

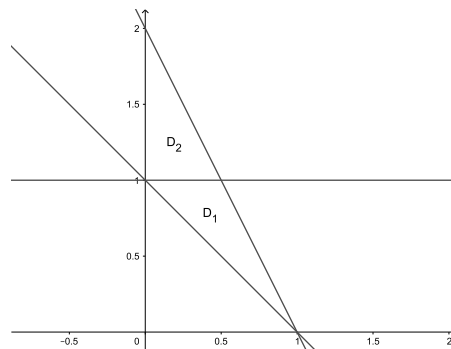
Κεφάλαιο 4

Διπλά ολοκληρώματα

Άσκηση 4.2

Υπολογίζοντας άμεσα το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 e^{-x} [y]_{1-x}^{2-2x} dx = \int_0^1 e^{-x} [2 - 2x - (1 - x)] dx = \frac{1}{e}$$



Σχήμα 4.1

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης το D δεν είναι απλό ως προς x , οπότε πρέπει να χωρίσουμε το D σε δύο χωρία απλά ως προς x (βλ. σχήμα).

Γράφοντας τις ευθείες του συνόρου του D ως

$$x = 1 - y \quad \text{και} \quad x = 1 - \frac{y}{2}$$

τα δύο απλά ως προς x χωρία στα οποία χωρίζεται το D είναι

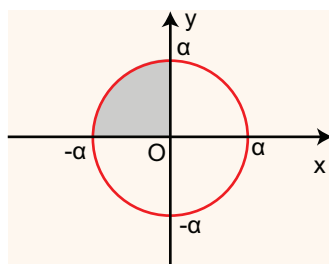
$$D_1 = \left\{ (x, y) : 1 - y \leq x \leq 1 - \frac{y}{2} \quad 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

και

$$D_2 = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1 - y \quad 1 \leq y \leq 2 \right\}$$

οπότε αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης το I είναι

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} e^{-x} dx dy + \iint_{D_2} e^{-x} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{1-y}^{1-\frac{y}{2}} e^{-x} dx dy + \int_1^2 \int_0^{1-\frac{y}{2}} e^{-x} dx dy \\ &= \int_0^1 -[e^{-x}]_{1-y}^{1-\frac{y}{2}} dy + \int_1^2 -[e^{-x}]_0^{1-\frac{y}{2}} dy \\ &= -\int_0^1 (e^{\frac{y}{2}-1} - e^{y-1}) dy - \int_1^2 (e^{\frac{y}{2}-1} - 1) dy \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Άσκηση 4.3**Σχήμα 4.3**

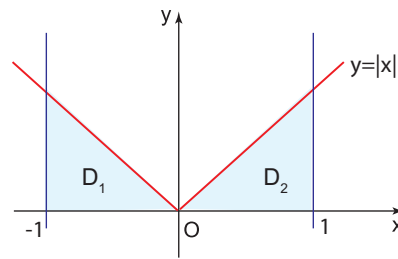
Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ το χωρίο D γράφεται

$$D' = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq a \text{ και } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \right\}$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^a (r \cos \theta - r \sin \theta) r dr \right) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos \theta - \sin \theta) d\theta \int_0^a r^2 dr \\ &= -2 \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 4.4



Σχήμα 4.4 Το χωρίο της Άσκησης 4.4

Λόγω της μορφής του χωρίου D

$$I = I_1 + I_2 = \iint_{D_1} (x^2y + xy^2) dx dy + \iint_{D_2} (x^2y + xy^2) dx dy$$

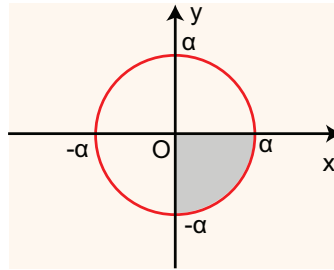
όπου D_1 το χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $y = -x, x = -1$ και άξονα x και D_2 το χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $y = x, x = 1$ και τον άξονα x (βλ. Σχήμα 4.4)

Επειδή τα D_1, D_2 είναι απλά ως προς y

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^0 \left[\int_0^{-x} (x^2y + xy^2) dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right]_0^{-x} dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[\frac{x^2(-x)^2}{2} + \frac{x(-x)^3}{3} \right] dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{-1}^0 x^4 dx \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{30} \\ I_2 &= \int_0^1 \left[\int_0^x (x^2y + xy^2) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right]_0^x dx \\ &= \int_0^1 \frac{5x^4}{6} dx \\ &= \frac{1}{6} [x^5]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

ρα

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{1}{5}$$

Άσκηση 4.5**Σχήμα 4.5** Το χωρίο της Άσκησης 4.5

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες το χωρίο D γράφεται

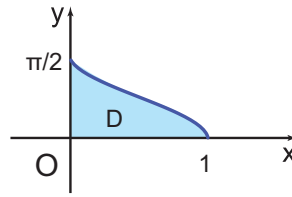
$$D' = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq a \text{ και } \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \right\},$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left(\int_0^a \frac{r \sin \theta}{1 + r^2} r dr \right) d\theta \\ &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin \theta d\theta \int_0^a \frac{r^2}{1 + r^2} dr \\ &= -(a - \tan^{-1} a) \\ &= \tan^{-1} a - a \end{aligned}$$

Άσκηση 4.6

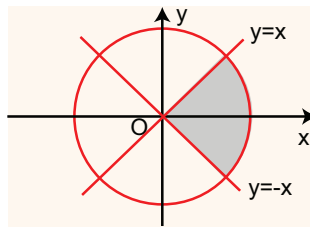
Το χωρίο αυτό είναι απλό προς x (βλ. Σχήμα 4.6), οπότε



Σχήμα 4.6 Το χωρίο της Άσκησης 4.6

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\cos y} x \sin y dx \right] dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\cos y} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \cos^2 y dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^0 t^2 (-dt) \\
 &= -\frac{1}{6} [t^3]_1^0 \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

(θέτοντας $t = \cos y$).

