

Κεφάλαιο 1

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Άσκηση 2.3

Θέτοντας $t = x^2 - y^2$,

$$g(x^2 - y^2) = g(t)$$

οπότε

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{dg}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{dg}{dt} 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{dg}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{dg}{dt} (-2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{g(t)} \right) = -\frac{y}{g^2} \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{y}{g^2} \frac{\partial g}{\partial t} 2x = -\frac{2xy}{g^2} \frac{dg}{dt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{g(t)} \right) = \frac{g - y \frac{\partial g}{\partial y}}{g^2} = \frac{1}{g} - \frac{y}{g^2} \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{g} - \frac{y}{g^2} \frac{dg}{dt} (-2y) = \frac{1}{g} + \frac{2y^2}{g^2} \frac{dg}{dt}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{x} \left(-\frac{2xy}{g^2} \frac{dg}{dt} \right) + \frac{1}{y} \left(\frac{1}{g} + \frac{2y^2}{g^2} \frac{dg}{dt} \right) \\ &= -\frac{2y}{g^2} \frac{dg}{dt} + \frac{1}{yg} + \frac{2y}{g^2} \frac{dg}{dt} \\ &= \frac{1}{yg} \\ &= \frac{f}{y^2} \end{aligned}$$

Άσκηση 2.4

Θέτοντας $t = \frac{y}{x}$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

οπότε

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{dg}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{dg}{dt} \left(-\frac{y}{x^2} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{dg}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{dg}{dt} \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} &= x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} \\ &= x \frac{\partial g}{\partial t} \left(-\frac{y}{x^2} \right) + y \frac{\partial g}{\partial t} \frac{1}{x} \\ &= -\frac{y}{x} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{y}{x} \frac{\partial g}{\partial t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 2.6

Από τη σχέση (2.28) για δύο μεταβλητές ισχύει

$$\vec{\nabla}^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (i)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{e^x}{e^x + e^y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^x}{e^x + e^y} \right) \\ &= \frac{e^x(e^x + e^y) - e^{2x}}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{x+y} - e^{2x}}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{e^y}{e^x + e^y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^y}{e^x + e^y} \right) = \frac{e^y(e^x + e^y) - e^{2y}}{(e^x + e^y)^2} = \frac{e^{x+y} + e^{2y} - e^{2y}}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \end{aligned}$$

οπότε η (i) δίνει

$$\vec{\nabla}^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} + \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} = \frac{2e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$$

Άσκηση 2.7

Λύση

α) Αντικαθιστώντας στο ανάπτυγμα Maclaurin της σχέσης (2.20) το x με $-x$, προκύπτει

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \frac{y^2}{a + \beta x} = \frac{y^2}{a} \frac{1}{1 + \frac{\beta x}{a}} \\
 &= \frac{y^2}{a} \left[1 - \frac{\beta x}{a} + \left(\frac{\beta x}{a} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{a} y^2 - \frac{\beta}{a^2} x y^2 + \frac{\beta^2}{a^3} x^2 y^2
 \end{aligned} \tag{i}$$

β) Από την (2.15) και την (i) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 f_x &= 0 & f_y &= 0 & f_{xx} &= 0 & f_{xy}(0, 0) &= 0 & f_{yy} &= \frac{2}{a} \\
 f_{xxx}(0, 0) &= 0 & f_{xxy}(0, 0) &= 0 & f_{xyy} &= \frac{-2\beta}{a^2} & f_{yyy} &= 0 & f_{xxxx}(0, 0) &= 0 & f_{xxxxy}(0, 0) &= 0 \\
 f_{xxyy}(0, 0) &= \frac{4\beta^2}{a^3} & f_{xyyy} &= 0 & f_{xyyy}(0, 0) &= 0 & f_{yyyy} &= 0 & f_{yyyy}(0, 0) &= 0
 \end{aligned}$$

Άσκηση 2.8

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$u = \frac{3x - 2y + z}{v} = \pm \frac{3x - 2y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \pm \frac{3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (3x - 2y + z) \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \pm \frac{3(x^2 + y^2 + z^2) - (3x^2 - 2xy + xz)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \pm \frac{3y^2 + 3z^2 + 2xy - xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \pm \frac{-2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (3x - 2y + z) \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \pm \frac{-2(x^2 + y^2 + z^2) - (3xy - 2y^2 + yz)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \pm \frac{-2x^2 - 2z^2 - 3xy - yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (3x - 2y + z) \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \pm \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - (3xz - 2yz + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \pm \frac{x^2 + y^2 - 3xz + 2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\pm x(3y^2 + 3z^2 + 2xy - xz) \pm y(-2x^2 - 2z^2 - 3xy - yz) \pm z(x^2 + y^2 - 3xz + 2yz)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \pm \frac{3xy^2 + 3xz^2 + 2x^2y - x^2z - 2x^2y - 2yz^2 - 3xy^2 - y^2z + x^2z + y^2z - 3xz^2 + 2yz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 2.9

$$z = [1 + (-x^2 - y^2)]^{\frac{1}{2}}$$

Θέτοντας $-x^2 - y^2$ στη θέση του x στο ανάπτυγμα Maclaurin (2.22) για $a = \frac{1}{2}$ και κρατώντας όρους μέχρι και δεύτερου βαθμού ως προς x και y προκύπτει

$$z = [1 + (-x^2 - y^2)]^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}(-x^2 - y^2) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

