

Κεφάλαιο 3

Διανυσματικές συναρτήσεις

Άσκηση 3.3

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.3, τα επίπεδα αυτά είναι κάθετα αντίστοιχα στα διανύσματα

$$\vec{n}_1 = (1, -2, 1) \text{ και } \vec{n}_2 = (0, 1, -1)$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2, ένα διάνυσμα κάθετο και στα δύο επίπεδα, δηλαδή κάθετο στα διανύσματα \vec{n}_1 και \vec{n}_2 είναι το

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \\&= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\&= \hat{e}_1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \hat{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \hat{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\&= \hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \\&= (1, 1, 1)\end{aligned}$$

οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 1.3, η εξίσωση του επιπέδου π είναι (διέρχεται από την αρχή των αξόνων)

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{0} \Leftrightarrow (1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = (1, 1, 1) \cdot (0, 0, 0)$$

ή
$$x + y + z = 0.$$

Άσκηση 3.7

α) Οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες με τα διανύσματα (βλ. πρότ. 3.1)

$$\vec{v}_1 = (-3, 2, 1) \text{ και } \vec{v}_2 = (6, -4, -2).$$

Επειδή

$$\frac{-3}{6} = \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2},$$

τα διανύσματα \vec{v}_1 και \vec{v}_2 είναι παράλληλα, οπότε οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες.

β) Ένα σημείο της ϵ_1 είναι το $A_1(1, 0, 1)$ (προκύπτει από την εξίσωση της ϵ_1 για $t = 0$) και ένα σημείο της ϵ_2 είναι το $A_2(0, 1, 2)$ (προκύπτει από την εξίσωση της ϵ_2 για $u = 0$)

Τα διανύσματα \vec{v}_1 και $\overrightarrow{A_1A_2}$ είναι παράλληλα με το π , οπότε ένα διάνυσμα κάθετο στο π είναι το

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \overrightarrow{A_1A_2} \times \vec{v}_1 \\ &= [(0, 1, 2) - (1, 0, 1)] \times (-3, 2, 1) \\ &= (-1, 1, 1) \times (-3, 2, 1) \\ &= (-1, -2, 1). \end{aligned}$$

Επομένως, το επίπεδο π , που διέρχεται και από το σημείο A_1 με διάνυσμα θέσης \vec{a}_1 , έχει εξίσωση

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{a}_1) = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{a}_1$$

ή, αν $\vec{r} = (x, y, z)$ το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου του π ,

$$(-1, -2, 1) \cdot (x, y, z) = (-1, -2, 1) \cdot (1, 0, 1).$$

Επομένως, η καρτεσιανή εξίσωση του π είναι

$$-x - 2y + z = 0.$$

Άσκηση 3.20

α) Η (i) γράφεται

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2 \cdot \frac{1}{2}z = 2 \quad (i)$$

οπότε, προσθέτοντας και στα 2 μέλη το $1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ προκύπτει

$$x^2 + 2x + 1^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

ή
$$(x+1)^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}.$$

Η σχέση αυτή είναι καρτεσιανή εξίσωση σφαίρας με κέντρο το σημείο

$$K\left(-1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

και ακτίνα

$$R = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Άσκηση 3.23

Κάθε επίπεδο που περιέχει την τομή των επιπέδων π_1, π_2 έχει εξίσωση

$$x + y = 0 \quad \text{ή} \quad x - y + z - 1 + \lambda(x + y) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (i)$$

Το ζητούμενο επίπεδο δεν είναι το $x + y = 0$, διότι οι συντεταγμένες του σημείου $A(1, 0, -1)$ δεν επαληθεύουν την εξίσωση αυτή.

Αν το A ανήκει στο επίπεδο που περιγράφεται από τη δεύτερη των (i) , πρέπει οι συντεταγμένες του να την επαληθεύουν, δηλαδή

$$1 - 0 + (-1) - 1 + \lambda(1 + 0) = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 1.$$

Έρα, το ζητούμενο επίπεδο έχει εξίσωση (θέτουμε $\lambda = 1$ στην (i))

$$x - y + z - 1 + (x + y) = 0$$

ή

$$2x + z - 1 = 0.$$

Άσκηση 3.25

α) Οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες με τα διανύσματα (βλ. πρότ. 3.1)

$$\vec{v}_1 = (1, -1, -2) \text{ και } \vec{v}_2 = (2, -2, -4).$$

Επειδή

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{-2}{-4},$$

τα διανύσματα \vec{v}_1 και \vec{v}_2 είναι παράλληλα, οπότε οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες.