Άσκηση 4.7**Σχήμα 4.7** Το χωρίο της Άσκησης 4.7

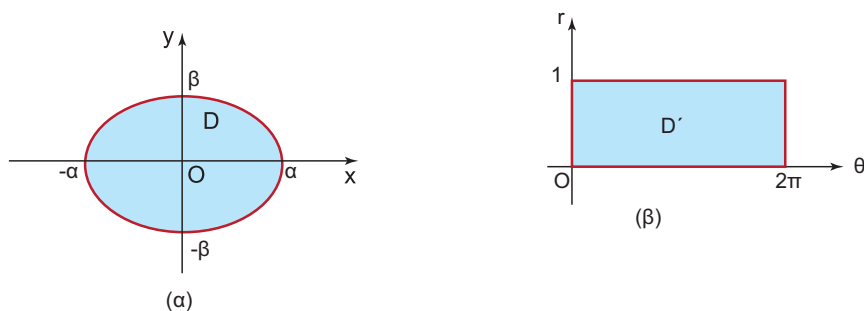
Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες το χωρίο D γράφεται

$$D' = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq a \text{ και } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

οπότε

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^a r^2 dr = 0 \cdot \frac{a^3}{3} = 0.$$

Άσκηση 4.8



Σχήμα 4.8 Το χωρίο της Άσκησης 4.8

Το D είναι το εσωτερικό έλλειψης με μήκη ημιαξόνων a και β . (βλ. Σχήμα 4.8), οπότε χρησιμοποιώντας ελλειπτικές συντεταγμένες

$$x = ar \cos \theta, \quad y = \beta r \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

το D γίνεται ορθογώνιο

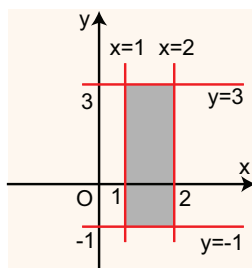
$$D' = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \frac{|ar \cos \theta \beta r \sin \theta|}{\sqrt{a^2 r^2 \cos^2 \theta + \beta^2 r^2 \sin^2 \theta}} a \beta r dr \right] d\theta \\ &= a^2 \beta^2 \int_0^{2\pi} \frac{|\cos \theta \sin \theta|}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + \beta^2 \sin^2 \theta}} d\theta \int_0^1 r^2 dr \end{aligned}$$

Έτσι

$$I = a^2 \beta^2 \frac{4}{a + \beta} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4a^2 \beta^2}{3(a + \beta)}$$

Άσκηση 4.9**Σχήμα 4.9** Το χωρίο της Άσκησης 4.9

Η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x, y)$ στο χωρίο D είναι (βλ. Θεώρημα 4.1)

$$\bar{f} = \frac{\iint_D (yx^2) dx dy}{E(D)} \quad (i)$$

Το D είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οπότε

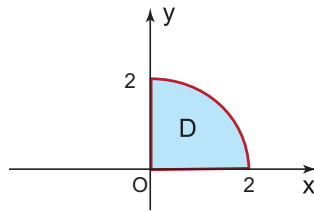
$$\begin{aligned} \iint_D (yx^2) dx dy &= \int_{-1}^3 y dy \int_1^2 (x^2) dx \\ &= \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \frac{28}{3} \end{aligned}$$

και

$$E(D) = (2 - 1)(3 - (-1)) = 4$$

Έτσι από την (i) προκύπτει

$$\bar{f} = \frac{\frac{28}{3}}{4} = \frac{28}{12} = 2,33$$

Άσκηση 4.10**Σχήμα 4.10** Το χωρίο της Άσκησης 4.10

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

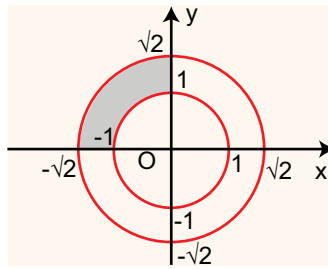
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

το D γράφεται

$$D' = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^2 e^{-r^2} r dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 e^{-r^2} r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^2 \\ &= -\frac{\pi}{4} (e^{-4} - 1) \\ &= \frac{\pi(1 - e^{-4})}{4} \end{aligned}$$

Άσκηση 4.11**Σχήμα 4.11** Το χωρίο της Άσκησης 4.11

Το χωρίο αυτό σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$D' = \left\{ (r, \theta) : 1 \leq r \leq \sqrt{2} \text{ και } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \right\},$$

οπότε $(x^2 + y^2 = r^2)$,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_1^{\sqrt{2}} (r \cos \theta - 2r \sin \theta) r dr \right) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos \theta - 2 \sin \theta) d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r^2 dr \\ &= -3 \cdot \frac{1}{3} (\sqrt{2} - 1) \\ &= 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 4.12

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

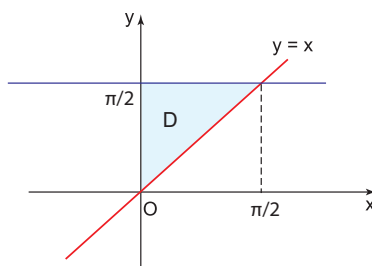
$$\int \frac{\sin y}{y} dy$$

Όμως το I είναι

$$I = \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$$

όπου

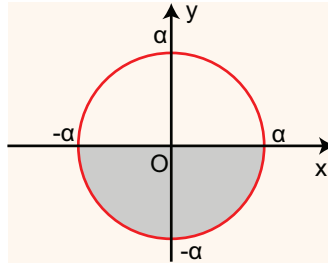
$$D = \{(x, y) : x \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$$



Σχήμα 4.12 Το χωρίο της Άσκησης 4.12

Από το Σχήμα 4.12 φαίνεται ότι το D είναι απλό και ως προς x , οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^y \frac{\sin y}{y} dx \right] dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y} [x]_0^y dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy \\ &= -[\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Άσκηση 4.13**Σχήμα 4.13** Το χωρίο της Άσκησης 4.13

Η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x, y)$ στο χωρίο D είναι (βλ. Θεώρημα 4.1)

$$\bar{f} = \frac{\iint_D (y^2 + 2xy) dx dy}{E(D)}, \quad (i)$$

Το D σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$D' = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, \pi \leq \theta \leq 2\pi\},$$

