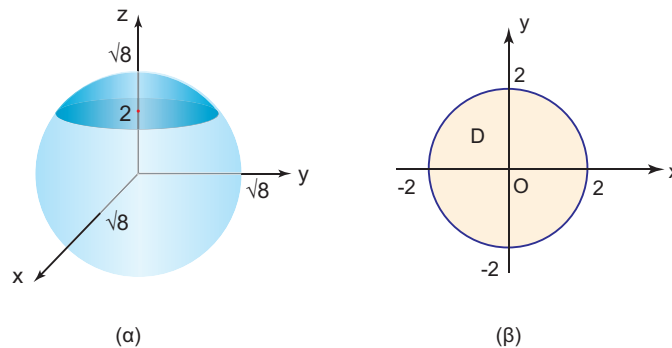


Κεφάλαιο 5

Τριπλά ολοκληρώματα

Άσκηση 5.1



Σχήμα 5.1

Το χωρίο αυτό γράφεται

$$A = \left\{ (x, y, z), \quad 2 \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D \right\} \quad (i)$$

όπου D η προβολή του A στο επίπεδο xy , που προκύπτει απαλείφοντας το z από τις

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8 \quad \text{και} \quad z = 2$$

Άρα, για το D ισχύει

$$x^2 + y^2 + 2^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4,$$

οπότε το D είναι το εσωτερικό του κύκλου στο επίπεδο xy που έχει κέντρο το O και ακτίνα 2. Από την (i) φαίνεται ότι το A είναι απλό ως προς z , οπότε ο όγκος του είναι

$$\begin{aligned} V &= \iiint_A dx dy dz \\ &= \iint_D \left(\int_2^{\sqrt{8-x^2-y^2}} dz \right) dx dy \\ &= \iint_D \left(\sqrt{8-x^2-y^2} - 2 \right) dx dy \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

$$x = r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = r \sin \theta$$

το χωρίο D γίνεται

$$D' = \{ (r, \theta) : \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \text{και} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \},$$

οπότε

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D'} (\sqrt{8-r^2} - 2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\sqrt{8-r^2} - 2) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\pi - 2) d\theta \\ &= 2\pi(\pi - 2) \end{aligned}$$

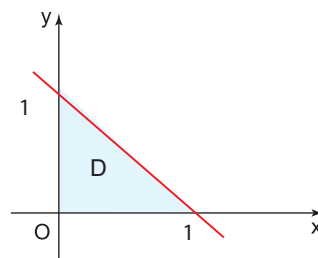
Άσκηση 5.2

Το χωρίο A είναι απλό ως προς z , οπότε

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left[\int_0^{(2-x^2)} (2-z) dz \right] dx dy \\ &= \iint_D \left[2z - \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x^2} dx dy \\ &= \iint_D \left[2(2-x^2) - \frac{1}{2}(2-x^2)^2 \right] dx dy \\ &= \iint_D \left(2 - \frac{1}{2}x^4 \right) dx dy \end{aligned}$$

όπου D η προβολή του A στο επίπεδο xy , η οποία περικλείεται από τις γραμμές (βλ. Σχήμα 5.2)

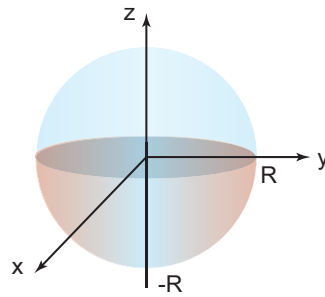
$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{και} \quad x + y = 1$$



Σχήμα 5.2

Το χωρίο D είναι απλό ως προς y , οπότε (βλ. Σχήμα 5.2)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(2 - \frac{1}{2}x^4 \right) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{2}x^4 \right) (1-x) dx \\ &= \frac{59}{60}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5.3**Σχήμα 5.3**

Από τον ορισμό των σφαιρικών συντεταγμένων φαίνεται ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες το χωρίο A είναι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

$$A' = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leq r \leq R, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \iiint_{A'} y dx dy dz &= \iiint_{A'} r \sin \theta \sin \varphi r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^R r^3 dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

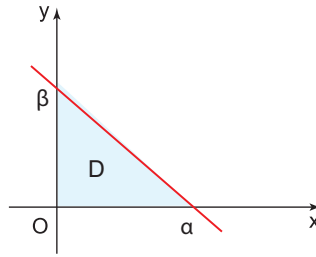
αφού $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$.

Άσκηση 5.4

Το χωρίο A είναι απλό ως προς z , οπότε

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left[\int_0^{\gamma(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{\beta})} z dz \right] dx dy \\ &= \iint_D \frac{1}{2} [z^2]_0^{\gamma(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{\beta})} dx dy \\ &= \frac{\gamma^2}{2} \iint_D \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{\beta} \right)^2 dx dy \end{aligned}$$

όπου D η προβολή του χωρίου A στο επίπεδο xy (βλ. Σχήμα 5.4).