β) Ένα σημείο της ϵ_1 είναι το $A_1(5, 1, 5)$ (προκύπτει από την εξίσωση της ϵ_1 για $\lambda = 0$) και ένα σημείο της ϵ_2 είναι το $A_2(1, -4, 10)$ (προκύπτει από την εξίσωση της ϵ_2 για $\mu = 0$)

Τα διανύσματα \vec{v}_1 και $\overrightarrow{A_1A_2}$ είναι παράλληλα με το π_1 , οπότε ένα διάνυσμα κάθετο στο π_1 είναι το

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \overrightarrow{A_1A_2} \times \vec{v}_1 \\ &= [(1, -4, 10) - (5, 1, 5)] \times (1, -1, -2) \\ &= (-4, -5, 5) \times (1, -1, -2) \\ &= (15, -3, 9). \end{aligned}$$

Επομένως, το επίπεδο π_2 , που περιέχει την αρχή των αξόνων, έχει εξίσωση

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$$

ή, αν $\vec{r} = (x, y, z)$ το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου του π_2 ,

$$(15, -3, 9) \cdot (x, y, z) = 0.$$

Επομένως, η καρτεσιανή εξίσωση του π είναι

$$15x - 3y + 9z = 0.$$

Άσκηση 3.26

Θέτοντας $z = t$, οι (i) γράφονται

$$x - 2y = -t, \quad 2x = t - 5,$$

από τις οποίες προκύπτει

$$x = \frac{t-5}{2}, \quad y = \frac{3t-5}{4}.$$

Επομένως η διανυσματική εξίσωση της ευθείας l είναι

$$l: \vec{r}(t) = \left(\frac{t-5}{2}, \frac{3t-5}{4}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (ii)$$

Η διανυσματική εξίσωση της δ είναι (βλ. πρότ. 3.1)

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{a} + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (iii)$$

όπου $\vec{a} = (1, 0, -1)$ το διάνυσμα θέσης του Α, ως προς την αρχή των αξόνων Ο, και \vec{u} ένα διάνυσμα παράλληλο με την δ , άρα και με την l (αφού $l \parallel \delta$).

Γράφοντας την (ii) στη μορφή

$$l: x(t) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, 0 \right) + t \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

είναι φανερό ότι ένα διάνυσμα παράλληλο στην l είναι το

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right).$$

Αντικαθιστώντας στην (iii) προκύπτει η διανυσματική εξίσωση της δ

$$\delta: \vec{r}(\lambda) = (1, 0, -1) + \lambda \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right) = \left(1 + \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{4}, -1 + \lambda \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 3.29

Το διάνυσμα θέσης του ίχνους B της καθέτου που άγεται από την αρχή των αξόνων O προς την ευθεία ϵ είναι $(\vec{p} = 0)$

$$\vec{\beta} = \vec{a} + \frac{-\vec{a} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u}, \quad (ii)$$

όπου \vec{a} το διάνυσμα θέσης ως προς το O ενός σημείου της ϵ και \vec{u} ένα διάνυσμα παράλληλο στην ϵ .
Θέτοντας $x = 0$ στις εξισώσεις της ϵ προκύπτει

$$\epsilon : y + z + 1 = 0 \quad \text{και} \quad -y + z + 3 = 0.$$

Από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει

$$y = 1 \quad \text{και} \quad z = -2,$$

οπότε ένα σημείο της είναι το A , που έχει διάνυσμα θέσης, ως προς το O ,

$$\vec{a} = (0, 1, -2).$$

Ένα διάνυσμα παράλληλο με την ϵ είναι το

$$\vec{u} = (2, 1, 1) \times (1, -1, 1) = (2, -1, -3).$$

Έτσι, από την (i) προκύπτει

$$\begin{aligned} \vec{\beta} &= (0, 1, -2) + \frac{-(0, 1, -2) \cdot (2, -1, -3)}{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} (2, -1, -3) \\ &= (0, 1, -2) - \frac{5}{14} (2, -1, -3) \\ &= \left(-\frac{5}{7}, \frac{19}{14}, -\frac{13}{14} \right) \end{aligned}$$

οπότε η απόσταση της ευθείας ϵ από την αρχή των αξόνων είναι

$$\begin{aligned} d &= (OB) = |\vec{\beta}| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{5}{7}\right)^2 + \left(\frac{19}{14}\right)^2 + \left(-\frac{13}{14}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{630}}{14} = 1,79. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.31

α) Η ταχύτητα του Σ τη χρονική στιγμή t είναι

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \\ &= (2t - 2)\hat{e}_x + (-1)\hat{e}_y + (-2t + 2)\hat{e}_z\end{aligned}$$

και η επιτάχυνση του

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 2\hat{e}_x - 2\hat{e}_z,$$

οπότε η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του Σ τη χρονική στιγμή $t = 1$ είναι

$$\begin{aligned}\vec{v}(1) &= (2 \cdot 1 - 2)\hat{e}_x + (-1)\hat{e}_y + (-2 \cdot 1 + 2)\hat{e}_z \\ &= -\hat{e}_y \\ \vec{a}(1) &= 2\hat{e}_x - 2\hat{e}_z\end{aligned}$$