οπότε

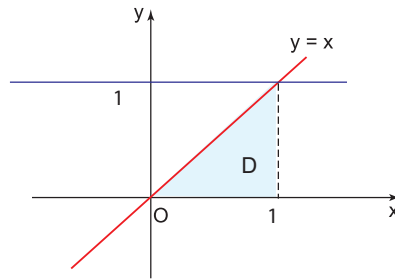
$$\begin{aligned} \iint_D (y^2 + 2xy) dx dy &= \int_{\pi}^{2\pi} \left(\int_0^a (r^2 \sin^2 \theta + 2r \cos \theta r \sin \theta) r dr \right) d\theta \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} (\sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta) d\theta \int_0^a r^3 dr \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{8} \end{aligned}$$

Το εμβαδό του χωρίου D είναι

$$E(D) = \frac{\pi a^2}{2}$$

Έτσι από την (i) προκύπτει

$$\bar{f} = \frac{\frac{a^4}{8}}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Άσκηση 4.14**Σχήμα 4.14** Το χωρίο της Άσκησης 4.14

Επειδή ο υπολογισμός του $\int \frac{1}{1+x^4} dx$ δεν είναι δυνατός, γράφουμε το I ως

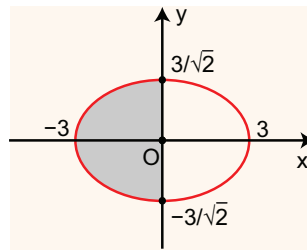
$$I = \iint_D \frac{1}{1+x^4} dx dy$$

όπου

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1\}$$

το χωρίο του σχήματος από το οποίο φαίνεται ότι το D είναι απλό και ως προς y , οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_0^x \frac{1}{1+x^4} dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^4} [y]_0^x = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} [\tan^{-1} t]_0^1 = \frac{1}{2} (\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Άσκηση 4.15**Σχήμα 4.15**

Το χωρίο D (εσωτερικό έλλειψης) γράφεται

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{1}{9} \leq \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} \leq 1 \text{ και } x \leq 0 \right\},$$

οπότε χρησιμοποιώντας ελλειπτικές συντεταγμένες

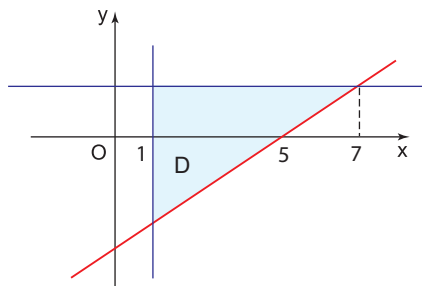
$$x = 3r \cos \theta \text{ και } y = \frac{3}{\sqrt{2}} r \sin \theta,$$

το D είναι ορθογώνιο,

$$D' = \left\{ (r, \theta) : \frac{1}{3} \leq r \leq 1 \text{ και } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} E(D) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{3}}^1 3r \cos \theta \frac{3}{\sqrt{2}} r \sin \theta \frac{9}{\sqrt{2}} r dr \right) d\theta \\ &= \left(\frac{9}{\sqrt{2}} \right)^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_{\frac{1}{3}}^1 r^3 dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 4.16**Σχήμα 4.16** Το χωρίο της Άσκησης 4.16

Το χωρίο αυτό γράφεται ως

$$D = \{(x, y) : x - 5 < y < 2, \quad 1 < x < 7\}$$

οπότε είναι απλό ως προς y . Έτσι

$$\begin{aligned} I &= \int_1^7 \left[\int_{x-5}^2 \sin \pi(2x + y) dy \right] dx \\ &= \int_1^7 -\frac{1}{\pi} [\cos \pi(2x + y)]_{x-5}^2 dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_1^7 [\cos \pi(2x + 2) - \cos \pi(2x + x - 5)] dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_1^7 [\cos 2\pi x - \cos(3\pi x + \pi)] dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_1^7 (\cos 2\pi x + \cos 3\pi x) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \right]_1^7 + \left[\frac{\sin 3\pi x}{3\pi} \right]_1^7 \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 4.17

Τα σημεία τομής των δύο γραμμών προκύπτουν από το σύστημα των εξισώσεών τους

$$y = x^2 \quad \text{και} \quad x + y = 2$$

το οποίο δίνει

$$x + x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{και} \quad x = -2.$$

Για $x = 1$,

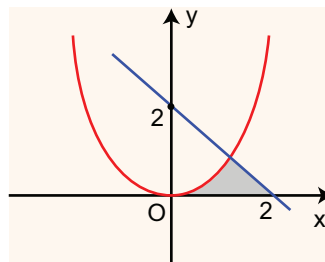
$$y = 2 - 1 = 1.$$

Το χωρίο D γράφεται ως

$$D = \{(x, y) : \sqrt{y} < x < 2 - y \quad \text{και} \quad 0 < y < 1\}$$

Η μάζα του χωρίου D είναι

$$\begin{aligned} m &= \iint \sigma(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{2-y} ky dx \right) dy \\ &= \int_0^1 ky [x]_{\sqrt{y}}^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 ky(2 - y - \sqrt{y}) dy \\ &= \frac{4k}{15} \end{aligned}$$



Σχήμα 4.17 Το χωρίο της Άσκησης 4.17

β) Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας του χωρίου D είναι

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{1}{m} \iint_D x \sigma(x, y) dx dy \\
 &= \frac{1}{\frac{4k}{15}} \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{2-y} x k y dx \right) dy \\
 &= \frac{15}{4k} \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\sqrt{y}}^{2-y} k y dy \\
 &= \frac{15}{8} \int_0^1 y [(2-y)^2 - y] dy \\
 &= \frac{15}{8} \frac{7}{12} = \frac{35}{32} \\
 y_c &= \frac{1}{m} \iint_D y \sigma(x, y) dx dy \\
 &= \frac{1}{\frac{4k}{15}} \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{2-y} y k y dx \right) dy \\
 &= \frac{15}{4} \int_0^1 y^2 [x]_{\sqrt{y}}^{2-y} y dy \\
 &= \frac{15}{4} \int_0^1 y^2 (2 - y - \sqrt{y}) dy \\
 &= \frac{15}{4} \frac{11}{34} = \frac{55}{112}
 \end{aligned}$$

