\varphi}{1 + \frac{mr^2}{I}}$$

οπότε αφού

$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

ή παραπάνω σχέση δίνει

$$T = \frac{mg\cos\varphi}{1 + \frac{mr^2}{\frac{2}{5}mr^2}} = \frac{2mg\cos\varphi}{7}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} a_{cm} &= ra_\gamma \\ &= r\frac{Tr}{I} = \frac{r^2}{I}T \\ &= \frac{r^2}{\frac{2}{5}mr^2}\frac{2mg\cos\varphi}{7} \\ &= \frac{5g\cos\varphi}{7} \end{aligned}$$

β) Στη διεύθυνση της ακτίνας ισχύει

$$\sum F_k = \frac{mv^2}{R-r}$$

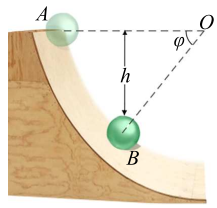
ή

$$N - mg\sin\varphi = \frac{mv^2}{R-r} \qquad (i)$$

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ της αρχικής θέσης ($\varphi = 0$) και της θέσης Β στην οποία η $O\Sigma$ σχηματίζει γωνία θ (με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας στο Β)

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

ή



Σχήμα 9.2716

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R-r}\right)^2 + 0 \qquad (ii)$$

Από το Σχήμα 9.2716 φαίνεται ότι

$$h = (R-r)\cos\varphi$$

Έτσι, η (ii) γίνεται

$$2g(R-r)\cos\varphi = v^2 + \frac{I}{m(R-r)^2}{}^{2}\, v^2$$

ή

$$v^2\left(1 + \frac{I}{m(R-r)^2}\right) = 2g(R-r)\cos\varphi$$

οπότε

$$v^2 = \frac{2g(R-r)\cos\varphi}{1 + \dfrac{I}{m(R-r)^2}}$$

ή

$$v^2 = \frac{2mg(R-r)^3\cos\varphi}{I + m(R-r)^2}$$

Έτσι, η κάθετη αντίδραση είναι

$$\begin{aligned}
N &= mg\sin\varphi + m\frac{v^2}{R-r} \\
&= mg\sin\varphi + \frac{m}{R-r}\,\frac{2mg(R-r)^3\cos\varphi}{I + m(R-r)^2} \\
&= mg\sin\varphi + \frac{2m^2g(R-r)^2\cos\varphi}{I + m(R-r)^2} \\
&= mg\left(\sin\varphi + \frac{2\cos\varphi}{1 + \dfrac{I}{m(R-r)^2}}\right)
\end{aligned}$$