β) Τη χρονική στιγμή $t = 1$ το Σ βρίσκεται στο σημείο με διάνυσμα θέσης

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{r}(1) \\ &= (1^2 - 2 \cdot 1)\hat{e}_x + (4 - 1)\hat{e}_y + (10 - 1^2 + 2 \cdot 1)\hat{e}_z \\ &= -\hat{e}_x + 3\hat{e}_y + 11\hat{e}_z\end{aligned}$$

δηλαδή στο σημείο

$$P(-1, 3, 11)$$

οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη έχει διανυσματική εξίσωση (είναι παράλληλη στο διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{v}(1)$)

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{p} + \lambda\vec{v}(1)$$

ή

$$\vec{r}(\lambda) = (-1, 3, 11) + \lambda(0, -1, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 3.33

Αντικαθιστώντας τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας ϵ στην καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου π προκύπτει

$$\pi : 2(-3t) - 4 + 2t - (5 + 3t) + 2 = 0 \Leftrightarrow -7t - 7 = 0 \Leftrightarrow t = -1,$$

οπότε

$$P(-3(-1), -4 + 2(-1), 5 + 3(-1)) = (3, -6, 2).$$

Επειδή η ευθεία (l) είναι κάθετη στα διανύσματα $\vec{a} = (1, 1, 1)$ και $\vec{\beta} = (2, 3, 4)$, ένα διάνυσμα παράλληλο με αυτή είναι το

$$\vec{u} = \vec{a} \times \vec{\beta} = (1, 1, 1) \times (2, 3, 4) = (1, -2, 1),$$

οπότε η εξίσωση της (ϵ) είναι

$$\vec{r}(t) = \vec{p} + t\vec{u}$$

ή

$$\vec{r}(t) = (3, -6, 2) + t(1, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 3.35

α) Από το σύστημα των εξισώσεων των π_1, π_2 προκύπτει ότι

$$x = 5 + 4z \text{ και } y = -2 - 4z,$$

οπότε τα π_1, π_2 τέμνονται κατά την ευθεία (l) με διανυσματική εξίσωση (θέτουμε $z = k$)

$$\vec{r}(t) = (5 + 4k, -2 - 4k, k), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (i)$$

β) Το π , που είναι κάθετο στα π_1, π_2 , είναι κάθετο στην ευθεία (l) , άρα και στο διάνυσμα

$$\vec{u} = (4, -4, 1),$$

στο οποίο είναι παράλληλη η (l) , λόγω της (i) .

Άρα το π , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει εξίσωση (βλ. πρότ. 1.3)

$$\vec{u} \cdot \vec{r} = 0$$

$$\text{ή} \quad (4, -4, 1) \cdot (x, y, z) = 0$$

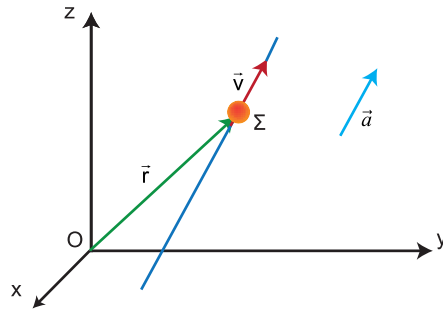
$$\text{ή} \quad 4x - 4y + z = 0$$

Η ευθεία (ϵ) είναι παράλληλη στα επίπεδα π_1, π_2 , άρα και στην ευθεία (l) , οπότε ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ϵ) είναι το

$$\vec{u} = (4, -4, 1).$$

Η διανυσματική εξίσωση της (ϵ) είναι (βλ. Πρόταση 3.1)

$$\vec{r}(t) = (-3, 0, 1) + k(4, -4, 1) = (-3 + 4k, -4k, 1 + k), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 3.36

Σχήμα 3.36

α) Η εξίσωση της ευθείας (ε) γράφεται

$$\vec{r}(t) = (-1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 2),$$

οπότε η (ε) είναι παράλληλη με το διάνυσμα

$$\vec{e} = (-2, 1, 2).$$

Επομένως, το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της ταχύτητας του Σ είναι το

$$\hat{e} = \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|} = \frac{(-2, 1, 2)}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

οπότε το διάνυσμα της ταχύτητας του Σ είναι

$$\vec{v} = v\hat{e} = 3\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = (-2, 1, 2).$$

Έτσι, η στροφορμή του ως προς την αρχή των αξόνων είναι

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m\vec{r} \times \vec{v} \\ &= 2(-1, 1, 1) \times (-2, 1, 2) \\ &= 2 \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2[\hat{e}_x(1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) - \hat{e}_y(-1 \cdot 2 - 1(-2)) + \hat{e}_z(-1 \cdot 1 - 1(-2))] \\ &= 2(\hat{e}_x + \hat{e}_z) \left(\frac{Kgr \cdot m^2}{s}\right) \end{aligned}$$