Άρα, το κέντρο μάζας του χωρίου D είναι το σημείο

$$\left(\frac{35}{32}, \frac{55}{112} \right) = (1,094, 0,491).$$

Άσκηση 4.18

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

το χωρίο αυτό γράφεται

$$D = \{(r, \theta) : 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi\}$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (a - 2x - 3y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R (a - 2r \cos \theta - 3r \sin \theta) r \, dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2} [r^2]_0^R - \frac{2 \cos \theta}{3} [r^3]_0^R - \sin \theta [r^3]_0^R \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2} R^2 - \frac{2R^3}{3} \cos \theta - R^3 \sin \theta \right) d\theta \\ &= \frac{aR^2}{2} [\theta]_0^{2\pi} = \pi a R^2, \end{aligned}$$

διότι

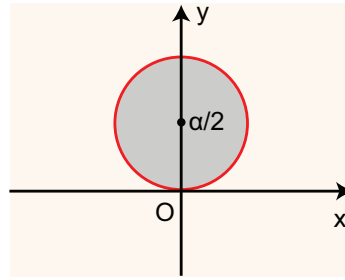
$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0.$$

Άσκηση 4.19

Η (i) γράφεται

$$x^2 + y^2 - ay = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\frac{a}{2}y + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

οπότε το D είναι το εσωτερικό του κύκλου με κέντρο το $K(0, \frac{a}{2})$ και ακτίνα $\frac{a}{2}$.



Σχήμα 4.19 Το χωρίο της Άσκησης 4.19

Θέτοντας $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$ στην (i), προκύπτει

$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 - ar \sin \theta = 0 \Leftrightarrow r^2 = ar \sin \theta \Leftrightarrow r = a \sin \theta,$$

οπότε το χωρίο αυτό σε πολικές συντεταγμένες είναι (βλ. Σχήμα 4.19).

$$D' = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a \sin \theta \text{ και } 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \sigma dx dy = \iint_{D'} k |r \cos \theta| r dr d\theta \\ &= k \int_0^\pi \left(\int_0^{a \sin \theta} r^2 |\cos \theta| dr \right) d\theta \\ &= k \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{a \sin \theta} |\cos \theta| d\theta \\ &= \frac{ka^3}{3} \int_0^\pi \sin^3 \theta |\cos \theta| d\theta \\ &= \frac{ka^3}{3} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^3 \theta (-\cos \theta) d\theta \right] \\ &= \frac{ka^3}{6} \left[\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) \right] \\ &= \frac{ka^3}{6} \end{aligned}$$

Επίσης οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας είναι

$$\begin{aligned}
x_c = \frac{1}{m} \iint x \sigma dx dy &= \frac{1}{m} \iint_{D'} r \cos \theta k |r \cos \theta| r dr d\theta \\
&= \frac{k}{m} \int_0^\pi \left(\cos \theta |\cos \theta| \int_0^{a \sin \theta} r^3 dr \right) d\theta \\
&= \frac{k}{m} \int_0^\pi \cos \theta |\cos \theta| \frac{1}{4} (a \sin \theta)^4 d\theta \\
&= \frac{ka^4}{4m} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^4 \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos^2 \theta) \sin^4 \theta d\theta \right] \\
&= \frac{ka^4}{4} \frac{ka^3}{6} \left[\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_c = \frac{1}{m} \iint y \sigma dx dy &= \frac{1}{m} \iint_{D'} r \sin \theta k |r \cos \theta| r dr d\theta \\
&= \frac{k}{m} \int_0^\pi \left(\sin \theta |\cos \theta| \int_0^{a \sin \theta} r^3 dr \right) d\theta \\
&= \frac{k}{m} \int_0^\pi \sin \theta |\cos \theta| \frac{1}{4} (a \sin \theta)^4 d\theta \\
&= \frac{ka^4}{4m} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^5 \theta (-\cos \theta) d\theta \right] \\
&= \frac{ka^4}{4} \frac{ka^3}{6} \left[\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6} \right) \right] \\
&= \frac{3a}{2} \frac{1}{3} = \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

Άρα, το κέντρο μάζας του χωρίου D είναι το σημείο $\left(0, \frac{a}{2}\right)$.

β) *i)* Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα x είναι

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_D y^2 \sigma dx dy = \iint_{D'} (r \sin \theta)^2 k |r \cos \theta| r dr d\theta \\
&= k \int_0^\pi \left(\sin^2 \theta |\cos \theta| \int_0^{a \sin \theta} r^4 dr \right) d\theta \\
&= k \int_0^\pi \sin^2 \theta |\cos \theta| \frac{1}{5} (a \sin \theta)^5 d\theta \\
&= \frac{ka^5}{5} \int_0^\pi \sin^7 \theta |\cos \theta| d\theta \\
&= \frac{ka^5}{5} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 \theta \cos \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^7 \theta (-\cos \theta) d\theta \right] \\
&= \frac{ka^5}{5} \left[\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{8} \right) \right] \\
&= \frac{ka^5}{20}
\end{aligned}$$

ii) Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y είναι

$$\begin{aligned}
I_y &= \iint_D x^2 \sigma dx dy = \iint_{D'} (r \cos \theta)^2 k |r \cos \theta| r dr d\theta \\
&= k \int_0^\pi \left(\cos^2 \theta |\cos \theta| \int_0^{a \sin \theta} r^4 dr \right) d\theta \\
&= \frac{ka^5}{4} \int_0^\pi \cos^2 \theta |\cos \theta| \sin^4 \theta d\theta \\
&= \frac{ka^5}{5} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin^5 \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\cos^3 \theta \sin^5 \theta d\theta \right) \\
&= \frac{ka^5}{5} \left[\frac{1}{24} - \left(-\frac{1}{24} \right) \right] \\
&= \frac{ka^5}{60}
\end{aligned}$$

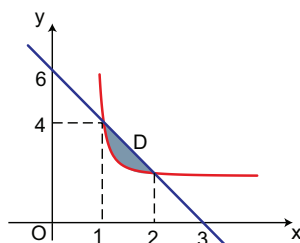
Η ροπή αδράνειας ως προς την αρχή των αξόνων είναι

$$\begin{aligned}
I_O &= \iint_D (x^2 + y^2) \sigma dx dy \\
&= \iint_{D'} r^2 k |r \cos \theta| r dr d\theta \\
&= k \int_0^\pi \left(|\cos \theta| \int_0^{a \sin \theta} r^4 dr \right) d\theta \\
&= \frac{ka^5}{5} \int_0^\pi |\cos \theta| \sin^5 \theta d\theta \\
&= \frac{ka^5}{5} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin^5 \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\cos \theta \sin^5 \theta d\theta \right) \\
&= \frac{ka^5}{5} \left[\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6} \right) \right] \\
&= \frac{ka^5}{15}
\end{aligned}$$