οπότε κοντά στο σημείο $P(0, 0, 1)$ η επιφάνεια αυτή προσεγγίζεται από τη β' βάθμια επιφάνεια

$$z = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Άσκηση 2.10

α)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$$

οπότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} = \frac{e^x + e^y}{e^x + e^y} = 1.$$

β)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^x}{e^x + e^y} \right) = \frac{e^x(e^x + e^y) - e^{2x}}{(e^x + e^y)^2} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^y}{e^x + e^y} \right) = \frac{e^y(e^x + e^y) - e^{2y}}{(e^x + e^y)^2} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^y}{e^x + e^y} \right) = -\frac{e^y e^x}{(e^x + e^y)^2} = -\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 &= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} - \left(-\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \right)^2 \\ &= \left[\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \right]^2 - \left[\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \right]^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 2.48

Το τετράγωνο της απόστασης ενός σημείου $P(x, y, z)$ από το σημείο A είναι

$$f(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y - (-1))^2 + z^2,$$

οπότε (επειδή το $P(x, y, z)$ είναι σημείο της επιφάνειας αυτής, οι συντεταγμένες τους x, y και z ικανοποιούν την (i)) ζητούμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y, z)$ με περιορισμό την (i).

Στο Παράδειγμα 2.71 δείχνουμε ότι η f έχει πάνω στην επιφάνεια (i) τοπικό μέγιστο στο σημείο

$$P_1\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

και τοπικό ελάχιστο στο

$$P_2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right).$$

Επειδή η επιφάνεια αυτή είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο η f έχει σε αυτή μέγιστο και ελάχιστο (βλ. Θεώρημα 2.18), τα σημεία της επιφάνειας που απέχουν τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A είναι αντίστοιχα τα P_1 και P_2 .

Άσκηση 2.50**Λύση**

Θεωρώντας τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}$$

ο αριθμός αυτός είναι

$$a = f(2500, 8000) + \Delta f. \quad (i)$$

όπου Δf η αντίστοιχη μεταβολή της f .

Επειδή τα

$$|\Delta x| = |2495 - 2500| = 5 \quad \text{και} \quad |\Delta y| = |8004 - 8000| = 4,$$

είναι μικρά (σε σχέση με τα $x_0 = 2500, y_0 = 8000$), η Δf προσεγγίζεται από την τιμή του διαφορικού της για $x_0 = 2500$ και $y_0 = 8000$ (βλ. (2.9))

$$\Delta f = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_P \Delta y. \quad (ii)$$

Επειδή

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}} = x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{3}}$$

οι μερικές της παράγωγοι είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{3} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

οπότε για το σημείο $P(2500, 8000)$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P = \frac{1}{2} 2500^{-\frac{1}{2}} 8000^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2000} \quad \text{και} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_P = -\frac{1}{3} 2500^{\frac{1}{2}} 8000^{-\frac{4}{3}} = -\frac{50}{3 \cdot 20^4}$$

Έτσι η (ii) δίνει

$$\Delta f = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_P \Delta y = \frac{1}{2000} (-5) - \frac{50}{3 \cdot 20^4} \cdot 4 = -0,0029$$

οπότε από την (i) προκύπτει ότι

$$f(2495, 8004) = f(2500, 8000) + \Delta f = \frac{50}{20} - 0,0029 = 2,497.$$

Άσκηση 2.52

Θεωρούμε τη συνάρτηση (βλ. Θεώρημα 2.9)

$$L(x, y, z, \lambda) = (x - 2)^2 + y^2 + z^2 + \lambda(e^x - e^y - x - y)$$

και λύνουμε το σύστημα

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 2(x - 2) + \lambda e^x - \lambda = 0 \quad (i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 2y - \lambda e^y - \lambda = 0 \quad (ii)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow 2z = 0 \quad (iii)$$

$$e^x - e^y = x + y \quad (iv)$$

Η (iv) δίνει

$$z = 0$$

Προσθέτοντας τις (i) και (ii) κατά μέλη προκύπτει

$$2(x - 2) + \lambda e^x - \lambda + 2y - \lambda e^y - \lambda = 0 \Leftrightarrow 2(x + y) + \lambda(e^x - e^y) - 2\lambda - 4 = 0$$