β) Η στροφορμή του Σ ως προς το σημείο $K(2, 0, -1)$ είναι

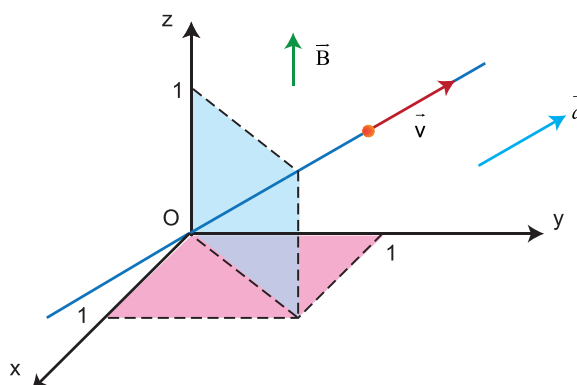
$$\vec{L} = m\vec{r}' \times \vec{v}$$

όπου \vec{r}' το διάνυσμα θέσης του Σ ως προς το Κ, το οποίο είναι

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \overrightarrow{KA} \\ &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OK} \\ &= (-1, 1, 1) - (2, 0, -1) \\ &= (-3, 1, 2) \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\vec{L} &= 2(-3, 1, 2) \times (-2, 1, 2) \\&= 2 \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\&= 2 [\hat{e}_x(1 \cdot 2 - 2 \cdot 1) - \hat{e}_y(-3 \cdot 2 - 2(-2)) + \hat{e}_z(-3 \cdot 1 - 1(-2))] \\&= 2(2\hat{e}_y - \hat{e}_z) \left(\frac{Kgr \cdot m^2}{s} \right)\end{aligned}$$

Άσκηση 3.39

Σχήμα 3.39

Η διανυσματική εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι

$$\vec{r}(\lambda) = (\lambda, \lambda, \lambda) = \lambda(1, 1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

οπότε η (ϵ) είναι παράλληλη με το διάνυσμα

$$\vec{e} = (1, 1, 1).$$

Επομένως, το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της ταχύτητας είναι το

$$\hat{e} = \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),$$

οπότε το διάνυσμα της ταχύτητάς του είναι

$$\vec{v} = v\hat{e} = 9 \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = 3\sqrt{3}(1, 1, 1).$$

Η μαγνητική δύναμη \vec{F} που δέχεται το φορτίο είναι

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ &= 2 \cdot 10^{-6} \cdot 3\sqrt{3}(1, 1, 1) \times 2 \cdot 10^{-4}(0, 0, 1) \\ &= 12\sqrt{3} \cdot 10^{-10}(1, 1, 1) \times (0, 0, 1) \\ &= 12\sqrt{3} \cdot 10^{-10} \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 12\sqrt{3} \cdot 10^{-10} (\hat{e}_x(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) - \hat{e}_y(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) + \hat{e}_z(1 \cdot 0 - 0 \cdot 1)) \\ &= 12\sqrt{3} \cdot 10^{-10} (\hat{e}_x - \hat{e}_y) \text{ (N)} \end{aligned}$$

Άσκηση 3.41**Λύση**

Το εφαπτόμενο επίπεδο π στην S στο σημείο της A έχει εξίσωση

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{p}) = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{p}, \quad (i)$$

όπου $\vec{p} = (1, 0, 1)$ το διάνυσμα θέσης του P και

$$\vec{n} = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_p \quad (ii)$$

ένα διάνυσμα κάθετο στην S στο P , όπου

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$$

η καρτεσιανή εξίσωση της S .

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_p = 2x|_{x=1} = 2, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_p = 2y|_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_p = -1,$$

όποτε η (ii) δίνει $\vec{n} = (2, 0, -1)$.

Έτσι, αν $\vec{r} = (x, y, z)$ οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου του π , η (i) γίνεται

$$(2, 0, -1) \cdot (x, y, z) = (2, 0, -1) \cdot (1, 0, 1)$$

ή

$$2x - z = 1.$$

Άσκηση 3.43

Το διάνυσμα θέσης κάθε σημείου της ευθείας AB που διέρχεται από τα σημεία A, B με διανύσματα θέσης $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι της μορφής

$$\vec{r} = k\vec{a} + (1 - k)\vec{\beta}, \quad k \in \mathbb{R} \quad (i)$$

και της ΓΔ, η οποία διέρχεται από τα Γ, Δ με διανύσματα θέσης $5\vec{a}, 3\vec{\beta}$

$$\vec{r} = m5\vec{a} + (1 - m)3\vec{\beta}, \quad m \in \mathbb{R} \quad (ii)$$

Το διάνυσμα θέσης του σημείου τομής των AB, ΓΔ πληρεί τόσο την (i) όσο και την (ii), οπότε αντιστοιχεί στις τιμές k, m για τις οποίες

$$k\vec{a} + (1 - k)\vec{\beta} = 5m\vec{a} + (1 - m)3\vec{\beta}$$

$$\text{ή} \quad (k - 5m)\vec{a} + (-k + 3m - 2)\vec{\beta} = \vec{0} \quad (iii)$$

Τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι μη παράλληλα διανύσματα του επιπέδου, οπότε από την (iii) προκύπτει ότι

$$\begin{array}{rcl} k - 5m & = & 0 \\ -k + 3m - 2 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} k & = & -5 \\ m & = & -1 \end{array}$$

Άρα, το διάνυσμα θέσης, \vec{p} , του σημείου τομής των AB, ΓΔ προκύπτει είτε από την (i) για $k = -5$ (ή από την (ii) για $m = -1$)

$$\vec{p} = -5\vec{a} + 6\vec{\beta}.$$

Άσκηση 3.44

α) Θέτοντας $z = t$ στις καρτεσιανές εξισώσεις της ϵ_1 προκύπτει

$$\begin{aligned}x &= 2 + t \\y &= -1 - 3t,\end{aligned}$$

οπότε η ϵ_1 έχει διανυσματική εξίσωση

$$\epsilon_1 : \vec{r}(t) = (2 + t, -1 - 3t, t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (i)$$

Θέτοντας $z = \lambda$ στις εξισώσεις της ϵ_2 και λύνοντας ως προς x, y προκύπτει

$$\begin{aligned}x &= -\frac{\lambda}{3} + \frac{2}{3} \\y &= -\frac{\lambda}{3} + \frac{5}{3},\end{aligned}$$

οπότε η ϵ_2 έχει διανυσματική εξίσωση

$$\epsilon_2 : \vec{r}(\lambda) = \left(\frac{2}{3} - \frac{\lambda}{3}, \frac{5}{3} - \frac{\lambda}{3}, \lambda \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (ii)$$

Για να τέμνονται οι ϵ_1, ϵ_2 πρέπει να υπάρχουν τιμές των t, λ ώστε

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}(\lambda). \\2 + t &= \frac{2}{3} - \frac{\lambda}{3} \\-1 - 3t &= \frac{5}{3} - \frac{\lambda}{3} \\t &= \lambda\end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό αληθεύει για $t = \lambda = -1$, οπότε οι ϵ_1, ϵ_2 τέμνονται στο σημείο (θέτουμε $t = -1$ στην (i) ή $\lambda = -1$ στην (ii))

$$P(1, 2, -1).$$

β) Οι (i), (ii) γράφονται,

$$\begin{aligned}\epsilon_1 : \vec{r}(t) &= (2, -1, 0) + t(1, -3, 1) \\ \epsilon_2 : \vec{r}(\lambda) &= \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0 \right) + \lambda \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right)\end{aligned}$$

οπότε οι ευθείες οι ϵ_1, ϵ_2 είναι παράλληλες με τα διανύσματα

$$\vec{u}_1 = (1, -3, 1) \quad \text{και} \quad \vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right).$$

Άρα το συνημίτονο της οξείας γωνίας τους είναι

$$\cos \left| \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} \right| = \left| \frac{1 \left(-\frac{1}{3} \right) + (-3) \left(-\frac{1}{3} \right) + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2} \sqrt{\left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 1^2}} \right| = \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{11} \frac{\sqrt{11}}{3}} = \frac{5}{11}.$$

γ) Το επίπεδο π που ορίζουν οι ϵ_1, ϵ_2 έχει εξίσωση

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{a}, \quad (iii)$$

όπου \vec{n} διάνυσμα κάθετο στο π και \vec{a} το διάνυσμα θέσης ενός σημείου του π .

Ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των ϵ_1, ϵ_2 είναι

$$\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (1, -3, 1) \times \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right) = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right) = -\frac{4}{3}(2, 1, 1)$$

άρα και το

$$\vec{n} = -\frac{3}{4}\vec{u} = (2, 1, 1).$$

Ένα σημείο του π είναι το $A(2, -1, 0)$ (προκύπτει από την (i) για $t = 0$).