Άσκηση 4.20

Τα σημεία τομής των δύο γραμμών προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους, από το οποίο προκύπτουν τα σημεία

$$(1, 4) \text{ και } (2, 2)$$



Σχήμα 4.20 Το χωρίο της Άσκησης 4.20

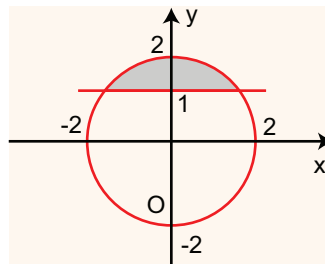
Έτσι, το χωρίο D γράφεται

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{4}{x} < y < 6 - 2x, \ 1 < x < 2 \right\}$$

οπότε είναι απλό ως προς y

Επομένως, η μάζα του χωρίου αυτού είναι

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \sigma dx dy = \int_1^2 \left[\int_{\frac{4}{x}}^{6-2x} k(x^2 + y^2) dy \right] dx \\ &= k \int_1^2 \left(x^2 \left[y \right]_{\frac{4}{x}}^{6-2x} + \frac{1}{3} \left[y^3 \right]_{\frac{4}{x}}^{6-2x} \right) dx \\ &= k \int_1^2 \left[x^2 \left(6 - 2x - \frac{4}{x} \right) + \frac{1}{3} (6 - 2x)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{4}{x} \right)^3 \right] dx \\ &= \frac{5k}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 4.21**Σχήμα 4.21** Το χωρίο της Άσκησης 4.21

Το D γράφεται

$$D = \{(x, y) : 1 < y < \sqrt{4-x^2}, \quad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$$

(διότι τα σημεία τομής του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ με την ευθεία $y = 1$ είναι τα $x = \pm\sqrt{3}$), οπότε :

α) Αν $\sigma = \sigma_0$ σταθερά :

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \sigma dx dy = \sigma_0 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\int_1^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) dx \\ &= \sigma_0 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-x^2} - 1) dx \\ &= \sigma_0 \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \\ x_c &= \frac{1}{m} \iint_D x \sigma dx dy = \frac{\sigma_0}{m} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(x \int_1^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) dx \\ &= \frac{\sigma_0}{m} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x (\sqrt{4-x^2} - 1) dx \\ &= 0 \\ y_c &= \frac{1}{m} \iint_D y \sigma dx dy = \frac{\sigma_0}{m} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\int_1^{\sqrt{4-x^2}} y dy \right) dx \\ &= \frac{\sigma_0}{2m} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} [y^2]_1^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \frac{\sigma_0}{2m} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (4 - x^2 - 1) dx \\ &= \frac{\sigma_0}{\sigma_0 \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right)} 4\sqrt{3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

Άρα, το κέντρο μάζας του χωρίου D είναι το σημείο

$$\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}} \right)$$

β) Αν η επιφανειακή πυκνότητα του D είναι $\sigma = k|x|$,

$$\begin{aligned}
m &= \iint_D k|x| dx dy \\
&= k \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(|x| \int_1^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) dx \\
&= k \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |x| (\sqrt{4-x^2} - 1) dx \\
&= 2k \int_0^{\sqrt{3}} x (\sqrt{4-x^2} - 1) dx \\
&= 2k \frac{5}{6} = \frac{5k}{3} \\
x_c &= \frac{1}{m} \iint x k|x| dx dy \\
&= \frac{k}{m} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(x|x| \int_1^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) dx \\
&= \frac{k}{m} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x|x| (\sqrt{4-x^2} - 1) dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

(αφού η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι περιττή).

Επίσης χρησιμοποιήσαμε ότι για μία άρτια συνάρτηση $g(x)$ ισχύει

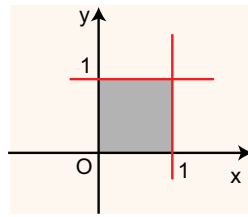
$$\int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
y_c &= \frac{1}{m} \iint y k|x| dx dy \\
&= \frac{k}{m} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(|x| \int_1^{\sqrt{4-x^2}} y dy \right) dx \\
&= \frac{k}{2m} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |x| (4 - x^2 - 1) dx \\
&= \frac{k}{2m} \cdot 2 \int_0^{\sqrt{3}} x (3 - x^2) dx \\
&= \frac{k}{m} \frac{9}{4} = \frac{9k}{4} \frac{5k}{3} = \frac{27}{20}
\end{aligned}$$

Άρα, το κέντρο μάζας του χωρίου D είναι το σημείο

$$\left(0, \frac{27}{20} \right)$$

Άσκηση 4.22**Σχήμα 4.22** Το χωρίο της Άσκησης 4.22

Επειδή το χωρίο είναι ορθογώνιο,

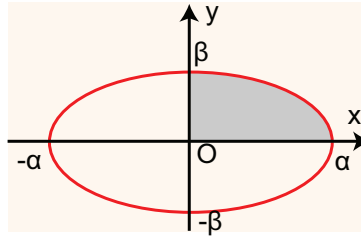
$$\begin{aligned}
 m &= \iint_D \sigma dx dy = k \int_0^1 \left\{ \int_0^1 [1 + (1-x)(1-y)] dy \right\} dx \\
 &= k \int_0^1 \left\{ \int_0^1 [2 - x + (x-1)y] dy \right\} dx \\
 &= k \int_0^1 \left\{ (2-x)[y]_0^1 + \frac{x-1}{2} [y^2]_0^1 \right\} dx \\
 &= k \int_0^1 \left(2 - x + \frac{x-1}{2} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x \right) dx \\
 &= k \left(\frac{3}{2} [x]_0^1 - \frac{1}{4} [x^2]_0^1 \right) = k \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right) \\
 &= \frac{5k}{4} \\
 \iint_D x \sigma dx dy &= k \int_0^1 \left\{ \int_0^1 [2x - x^2 + (x^2 - x)y] dy \right\} dx \\
 &= k \int_0^1 \left(2x - x^2 + \frac{x^2 - x}{2} \right) dx \\
 &= k \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2} \right) dx \\
 &= \frac{7k}{12}
 \end{aligned}$$