Η παραπάνω σχέση λόγω της (iv) γίνεται

$$\begin{aligned} 2(x + y) + \lambda(x + y) - 2(\lambda + 2) &= 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)(x + y) - 2(\lambda + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2) \quad \text{ή} \quad (x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow x + y = 2) \end{aligned}$$

οπότε οι λύσεις του συστήματος αυτού είναι:

Για $\lambda = -2$ η (i) δίνει

$$2x - 4 - 2e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow x - e^x - 1 = 0$$

που είναι αδύνατη, αφού $e^x > x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x + y = 2$ η λύση του συστήματος είναι (με χρήση της εντολής `vpasolve` του Matlab)

$$P(1.36, 0.64, 0) \text{ με } \lambda = 0,44$$

Η εσσιανή της L είναι

$$H(L) = \begin{bmatrix} 2 + \lambda e^x & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda e^y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Για το σημείο $P(1.36, 0.64, 0)$ με $\lambda = 0,44$

$$H(L(P)) = \begin{bmatrix} 3,71 & 0 & 0 \\ 0 & 1,17 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια $g(x, y, z) = e^x - e^y - x - y = 0$ είναι το

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial x_p} \hat{i} + \frac{\partial g}{\partial y_p} \hat{j} + \frac{\partial g}{\partial z_p} \hat{k}$$

ή

$$\vec{n} = (e^x - 1)\hat{i} - (e^y + 1)\hat{j},$$

Στο σημείο P ,

$$\vec{n} = 2,9\hat{i} - 2,9\hat{j},$$

οπότε θέτοντας

$$\vec{u}_1 = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}, \quad u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$$

προκύπτει

$$\vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2,9u_1 - 2,9u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2.$$

Άρα,

$$\vec{u} = u_1 \hat{i} + u_1 \hat{j} + u_3 \hat{k}, \quad u_1, u_3 \in \mathbb{R}$$

και

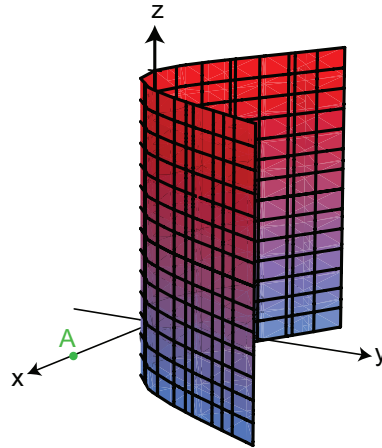
$$H(L(P))\vec{u} = \begin{bmatrix} 3,71 & 0 & 0 \\ 0 & 1,17 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,71u_1 \\ 1,17u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$\begin{aligned} (H(L(P))\vec{u}) \cdot \vec{u} &= (3,71u_1 \hat{i} + 1,17u_1 \hat{j} + 2u_3 \hat{k}) \cdot (u_1 \hat{i} + u_1 \hat{j} + u_3 \hat{k}) = 3,71u_1^2 + 1,17u_1^2 + 2u_3^2 \\ &= 4,88u_1^2 + 2u_3^2 > 0, \quad \forall u_1, u_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Άρα, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο P την τιμή

$$\sqrt{f(x, y, z)} = \sqrt{(1,36 - 2)^2 + 0,64^2 + 0^2} = 0,91.$$



Σχήμα 2.52

Άσκηση 2.53

Ζητούμε το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης (τετράγωνο της απόστασης του σημείου (x, y) από την αρχή των αξόνων)

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

με περιορισμό

$$2x^2 + 3y^2 + x - 2y - 1 = 0,$$

Έτσι, η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L = x^2 + y^2 + \lambda(2x^2 + 3y^2 + x - 2y - 1),$$

οπότε τα δεσμευμένα κρίσιμα σημεία προκύπτουν από το σύστημα

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 4\lambda x + \lambda = 0 \quad (i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 6\lambda y - 2\lambda = 0 \quad (ii)$$

$$2x^2 + 3y^2 + x - 2y - 1 = 0 \quad (iii)$$

Από την (i) προκύπτει

$$x = -\frac{\lambda}{2(1+2\lambda)}. \quad (iv)$$

οπότε η (ii) δίνει

$$y = \frac{\lambda}{1+3\lambda} \quad (v)$$

Αντικαθιστώντας τις (iv) και (v) στην (iii) προκύπτει

$$2\left(-\frac{\lambda}{2(1+2\lambda)}\right)^2 + 3\left(\frac{\lambda}{1+3\lambda}\right)^2 - \frac{\lambda}{2(1+2\lambda)} - 2\frac{\lambda}{1+3\lambda} = 1.$$

Οι πραγματικές λύσεις της β' βαθμίας που προκύπτει από αυτή τη ρητή εξίσωση είναι

$$\lambda_1 = -0,67 \text{ και } \lambda_2 = -0,16.$$

Έτσι, οι (iv) και (v) δίνουν:

► για $\lambda = -0,67$,

$$x = -1 \text{ και } y = 0,67,$$

► για $\lambda = -0,16$,

$$x = 0,11 \text{ και } y = -0,3.$$

Άρα, τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα

$$P_1(-1, 0.67) \text{ και } P_2(0.11, -0.3).$$

Το κάθετο διάνυσμα στο σημείο $P(x, y)$ του περιορισμού $g(x, y) = 0$ είναι το

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_P \hat{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_P \hat{j} = (4x+1)\hat{i} + (6y-2)\hat{j},$$

οπότε:

► Για το σημείο $P_1(-1, 0.67)$,

$$\vec{n} = -3\hat{i} + 2,02\hat{j},$$

οπότε αν τα κάθετα διανύσματα στο \vec{n} είναι

$$\vec{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j},$$

τότε

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -3u_1 + 2,02u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = -1,5u_1.$$

Άρα,

$$\vec{u} = u_1\hat{i} - 1,5u_1\hat{j}, \quad u_1 \in \mathbb{R}$$

και

$$H(L) = \begin{bmatrix} 2+4\lambda & 0 \\ 0 & 2+6\lambda \end{bmatrix}$$

οπότε

$$H(L(P_1))\vec{u} = \begin{bmatrix} 2+4(-0,67) & 0 \\ 0 & 2+6(-0,67) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ -1,5u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,68u_1 \\ 3,03u_1 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$H(L(P_1)) \cdot \vec{u} = (-0,68u_1\hat{i} + 3,03u_1\hat{j}) \cdot (u_1\hat{i} - 1,5u_1\hat{j}) = -5,23u_1^2 < 0, \quad \text{για κάθε } u_1 \in R,$$

οπότε το $P_1(-1, 0.67)$ είναι τοπικό μέγιστο.

► Για το σημείο $P_2(0.11, -0.3)$

$$\vec{n} = 1,44\hat{i} - 3,8\hat{j},$$

οπότε αν τα κάθετα διανύσματα στο \vec{n} είναι $\vec{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j}$, τότε

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1,44u_1 - 3,8u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = 0,38u_1.$$

Άρα,

$$\vec{u} = u_1\hat{i} + 0,38u_1\hat{j}$$

και

$$H(L(P_2))\vec{u} = \begin{bmatrix} 2+4(-0,16) & 0 \\ 0 & 2+6(-0,16) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 0,38u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,36u_1 \\ 0,4u_1 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$H(L(P_2)) \cdot \vec{u} = (1,36u_1\hat{i} + 0,4u_1\hat{j}) \cdot (u_1\hat{i} + 0,38u_1\hat{j}) = 1,51u_1^2 > 0, \quad \text{για κάθε } u_1 \in R,$$

οπότε το $P_2(0.11, -0.3)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

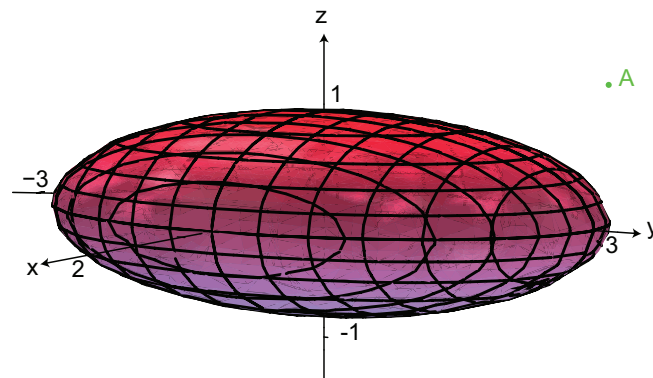
Επειδή η γραμμή

$$2x^2 + 3y^2 + x - 2y - 1 = 0$$

είναι κλειστή, αποτελεί κλειστό και φραγμένο σύνολο, οπότε η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτή, τις τιμές της στα τοπικά της ακρότατα $P_1(-1, 0.67)$ και $P_2(0.11, -0.3)$.

Επομένως, η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση της γραμμής αυτής από την αρχή των αξόνων είναι

$$d_{max} = \sqrt{f(P_1)} = \sqrt{(-1)^2 + 0,67^2} = 1,2 \quad \text{και} \quad d_{min} = \sqrt{f(P_2)} = \sqrt{0,11^2 + (-0,3)^2} = 0,32.$$

Άσκηση 2.54**Σχήμα 2.54**

Το τετράγωνο της απόστασης ενός σημείου $P(x, y, z)$ από το σημείο A είναι

$$f(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2$$

Θεωρούμε, λοιπόν, τη συνάρτηση

$$L(x, y, z, \lambda) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 - 1 \right)$$

και λύνουμε το σύστημα

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 2(x - 2) + \frac{\lambda x}{2} = 0 \quad (i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 2(y + 1) + \frac{2\lambda y}{9} = 0 \quad (ii)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow 2z + 2\lambda z = 0 \quad (iii)$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \quad (iv)$$