Έτσι θέτοντας $\vec{r} = (x, y, z)$ η (iii) γίνεται

$$(2, 1, 1) \cdot (x, y, z) = (2, 1, 1) \cdot (2, -1, 0)$$

ή

$$2x + y + z = 3.$$

Άσκηση 3.45**Λύση**

Μπορούμε βεβαίως να ακολουθήσουμε τον τρόπο του παραδ. 3.13. Στην περίπτωση αυτή όμως, στην οποία γνωρίζουμε τις συνεταγμένες των διανυσμάτων, μπορούμε να εφαρμόσουμε την παρακάτω απλούστερη διαδικασία:

Η ευθεία ϵ είναι παράλληλη με το διάνυσμα

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\beta} - \vec{a} = (6, -6, 3) \quad \text{ή με το} \quad \vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (2, -2, 1)$$

και διέρχεται από το σημείο A με διάνυσμα θέσης $\vec{a} = (0, 1, -4)$, οπότε έχει διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{u} = (0, 1, -4) + t(2, -2, 1) = (2t, 1 - 2t, -4 + t). \quad (i)$$

Έτσι, το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma M}$, όπου M τυχαίο σημείο της ϵ , είναι

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma M} &= \vec{r}(t) - \vec{\gamma} = (2t, 1 - 2t, -4 + t) - (4, 7, -9) \\ &= (2t - 4, -6 - 2t, 5 + t). \end{aligned}$$

Το ίχνος της καθέτου B αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου t για την οποία

$$\overrightarrow{\Gamma M} \perp \vec{u} \quad \text{ή} \quad \overrightarrow{\Gamma M} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (2t - 4, -6 - 2t, 5 + t) \cdot (2, -2, 1) = 0 \Leftrightarrow 9t + 9 = 0 \quad \text{ή} \quad t = -1.$$

Δηλαδή το ίχνος της καθέτου από το Γ στην ϵ είναι το σημείο

$$M = (2(-1) - 4, -6 - 2(-1), 5 - 1) = (-6, -4, 4),$$

οπότε η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία AB είναι

$$|\overrightarrow{\Gamma M}| = \sqrt{(-6 - 4)^2 + (-4 - 7)^2 + (4 - (-9))^2} = \sqrt{390}.$$

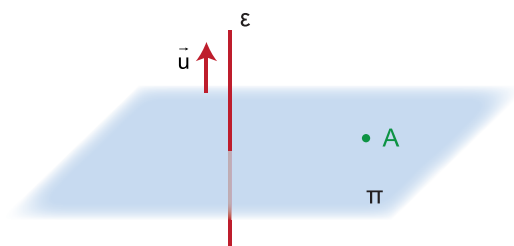
Άσκηση 3.46

Ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία ϵ είναι το

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

όπου $\vec{n}_1 = (2, 1, 0)$ και $\vec{n}_2 = (0, 1, -3)$, οπότε

$$\vec{u} = (2, 1, 0) \times (0, 1, -3) = (-3, 6, 2).$$



Σχήμα 3.46 Το επίπεδο π περνάει από το σημείο $A(1, 0, -1)$ και είναι κάθετο στην ευθεία (ϵ).

Επομένως το επίπεδο π που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετο στην ϵ , άρα και στο διάνυσμα \vec{u} , έχει εξίσωση (βλ. πρότ. 1.3)

$$\vec{u} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{u} \cdot \vec{r} = \vec{u} \cdot \vec{a} \quad \text{ή} \quad (-3, 6, 2) \cdot (x, y, z) = (-3, 6, 2) \cdot (1, 0, -1)$$

$$\text{ή} \quad -3x + 6y + 2z = -3 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 2(-1)$$

$$\text{ή} \quad -3x + 6y + 2z = -5.$$

Άσκηση 3.47

Σύμφωνα με την πρότ. 3.1, οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 έχουν εξισώσεις

$$\epsilon_1 : \vec{r}(t) = (7, -2, 3) + t(2, 0, 1) = (7 + 2t, -2, 3 + t) \quad (i)$$

$$\epsilon_2 : \vec{r}(\lambda) = (5, -1, 1) + \lambda(0, 1, -1) = (5, -1 + \lambda, 1 - \lambda). \quad (ii)$$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των ϵ_1, ϵ_2 θέτουμε

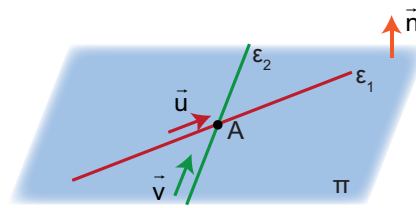
$$\vec{r}(t) = \vec{r}(\lambda),$$

οπότε

$$(7 + 2t, -2, 3 + t) = (5, -1 + \lambda, 1 - \lambda)$$

ή

$$\left\{ \begin{array}{l} 7 + 2t = 5 \\ -2 = -1 + \lambda \\ 3 + t = 1 - \lambda \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ t = -1 \end{array} \right\}.$$



Σχήμα 3.47 Το επίπεδο των ϵ_1, ϵ_2 .

Δηλαδή οι ϵ_1, ϵ_2 τέμνονται στο σημείο A με διάνυσμα θέσης, που προκύπτει από την (i) για $t = -1$,

$$\vec{a} = (7 + 2(-1), -2, 3 - 1) = (5, -2, 2).$$

Το επίπεδο π που ορίζουν οι ϵ_1, ϵ_2 έχει εξίσωση

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{a}, \quad (iii)$$

όπου \vec{n} ένα διάνυσμα κάθετο σ' αυτό.

Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v},$$

αφού τα \vec{u}, \vec{v} είναι παράλληλα με τις ϵ_1, ϵ_2 , οι οποίες περιέχονται στο π . Δηλαδή

$$\vec{n} = (2, 0, 1) \times (0, 1, -1) = (-1, 2, 2),$$

οπότε η (iii) γίνεται

$$(-1, 2, 2) \cdot (x, y, z) = (-1, 2, 2) \cdot (5, -2, 2) \Leftrightarrow \pi : -x + 2y + 2z = -5.$$

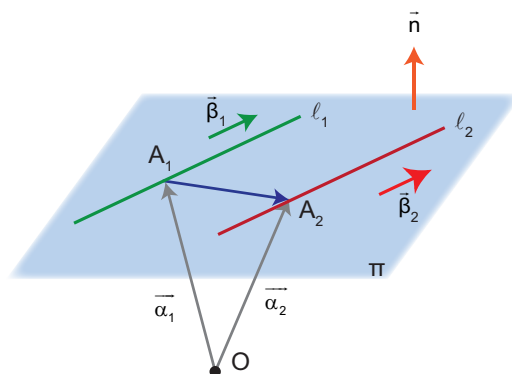
Άσκηση 3.48
Λύση

α) Οι ευθείες l_1, l_2 , που είναι παράλληλες με τα διανύσματα $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$, είναι παράλληλες μεταξύ τους αν $\vec{\beta}_1 \parallel \vec{\beta}_2$, δηλαδή αν

$$\vec{\beta}_2 = k\vec{\beta}_1, k \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad \text{rank}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2) = 1$$

Επομένως, οι ευθείες l_1, l_2 είναι παράλληλες μεταξύ τους αν

$$\text{rank}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2) = 1$$


Σχήμα 3.48

β) Τα διανύσματα $\vec{\beta}_1$ και $\overrightarrow{A_1A_2}$ είναι παράλληλα με το π , οπότε ένα διάνυσμα κάθετο στο π είναι το

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \overrightarrow{A_1A_2} \times \vec{\beta}_1 = (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \times \vec{\beta}_1 = [(-1, 0, 1) - (1, -2, 0)] \times (-1, -1, 1) \\ &= (-2, 2, 1) \times (-1, -1, 1) \\ &= (3, 1, 4). \end{aligned}$$

Επομένως, το επίπεδο π , που διέρχεται και από το σημείο A_1 με διάνυσμα θέσης \vec{a}_1 , έχει εξίσωση

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{a}_1) = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{a}_1$$

ή, αν $\vec{r} = (x, y, z)$ το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου του π ,

$$(3, 1, 4) \cdot (x, y, z) = (3, 1, 4) \cdot (1, -2, 0).$$

Επομένως, η καρτεσιανή εξίσωση του π είναι

$$3x + y + 4z = 1.$$

Άσκηση 3.49

α) Η απόσταση του P από το επίπεδο π_1 , το οποίο έχει εξίσωση

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n} = k$$

είναι
$$d = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n} - \vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n} - k|}{|\vec{n}|}$$

β) Η εξίσωση του επιπέδου π_2 γράφεται στη μορφή

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = k,$$

όπου $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, οπότε η απόσταση του P από το π είναι

$$d = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n} - k|}{|\vec{n}|} = \frac{|n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 - k|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Άσκηση 3.50

Το διάνυσμα θέσης του ίχνους B της καθέτου που άγεται από το σημείο P με διάνυσμα θέσης \vec{p} προς την ευθεία ϵ που είναι παράλληλη με το διάνυσμα \vec{u} είναι

$$\vec{\beta} = \vec{a} + \frac{(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u}, \quad (ii)$$

όπου \vec{a} το διάνυσμα θέσης ενός σημείου της ϵ και \vec{p} το διάνυσμα θέσης του P , οπότε θέτοντας $z = t$ και λύνοντας ως προς x, y τις (i), προκύπτει

$$x = z = t \quad \text{και} \quad y = 1 - x - z = 1 - 2t,$$

οπότε η ϵ έχει διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r}(t) = (x, y, z) = (t, 1 - 2t, t) = (0, 1, 0) + t(1, -2, 1).$$

Επομένως ένα σημείο της ϵ είναι το $A = (0, 1, 0)$ και ένα διάνυσμα παράλληλο με αυτή το $\vec{u} = (1, -2, 1)$. Αντικαθιστώντας στην (ii) προκύπτει

$$\vec{\beta} = (0, 1, 0) + \frac{[(1, 0, 1) - (0, 1, 0)] \cdot (1, -2, 1)}{1^2 + (-2)^2 + 1^2} (1, -2, 1) = (0, 1, 0) + \frac{4}{6} (1, -2, 1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Η απόσταση του P από την ϵ είναι