Όμοια

$$\iint_D y \sigma dx dy = \frac{7k}{12}$$

οπότε το κέντρο μάζας του D έχει συντεταγμένες

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{1}{m} \iint_D x \sigma dx dy = \frac{4}{5k} \frac{7k}{12} = \frac{7}{15} \\
 y_c &= \frac{1}{m} \iint_D y \sigma dx dy = \frac{4}{5k} \frac{7k}{12} = \frac{7}{15}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 4.23**Σχήμα 4.23** Το χωρίο της Άσκησης 4.23

Χρησιμοποιώντας ελλειπτικές συντεταγμένες

$$x = \arccos \theta \quad \text{και} \quad y = \beta r \sin \theta$$

το χωρίο D γράφεται

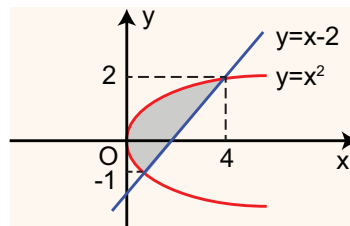
$$D' = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

οπότε (σ_0 σταθερή επιφανειακή πυκνότητα)

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \sigma_0 dx dy = \sigma_0 \iint_{D'} a \beta r dr d\theta \\ &= \sigma_0 a \beta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 r dr \\ &= \sigma_0 a \beta \frac{\pi}{4} \frac{1}{2} = \frac{\pi \sigma_0 a \beta}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{m} \iint_D x \sigma_0 dx dy \\ &= \frac{\sigma_0}{m} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^1 a r \cos \theta a \beta r dr \right) d\theta \\ &= \frac{\sigma_0 a^2 \beta}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^1 r^2 dr \\ &= \frac{\sigma_0 a^2 \beta}{m} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{3} = \frac{\sigma_0 a^2 \beta \sqrt{2}}{6 \frac{\pi \sigma_0 a \beta}{8}} \\ &= \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{m} \iint_D y \sigma_0 dx dy \\ &= \frac{\sigma_0}{m} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^1 \beta r \sin \theta a \beta r dr \right) d\theta \\ &= \frac{\sigma_0 a \beta^2}{m} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 dr \\ &= \frac{\sigma_0 a \beta^2}{m} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{1}{3} = \frac{8}{3\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

Άσκηση 4.24**Σχήμα 4.24** Το χωρίο της Άσκησης 4.24

Τα σημεία τομής της παραβολής και της ευθείας προκύπτουν από το σύστημα

$$y^2 = x \quad \text{και} \quad y = x - 2$$

το οποίο δίνει

$$y = y^2 - 2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \quad \text{και} \quad y = 2$$

Για $y = 2$, $x = 2^2 = 4$

Έτσι, το χωρίο D γράφεται

$$D = \{(x, y) \mid y^2 < x < y + 2, \quad -1 \leq y \leq 2\}$$

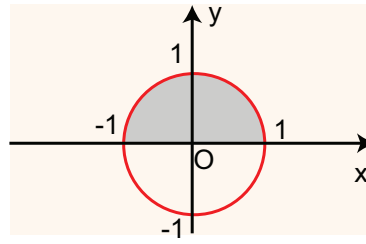
οπότε είναι απλό ως προς x . Έτσι,

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \sigma dx dy = \int_0^2 \left(\int_{y^2}^{y+2} kx^2 y^2 dx \right) dy \\ &= k \int_{-1}^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{y^2}^{y+2} y^2 dy \\ &= \frac{k}{3} \int_{-1}^2 [(y+2)^3 - (y^2)^3] y^2 dy \\ &= \frac{k}{3} \frac{621}{10} \\ &= 20,7k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{m} \iint_D x \sigma dx dy \\ &= \frac{1}{m} \int_{-1}^2 \left(\int_{y^2}^{y+2} x k x^2 y^2 dx \right) dy \\ &= \frac{k}{m} \int_{-1}^2 y^2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_{y^2}^{y+2} dy \\ &= \frac{k}{4m} \int_{-1}^2 y^2 [(y+2)^4 - (y^2)^4] dy \\ &= \frac{k}{4 \cdot 20,7k} \frac{93384}{385} \\ &= 2,93 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_c &= \frac{1}{m} \iint_D y \sigma dx dy \\&= \frac{1}{m} \int_0^2 \left(\int_{y^2}^{y+2} y k x^2 y^2 dx \right) dy \\&= \frac{k}{m} \int_0^2 y^3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{y^2}^{y+2} dy \\&= \frac{k}{3m} \int_0^2 y^3 \left[(y+2)^3 - (y^2)^3 \right] dy \\&= \frac{k}{3 \cdot 20,7k} \frac{2061}{70} \\&= 1,42\end{aligned}$$

Άρα, το κέντρο μάζας του χωρίου D είναι το σημείο $(2.93, 1.42)$.

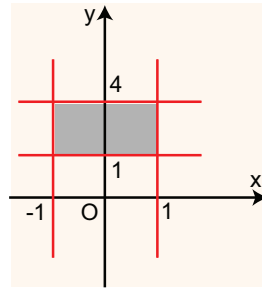
Άσκηση 4.25**Σχήμα 4.25** Το χωρίο της Άσκησης 4.25

Το D σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$D' = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1 \text{ και } 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D x^2 \sigma dx dy \\
 &= \iint_{D'} r^2 \cos^2 \theta k |r \cos \theta \cdot r \sin \theta| r dr d\theta \\
 &= k \int_0^\pi \cos^2 \theta |\cos \theta \sin \theta| \left(\int_0^1 r^5 dr \right) d\theta \\
 &= \frac{k}{6} \int_0^\pi \cos^2 \theta |\cos \theta \sin \theta| d\theta \\
 &= \frac{k}{6} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^3 \theta \sin \theta d\theta \right] \\
 &= \frac{k}{6} \left[\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right) \right] \\
 &= \frac{k}{12}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 4.26**Σχήμα 4.26** Το χωρίο της Άσκησης 4.26