Από την (i) προκύπτει

$$2x - 4 + \frac{\lambda x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{\lambda + 4}, \quad (v)$$

Από την (ii) προκύπτει

$$2y + 2 + \frac{2\lambda y}{9} = 0 \Leftrightarrow 18y + 18 + 2\lambda y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{9}{\lambda + 9} \quad (vi)$$

Από την (iii) προκύπτει

$$2z(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = -1$$

Έτσι για $z = 0$ από τις (iv), (v), και (vi) προκύπτει

$$\frac{1}{4} \left(\frac{8}{\lambda + 4} \right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{-9}{\lambda + 9} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0, 23 \quad \text{ή} \quad \lambda = -12, 41$$

Για $\lambda = 0, 23$ από τις (v) και (vi) προκύπτει

$$x = 1,9 \quad \text{και} \quad y = -0,98$$

Άρα ένα κρίσιμο σημείο είναι το $P_1(1.9, -0.98, 0)$

Για $\lambda = -12, 41$ από τις (v) και (vi) προκύπτει

$$x = -0,95 \quad \text{και} \quad y = 2,64$$

Άρα ένα άλλο κρίσιμο σημείο είναι το $P_2(-0.95, 2.64, 0)$

Για $\lambda = -1$ από τις (vi) και (vii) προκύπτει

$$x = 2,67 \quad \text{και} \quad y = 1,13$$

και από την (v) για $x = 2,67$ και $y = 1,13$ προκύπτει

$$z = -0,646$$

που είναι αδύνατη εξίσωση.

Η εσσιανή της L είναι

$$H(L) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \frac{2\lambda}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 2 + 2\lambda \end{bmatrix}$$

Για το κρίσιμο σημείο $P_1(1.9, -0.98, 0)$, προκύπτει $\lambda = 0,23$, οπότε

$$H(L(P_1)) = \begin{bmatrix} 2,12 & 0 & 0 \\ 0 & 2,05 & 0 \\ 0 & 0 & 2,46 \end{bmatrix}$$

Έστω

$$\vec{u} = u_1 \hat{i} + u_2 \hat{j} + u_3 \hat{k}$$

ένα διάνυσμα κάθετο στο διάνυσμα

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_p \hat{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_p \hat{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_p \hat{k},$$

όπου

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 - 1.$$

Άρα

$$\vec{n} = \frac{x}{2} \hat{i} + \frac{2y}{9} \hat{j} + 2z \hat{k}$$

Στο κρίσιμο σημείο P_1

$$\vec{n}_1 = 0,95 \hat{i} - 0,22 \hat{j}$$

και

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 0,95u_1 - 0,22u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = 4,32u_1$$

οπότε

$$\vec{u} = u_1 \hat{i} + 4,32u_1 \hat{j} + u_3 \hat{k}, \quad u_1, u_3 \in R.$$

Έτσι,

$$H(L(P_1))\vec{u} = \begin{bmatrix} 2,12 & 0 & 0 \\ 0 & 2,05 & 0 \\ 0 & 0 & 2,46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 4,32u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,12u_1 \\ 8,86u_1 \\ 2,46u_3 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$\begin{aligned} (H(L(P_1))\vec{u}) \cdot \vec{u} &= (2,12u_1 \hat{i} + 8,86u_1 \hat{j} + 2,46u_3 \hat{k}) \cdot (u_1 \hat{i} + 4,32u_1 \hat{j} + u_3 \hat{k}) \\ &= (2,12u_1^2 + 38,28u_1^2 + 2,46u_3^2) = 40,4u_1^2 + 2,46u_3^2 > 0, \quad \forall u_1, u_3 \in R \end{aligned}$$

Άρα, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $P_1(1.9, -0.98, 0)$ την τιμή

$$\sqrt{f(x, y, z)} = \sqrt{(1,9 - 2)^2 + (-0,98 + 1)^2 + 0^2} = 0,1$$

Για το σημείο P_2

$$(-0.95, 2.64, 0) \quad \text{και} \quad \lambda = -12,41,$$

οπότε

$$H(L(P_2)) = \begin{bmatrix} -4,2 & 0 & 0 \\ 0 & -0,76 & 0 \\ 0 & 0 & -22,82 \end{bmatrix}$$

Επειδή στο κρίσιμο σημείο P_1

$$\vec{n}_2 = -0,48 \hat{i} + 0,59 \hat{j},$$

ισχύει

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -0,48u_1 + 0,59u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = 0,81u_1$$

οπότε

$$\vec{u} = u_1\hat{i} + 0,81u_1\hat{j} + u_3\hat{k}, \quad u_1, u_3 \in \mathbb{R}.$$