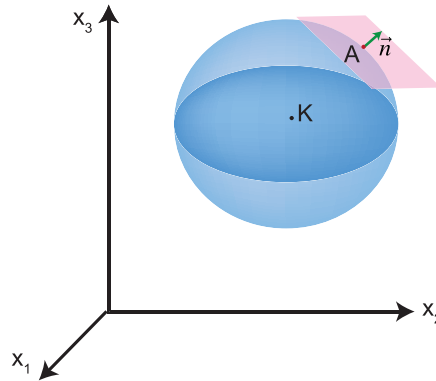
$$d(P, \epsilon) = |\overrightarrow{PB}| = |\vec{\beta} - \vec{p}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Άσκηση 3.51

Η σφαίρα S έχει καρτεσιανή εξίσωση

$$f(x, y, z) = (x - k_1)^2 + (y - k_2)^2 + (z - k_3)^2 - R^2 = 0, \quad (i)$$

οπότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.6, ένα διάνυσμα κάθετο στην S στο σημείο της $A(a_1, a_2, a_3)$ είναι το



Σχήμα 3.51

$$\vec{m} = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_A, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_A, \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_A \right) \quad (ii)$$

Από την (i) προκύπτει

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_A = 2(x - k_1)|_{x=a_1} = 2(a_1 - k_1)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_A = 2(y - k_2)|_{y=a_2} = 2(a_2 - k_2)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_A = 2(z - k_3)|_{z=a_3} = 2(a_3 - k_3)$$

οπότε η (ii) δίνει

$$\vec{m} = (2(a_1 - k_1), 2(a_2 - k_2), 2(a_3 - k_3)).$$

Επομένως, και το διάνυσμα

$$\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{m} = (a_1 - k_1, a_2 - k_2, a_3 - k_3)$$

είναι κάθετο στην S στο σημείο A .

Έτσι το εφαπτόμενο επίπεδο στην S στο σημείο $A = (a_1, a_2, a_3)$ έχει εξίσωση

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{a}$$

$$\text{ή} \quad (a_1 - k_1)x + (a_2 - k_2)y + (a_3 - k_3)z = a_1(a_1 - k_1) + a_2(a_2 - k_2) + a_3(a_3 - k_3).$$

$$\text{ή} \quad (a_1 - k_1)(x - a_1) + (a_2 - k_2)(y - a_2) + (a_3 - k_3)(z - a_3) = 0.$$

Άσκηση 3.52

ε) Από τη δεύτερη εξίσωση

$$z = 1 - 2y \quad (i)$$

οπότε η πρώτη γίνεται

$$\begin{aligned} 2(1 - 2y) &= 1 - x^2 - y^2 &\Leftrightarrow & x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ &&\Leftrightarrow & x^2 + y^2 - 2 \cdot 2y + 2^2 = 2^2 - 1 \\ &&\Leftrightarrow & x^2 + (y - 2)^2 = 3 \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή αληθεύει για

$$x = \sqrt{3} \cos t \quad \text{και} \quad y = 2 + \sqrt{3} \sin t$$

Έτσι από την (i) προκύπτει

$$z = 1 - 2(2 + \sqrt{3} \sin t) = -(3 + 2\sqrt{3} \sin t)$$

οπότε η γραμμή αυτή έχει διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r}(t) = \sqrt{3} \cos t \hat{i} + (2 + \sqrt{3} \sin t) \hat{j} - (3 + 2\sqrt{3} \sin t) \hat{k}.$$

Άσκηση 3.53

Ένα διάνυσμα κάθετο στην S στο σημείο A είναι το (βλ. Παρατήρηση 3.6)

$$\vec{m} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_A, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_A, \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_A \right),$$

όπου

$$f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z^2 - 2x + 4y + 6z - 8.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_A = 2x - 2 \Big|_{x=0} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_A = 8y + 4 \Big|_{y=-1} = -4$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_A = -2z + 6 \Big|_{z=2} = 2,$$

οπότε το διάνυσμα $\vec{m} = (-2, -4, 2)$, άρα και το $\vec{n} = -\frac{1}{2}\vec{m} = (1, 2, -1)$, είναι κάθετο στην S στο A . Επομένως, η εξίσωση του π είναι (βλ. πρότ. 1.3)

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{a}, \quad (i)$$

όπου $\vec{a} = (0, -1, 2)$ το διάνυσμα θέσης του σημείου επαφής A και $\vec{r} = (x, y, z)$ το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου (x, y, z) του π .

Η (i) γράφεται $(1, 2, -1) \cdot (x, y, z) = (1, 2, -1) \cdot (0, -1, 2),$

οπότε το π έχει καρτεσιανή εξίσωση

$$x + 2y - z = -4.$$