Το χωρίο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οπότε

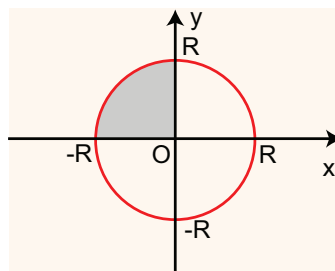
$$\begin{aligned}
 m &= \iint_D k(1+x^2+y^2)dx dy \\
 &= k \int_{-1}^1 \left(\int_1^4 (1+x^2+y^2)dy \right) dx \\
 &= k \int_{-1}^1 \left(\int_1^4 \left(1+x^2[y]_1^4 + \left[\frac{y^3}{3} \right]_1^4 \right) dx \right) \\
 &= k \int_{-1}^1 (24+3x^2) dx \\
 &= 50k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{1}{m} \iint_D xk(1+x^2+y^2)dx dy \\
 &= \frac{k}{m} \int_{-1}^1 \left(x \int_1^4 (1+x^2+y^2)dy \right) dx \\
 &= \frac{k}{m} \int_{-1}^1 x(24+3x^2) dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_c &= \frac{1}{m} \iint_D yk(1+x^2+y^2)dx dy \\
 &= k \int_{-1}^1 \left(\int_1^4 y(1+x^2+y^2)dy \right) dx \\
 &= \frac{k}{m} \int_{-1}^1 \left((1+x^2) \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^4 + \left[\frac{y^4}{4} \right]_1^4 \right) dx \\
 &= \frac{k}{m} \int_{-1}^1 \left(\frac{235}{4} + \frac{15}{2}x^2 \right) dx \\
 &= \frac{k}{50k} \frac{295}{2} \\
 &= 2,95
 \end{aligned}$$

Επομένως, το κέντρο μάζας είναι το σημείο

$$(0, 2.95).$$

Άσκηση 4.27**Σχήμα 4.27** Το χωρίο της Άσκησης 4.27

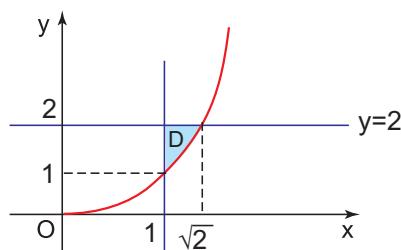
Το χωρίο σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$D' = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq R \text{ και } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \right\}$$

$$\begin{aligned} m &= \iint_D k|x| dx dy \\ &= \iint_{D'} k|r \cos \theta| r dr d\theta \\ &= k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos \theta| \left(\int_0^R r^2 dr \right) d\theta \\ &= k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos \theta) d\theta \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \\ &= -\frac{kR^3}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{kR^3}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_c &= \frac{1}{m} \iint_D xk|x|dx dy \\
&= \frac{k}{m} \iint_{D'} r \cos \theta |r \cos \theta| r dr d\theta \\
&= \frac{k}{m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos^2 \theta d\theta \int_0^R r^3 dr \\
&= \frac{k}{m} \frac{\pi}{4} \frac{R^4}{4} = \frac{k}{\frac{kR^3}{3}} \frac{\pi}{4} \frac{R^4}{4} = \frac{3\pi R}{16} \\
y_c &= \frac{1}{m} \iint_D yk|x|dx dy \\
&= \frac{k}{m} \iint_{D'} r \sin \theta |r \cos \theta| r dr d\theta \\
&= \frac{k}{m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \theta (-\cos \theta) d\theta \int_0^R r^3 dr \\
&= \frac{k}{m} \frac{1}{4} \frac{R^4}{4} = \frac{k}{\frac{kR^3}{3}} \frac{1}{4} \frac{R^4}{4} \\
&= \frac{3R}{8}
\end{aligned}$$

Επομένως, το κέντρο μάζας είναι το σημείο $\left(\frac{3\pi R}{16}, \frac{3R}{8}\right)$

Άσκηση 4.28**Σχήμα 4.28** Το χωρίο της Άσκησης 4.28

Το χωρίο D γράφεται (βλ. Σχήμα 4.28)

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq \sqrt{y}, 1 \leq y \leq 2\}$$

και είναι απλό ως προς x , οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left[\int_1^{\sqrt{y}} \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{y}}}}{y^2} dx \right] dy \\ &= \int_1^2 \frac{1}{y^2} \sqrt{y} \left[e^{\frac{x}{\sqrt{y}}} \right]_1^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_1^2 \left(e y^{-\frac{3}{2}} - y^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{\sqrt{y}}} \right) dy \\ &= \frac{e}{-\frac{1}{2}} \left[y^{-\frac{1}{2}} \right]_1^2 - \int_1^2 e^{\frac{1}{\sqrt{y}}} y^{-\frac{3}{2}} dy \end{aligned} \quad (i)$$

Θέτοντας

$$t = \frac{1}{\sqrt{y}} = y^{-\frac{1}{2}}$$

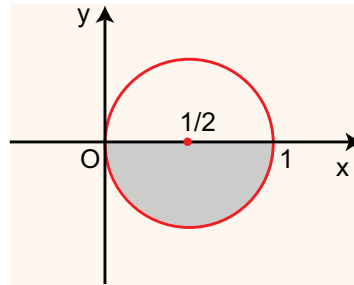
$$dt = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} dy \Leftrightarrow y^{-\frac{3}{2}} dy = -2dt$$

οπότε

$$\begin{aligned} - \int_1^2 e^{\frac{1}{\sqrt{y}}} y^{-\frac{3}{2}} dy &= \frac{1}{2} \int_1^{2^{-\frac{1}{2}}} e^t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[e^t \right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - e \right) \end{aligned}$$

Έτσι η (i) δίνει

$$I = -2e \left(2^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - e \right) = 1,247$$

Άσκηση 4.29**Σχήμα 4.29** Το χωρίο της Άσκησης 4.29

Θέτοντας $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$ στην εξίσωση του χωρίου προκύπτει

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r \cos \theta \Leftrightarrow r^2 = r \cos \theta \Leftrightarrow r = \cos \theta,$$

οπότε το χωρίο σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$D' = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \right\}$$