Άρα,

$$H(L(P_2))\vec{u} = \begin{bmatrix} -4,2 & 0 & 0 \\ 0 & -0,76 & 0 \\ 0 & 0 & -22,82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 0,81u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,2u_1 \\ -0,62u_1 \\ -22,82u_3 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$\begin{aligned} (H(L(P_2))\vec{u}) \cdot \vec{u} &= (-4,2u_1\hat{i} - 0,62u_1\hat{j} - 22,82u_3\hat{k}) \cdot (u_1\hat{i} + 0,81u_1\hat{j} + u_3\hat{k}) \\ &= (-4,2u_1^2 - 0,5u_1^2 - 22,82u_3^2) = -(4,7u_1^2 + 22,82u_3^2) < 0, \quad \forall u_1, u_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Άρα, η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $P_2(-0.95, 2.64, 0)$ την τιμή

$$\sqrt{f(x, y, z)} = \sqrt{(-0,95 - 2)^2 + (2,64 + 1)^2 + 0^2} = 4,69.$$

Επειδή η επιφάνεια

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$$

είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο, η f παίρνει την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της στα σημεία $P_1(1.9, -0.98, 0)$ και $P_2(-0.95, 2.64, 0)$, οπότε τα σημεία αυτά είναι τα σημεία της επιφάνειας αυτής που απέχουν την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή από το σημείο $A(2, -1, 0)$.

Άσκηση 2.55

Θεωρούμε τη συνάρτηση Lagrange

$$\begin{aligned} L &= f(x, y) + \lambda(x^2 + y^2 - 12xy) \\ &= (x-1)^2 + (y-1)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 12xy) \end{aligned}$$

και λύνουμε το σύστημα

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1) + 2\lambda x - 12\lambda y = 0 \quad (i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-1) + 2\lambda y - 12\lambda x = 0 \quad (ii)$$

$$x^2 + y^2 - 12xy = 0 \quad (iii)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (i) και (ii) προκύπτει

$$2(x-y) + 2\lambda(x-y) + 12\lambda(x-y) = 0$$

$$\text{ή} \quad (x-y)(2+2\lambda+12\lambda) = 0 \Leftrightarrow x=y \quad \text{ή} \quad \lambda = -\frac{1}{7}$$

Για $x=y$ η (iii) δίνει

$$x^2 + x^2 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow -10x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0,$$

οπότε από τις (i) και (ii) προκύπτει $-2=0$ που είναι αδύνατη εξίσωση.

Για $\lambda = -\frac{1}{7}$ οι (i) και (ii) γίνονται

$$2x - 2 - \frac{2}{7}x + \frac{12}{7}y = 0 \Leftrightarrow \frac{12}{7}x + \frac{12}{7}y = 2$$

$$2y - 2 - \frac{2}{7}y + \frac{12}{7}x = 0 \Leftrightarrow \frac{12}{7}x + \frac{12}{7}y = 2$$

οπότε

$$y = \frac{7}{6} - x.$$

Αντικαθιστώντας στην (iii) προκύπτει

$$x^2 + \left(\frac{7}{6} - x\right)^2 - 12x\left(\frac{7}{6} - x\right) = 0 \Leftrightarrow 14x^2 - \frac{49}{3}x + \frac{49}{36} = 0 \Leftrightarrow x = 1,08 \quad \text{ή} \quad x = 0,09.$$

Για $x = 1,08$,

$$y = \frac{7}{6} - 1,08 = 0,09$$

και για $x = 0,09$,

$$y = \frac{7}{6} - 0,09 = 1,08$$

οπότε τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα

$$P_1(1,08, 0,09) \quad \text{και} \quad P_2(0,09, 1,08).$$

Η εσσιανή της L είναι

$$H(L) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2\lambda & -12\lambda \\ -12\lambda & 2+2\lambda \end{bmatrix}$$

Έστω $\vec{u} = u_1 \hat{i} + u_2 \hat{j}$ ένα διάνυσμα κάθετο στο διάνυσμα

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_p \hat{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_p \hat{j}$$

όπου

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 12xy$$

οπότε

$$\vec{n} = (2x - 12y)\hat{i} + (2y - 12x)\hat{j}$$

Για το σημείο $P_1(1.08, 0.09)$

$$\vec{n} = 1,08\hat{i} - 12,78\hat{j}$$

οπότε

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1,08u_1 - 12,78u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = 0,08u_1, \quad u_1 \in R$$

Άρα,

$$\vec{u} = u_1\hat{i} + 0,08u_1\hat{j} \quad u_1 \in R$$

Επομένως

$$H(L(P_1))\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 + 2(-\frac{1}{7}) & -12(-\frac{1}{7}) \\ -12(-\frac{1}{7}) & 2 + 2(-\frac{1}{7}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 0,08u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,85u_1 \\ 1,85u_1 \end{bmatrix}$$

και

$$(H(L(P_1))\vec{u}) \cdot \vec{u} = (1,85u_1\hat{i} + 1,85u_1\hat{j}) \cdot (u_1\hat{i} + 0,08u_1\hat{j}) = 2u_1^2 > 0, \quad \forall u_1 \in R$$

Άρα, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $P_1(1,08, 0,09)$ το

$$f(P_1) = (1,08 - 1)^2 + (0,09 - 1)^2 = 0,83$$

Για το σημείο $P_2(0,09, 1,08)$, προκύπτει

$$\vec{n} = -12,78\hat{i} + 1,08\hat{j}$$

οπότε

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -12,78u_1 + 1,08u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = 11,83u_1$$

Άρα,

$$\vec{u} = u_1\hat{i} + 11,83u_1\hat{j}.$$

Επομένως,

$$H(L(P_2))\vec{u} = \begin{bmatrix} 1,71 & 1,71 \\ 1,71 & 1,71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 11,83u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21,93u_1 \\ 21,93u_1 \end{bmatrix}$$

και

$$(H(L(P_2))\vec{u}) \cdot \vec{u} = (21,93u_1\hat{i} + 21,93u_1\hat{j}) \cdot (u_1\hat{i} + 11,83u_1\hat{j}) = 281,36u_1^2 > 0, \quad \forall u_1 \in R$$

Άρα, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο P_2 το

$$f(P_2) = (0,09 - 1)^2 + (1,08 - 1)^2 = 0,83.$$

Άσκηση 2.57

Η συνάρτηση Lagrange στην περίπτωση αυτή είναι

$$L = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + \lambda(x_1 - x_2^2 + x_3 - x_4^2 - 1)$$

οπότε τα κρίσιμα σημεία (πιθανά τοπικά ακρότατα) της $f(x, y, z)$ με τον περιορισμό αυτό προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + \lambda = 0 \quad (i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow -2x_2 - 2\lambda x_2 = 0 \quad (ii)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \Leftrightarrow 2x_3 + \lambda = 0 \quad (iii)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_4} = 0 \Leftrightarrow -4x_4 - 2\lambda x_4 = 0 \quad (iv)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2^2 + x_3 - x_4^2 = 1 \quad (v)$$

Από την (ii) προκύπτει

$$-2x_2(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } x_2 = 0$$

• Για $\lambda = -1$ από τις (i) και (iii) παίρνουμε

$$x_1 = x_3 = -\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}$$

και από την (iv)

$$-2x_4 = 0 \Leftrightarrow x_4 = 0$$

οπότε από την (v) προκύπτει

$$\frac{1}{2} - x_2^2 + \frac{1}{2} - 0^2 = 1 \Leftrightarrow x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

Έτσι, προκύπτει το κρίσιμο σημείο $P_1(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$

• Για $x_2 = 0$ από την (iv) παίρνουμε

$$-2x_4(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ ή } x_4 = 0.$$

► Για $\lambda = -2$ από τις (i) και (iii) παίρνουμε

$$x_1 = x_3 = -\frac{-2}{2} = 1$$

και από την (ii)

$$2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0,$$

οπότε από την (v) προκύπτει

$$1 - 0^2 + 1 - x_4^2 = 1 \Leftrightarrow x_4^2 = 1 \Leftrightarrow x_4 = 1 \text{ ή } x_4 = -1$$

Έτσι, προκύπτουν τα σημεία $P_2(1, 0, 1, 1)$ και $P_3(1, 0, 1, -1)$

► Για $x_4 = 0$ από τις (i) και (iii) παίρνουμε

$$x_1 = x_3 = -\frac{\lambda}{2}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (v) ($x_2 = 0$)

$$-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

δηλαδή προκύπτει ξανά το σημείο P_1 .

Η δεσμευμένη ερσιανή είναι ο 5×5 πίνακας

$$H(L) = \begin{bmatrix} 0 & L_{\lambda x_1} & L_{\lambda x_2} & L_{\lambda x_3} & L_{\lambda x_4} \\ L_{x_1 \lambda} & L_{x_1 x_1} & L_{x_1 x_2} & L_{x_1 x_3} & L_{x_1 x_4} \\ L_{x_2 \lambda} & L_{x_2 x_1} & L_{x_2 x_2} & L_{x_2 x_3} & L_{x_2 x_4} \\ L_{x_3 \lambda} & L_{x_3 x_1} & L_{x_3 x_2} & L_{x_3 x_3} & L_{x_3 x_4} \\ L_{x_4 \lambda} & L_{x_4 x_1} & L_{x_4 x_2} & L_{x_4 x_3} & L_{x_4 x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2x_2 & 1 & -2x_4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2x_2 & 0 & -2-2\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2x_4 & 0 & 0 & 0 & -a-2\lambda \end{bmatrix}$$

Για το σημείο $P_1(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ έχουμε $\lambda = -1$ οπότε

$$H(L(P_1)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει $D_5 = \det(H) = 0$ οπότε δε μπορούμε να αποφανθούμε με αυτή τη μέθοδο για το αν το σημείο P_1 είναι τοπικό ακρότατο της f υπό τον δεδομένο περιορισμό.