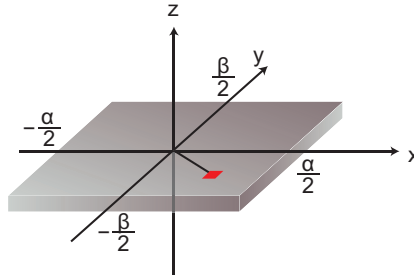
$$\begin{aligned} m &= \iint_D \sigma dx dy = \iint_{D'} k |r \sin \theta| r dr d\theta \\ &= k \int_{-\pi/2}^0 |\sin \theta| \left(\int_0^{\cos \theta} r^2 dr \right) d\theta \\ &= k \int_{-\pi/2}^0 (-\sin \theta) \frac{1}{3} \cos^3 \theta d\theta \\ &= -\frac{k}{3} \int_{-\pi/2}^0 \sin \theta \cos^3 \theta d\theta \\ &= -\frac{k}{3} \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{k}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{m} \iint_D x \sigma dx dy = \frac{1}{m} \iint_{D'} r \cos \theta k |r \sin \theta| r dr d\theta \\ &= \frac{k}{m} \int_{-\pi/2}^0 \cos \theta (-\sin \theta) \left(\int_0^{\cos \theta} r^3 dr \right) d\theta \\ &= -\frac{k}{m} \int_{-\pi/2}^0 \cos \theta \sin \theta \frac{1}{4} \cos^4 \theta d\theta \\ &= -\frac{k}{4m} \int_{-\pi/2}^0 \cos^5 \theta \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{k}{4} \frac{k}{12} \left(-\frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_c &= \frac{1}{m} \iint_D y \sigma dx dy = \frac{1}{m} \iint_{D'} r \sin \theta k |r \sin \theta| r dr d\theta \\
&= \frac{k}{m} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin^2 \theta) \left(\int_0^{\cos \theta} r^3 dr \right) d\theta \\
&= -\frac{k}{m} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \theta \frac{1}{4} (\cos \theta)^4 d\theta \\
&= -\frac{k}{4m} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^4 \theta \sin^2 \theta d\theta \\
&= -\frac{k}{4} \frac{\pi}{32} \\
&= -\frac{3\pi}{32}
\end{aligned}$$

Επομένως, το κέντρο μάζας του χωρίου είναι το σημείο

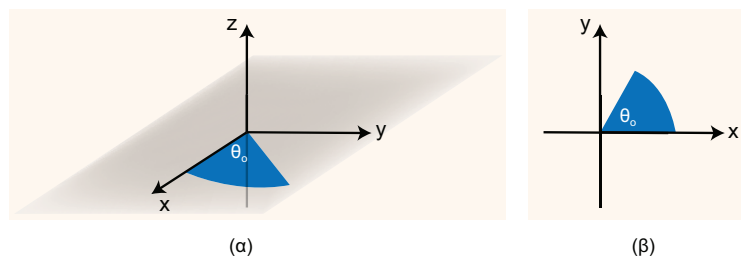
$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3\pi}{32} \right)$$

Άσκηση 4.30**Σχήμα 4.30** Το χωρίο της Άσκησης 4.30

Η απόσταση ενός στοιχειώδους τμήματος της πλάκας στη θέση (x, y) απέχει από τον άξονα αυτό απόσταση $\sqrt{x^2 + y^2}$, οπότε η ροπή αδράνειας της πλάκας ως προς τον άξονα αυτό είναι

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D \sigma_0 (x^2 + y^2) dx dy \\
 &= \sigma_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) dy \right] dx \\
 &= \sigma_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \\
 &= \sigma_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\beta x^2 + \frac{\beta^3}{12} \right) dx \\
 &= \sigma_0 \left(\frac{\beta}{3} [x^3]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} + \frac{\beta^3}{12} [x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \right) \\
 &= \sigma_0 \left(\frac{a^3 \beta}{12} + \frac{a \beta^3}{12} \right) \\
 &= \frac{1}{12} \sigma_0 a \beta (a^2 + \beta^2) \\
 &= \frac{1}{2} m (a^2 + \beta^2)
 \end{aligned}$$

όπου $m = \sigma_0 a \beta$ η μάζα της πλάκας.

Άσκηση 4.31**Σχήμα 4.31** Το χωρίο της Άσκησης 4.31

Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3, η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z του Σχήματος 4.31 είναι

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) \sigma_0 dx dy$$

οπότε θεωρώντας πολικές συντεταγμένες $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$ στις οποίες το χωρίο D είναι

$$D' = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R \text{ και } 0 \leq \theta \leq \theta_0\}$$

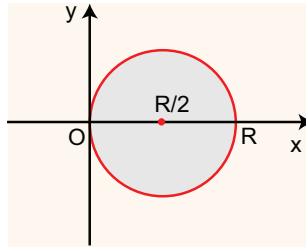
$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} r^2 \sigma_0 r dr d\theta = \sigma_0 \int_0^{\theta_0} d\theta \int_0^R r^3 dr \\ &= \sigma_0 \theta_0 \frac{R^4}{4} \end{aligned}$$

Άσκηση 4.32**Λύση**

Επειδή

$$x^2 + y^2 = Rx \Leftrightarrow \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

το D είναι εσωτερικό κύκλου (βλ. Σχήμα 4.32) με κέντρο το $K\left(\frac{R}{2}, 0\right)$ και ακτίνα $\frac{R}{2}$,

**Σχήμα 4.32** Το χωρίο της Άσκησης 4.32

Σε πολικές συντεταγμένες

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 0 \leq r \leq \frac{R}{2}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

η εξίσωση του χωρίου γίνεται

$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \leq Rr \cos \theta \Leftrightarrow r \leq R \cos \theta,$$

Άρα, το χωρίο D σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$D' = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq R \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

(διότι $r = R \cos \theta \geq 0$, για $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

Έτσι,

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \iint_D \sigma dx dy = \iint_{D'} k \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\theta \\ &= k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - r^2} r dr \right] d\theta \\ &= k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2} \frac{2}{3} \left[\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^{R \cos \theta} d\theta \\ &= -\frac{k}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \theta} - \sqrt{R^2} \right) d\theta \\ &= -\frac{k}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R \sin \theta - R) d\theta \\ &= \frac{kR}{3} [\cos \theta + \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{\pi k R}{3} \end{aligned}$$