► Για το σημείο $P_2(1, 0, 1, 1)$ έχουμε $\lambda = -2$, οπότε

$$H(L(P_2)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 < 0, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

$$D_5 = \det(H) = -32 < 0$$

οπότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $P_2(1, 0, 1, 1)$

► Για το σημείο $P_3(1, 0, 1, -1)$ έχουμε $\lambda = -2$, οπότε

$$H(L(P_3)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = -2 < 0, \quad D_4 = -8 < 0, \quad D_5 = -32 < 0,$$

Άρα, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $P_3(1, 0, 1, -1)$.

Άσκηση 2.58

α) Παραγωγίζοντας την (i) ως προς z προκύπτει

$$\frac{\partial F}{\partial z} = e^z - 2z, \text{ όπου } F(x, y, z) = ye^x + e^z - z^2 = 0$$

οπότε

$$\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_A = e^0 - 2 \cdot 0 = 1 \neq 0$$

΄ρα, η (i) ορίζει το z ως συνάρτηση των x και y κοντά στο A .

β) Η γραμμική προσέγγιση της $z(x, y)$ κοντά στο A είναι (ανάπτυγμα Taylor α' βαθμού)

$$z(x, y) = z(1, -\frac{1}{e}) + \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_A (x - 1) + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_A (y + \frac{1}{e}) \quad (ii)$$

Παραγωγίζοντας την (i) ως προς x θεωρώντας ότι $z = z(x, y)$ προκύπτει

$$ye^x + e^z \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^x}{2z - e^z}$$

οπότε

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_A = \frac{-\frac{1}{e} \cdot e^1}{2 \cdot 0 - e^0} = 1$$

Παραγωγίζοντας την (i) ως προς y , θεωρώντας ότι $z = z(x, y)$, προκύπτει

$$e^x + e^z \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^x}{2z - e^z}$$

οπότε

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_A = \frac{e^1}{2 \cdot 0 - e^0} = -e$$

Έτσι, η (ii) γίνεται

$$z(x, y) = x - 1 - ey - 1 = x - ey - 2.$$

Άσκηση 2.59

Επειδή

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 9) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial x}(y - 1) = 0$$

ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 9) = \frac{\partial}{\partial x}(y - 1)$$

οπότε υπάρχει συνάρτηση $f(x, y)$ με αυτή τη κλίση, δηλαδή με

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 9 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y - 1$$

Έτσι, σύμφωνα με την (2.12),

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^x (t^2 - 9) dt + \int_0^y (t - 1) dt + c \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - 9t \right]_0^x + \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_0^y + c \\ &= \frac{x^3}{3} - 9x + \frac{y^2}{2} - y + c \end{aligned}$$

Επειδή $f(0, 1) = 1$,

$$\frac{0^3}{3} - 9 \cdot 0 + \frac{1^2}{2} - \frac{1}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

ήρα

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - 9x + \frac{y^2}{2} - y.$$

Τα κρίσιμα σημεία της $f(x, y)$ είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 9 = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y - 1 = 0$$

δηλαδή τα σημεία

$$P_1(-3, 1) \quad \text{και} \quad P_2(3, 1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 9) = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y - 1) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (y - 1) = 0$$

οπότε

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = 2x$$

Έτσι:

Για το σημείο $P_1(-3, 1)$

$$\Delta = 2 \cdot (-3) = -6 < 0,$$

οπότε το P_1 είναι σαγματικό σημείο της f .

Για το σημείο $P_2(3, 1)$

$$\Delta = 2 \cdot 3 = 6 > 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 > 0,$$

οπότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο P_2 το

$$f(3, 1) = \frac{1^3}{3} - 9 \cdot 1 + \frac{1^2}{2} - 1 = -18, 5.$$

Άσκηση 2.60

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -f^2 \frac{\partial w}{\partial y}$$

Έτσι η δοθείσα σχέση δίνει

$$\begin{aligned} x^2 f^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + y^2 (-f^2) \frac{\partial w}{\partial y} &\Leftrightarrow 1 - x^2 \frac{\partial w}{\partial x} - y^2 \frac{\partial w}{\partial y} = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 \frac{\partial w}{\partial x} + y^2 \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (i)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} \end{aligned}$$

Έτσι η (i) γίνεται

$$x^2 \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right) + y^2 \left(-\frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right) = 0 \Leftrightarrow x^2 \frac{\partial w}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial w}{\partial u} = 0$$

Ήρα $w = g(v)$, g συνάρτηση

$$\text{ή} \quad \frac{1}{f} - \frac{1}{x} = g \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{x} + g \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} \left(1 + xg \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right)$$

οπότε

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + xg \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)}$$