Σχήμα 5.4

Το D είναι απλό ως προς y , οπότε

$$\begin{aligned} I &= \frac{\gamma^2}{2} \int_0^a \left[\int_0^{\beta(1-\frac{x}{a})} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{\beta} \right)^2 dy \right] dx \\ &= \frac{\gamma^2}{2} \int_0^a -\frac{\beta}{3} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^3 dx \\ &= \frac{\beta\gamma^2}{6} \frac{a}{4} = \frac{a\beta\gamma^2}{24} \end{aligned}$$

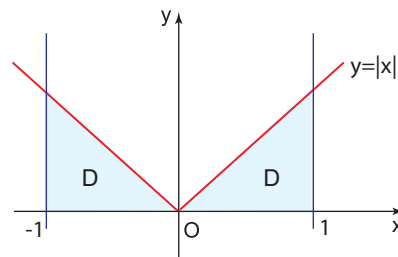
Άσκηση 5.6

Το χωρίο A είναι απλό ως προς z , οπότε

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \int_0^1 (x+y+z) dz dx dy \\ &= \iint_D \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 dx dy \\ &= \iint_D \left(x+y + \frac{1}{2} \right) dx dy \end{aligned}$$

όπου D η προβολή του A στο επίπεδο xy , η οποία περικλείεται από τις γραμμές (βλέπε Σχήμα 5.6)

$$x = -1, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = x \text{ και } y = -x$$



Σχήμα 5.6

Από το Σχήμα 5.6 φαίνεται ότι

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = \iint_{D_1} \left(x+y + \frac{1}{2} \right) dx dy + \iint_{D_2} \left(x+y + \frac{1}{2} \right) dx dy \\ &= \int_{-1}^0 \left[\int_0^{-x} \left(x+y + \frac{1}{2} \right) dy \right] dx + \int_0^1 \left[\int_0^x \left(x+y + \frac{1}{2} \right) dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= \frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.7**Λύση**

Επειδή το χωρίο A περικλείεται από τα παραβολοειδή

$$z = 4 - x^2 - y^2 \quad \text{και} \quad z = 2(x^2 + y^2 - 4)$$

το A γράφεται ως

$$A = \{(x, y, z) : 2(x^2 + y^2 - 4) \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, (x, y) \in D\},$$

και είναι απλό ως προς z .

Έτσι,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_A dx dy dz \\ &= \iint_D \left(\int_{2(x^2+y^2-4)}^{4-x^2-y^2} dz \right) dx dy \\ &= \iint_D [4 - x^2 - y^2 - 2(x^2 + y^2 - 4)] dx dy \end{aligned} \quad (i)$$

Στην περίπτωση αυτή η προβολή D του A στο επίπεδο xy είναι το χωρίο που περικλείεται από την προβολή στο επίπεδο xy της γραμμής με εξισώσεις

$$z = 2(x^2 + y^2 - 4) \quad \text{και} \quad z = 4 - x^2 - y^2 \quad (ii)$$

κατά την οποία τέμνονται τα παραβολοειδή.

Η εξίσωση της προβολής στο επίπεδο xy της γραμμής αυτής προκύπτει απαλείφοντας το z από τις (ii). Έτσι, προκύπτει

$$2(x^2 + y^2 - 4) = 4 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow 3(x^2 + y^2) = 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4,$$

οπότε το χωρίο D είναι το εσωτερικό του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

Έτσι, υπολογίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα της (i)

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (4 - r^2 - 2r^2 + 8) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (12 - 3r^2) dr \\ &= 2\pi \cdot 16 = 32\pi \end{aligned}$$

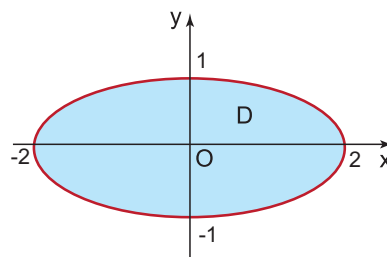
Άσκηση 5.8

Επειδή το A είναι απλό ως προς z ,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_A dx dy dz \\ &= \iint_D \left[\int_1^{(12-3x-4y)} dz \right] dx dy \\ &= \iint_D (12 - 3x - 4y - 1) dx dy, \end{aligned}$$

όπου D το εσωτερικό της έλλειψης (βλ. Σχήμα 5.8)

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$$



Σχήμα 5.8

Χρησιμοποιώντας ελλειπτικές συντεταγμένες

$$x = 2r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

το D γίνεται το ορθογώνιο

$$D' = \{(r, \theta) : 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\},$$

οπότε (η Ιακωβιανή των σχέσεων που δίνουν αυτές τις ελλειπτικές συντεταγμένες είναι $2 \cdot 1r = 2r$)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} (11 - 6r \cos \theta - 4r \sin \theta) 2r d\theta \right] dr \\ &= \int_0^1 44\pi r dr \\ &= 22\pi \end{aligned}$$

(αφού $\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$).

Άσκηση 5.9

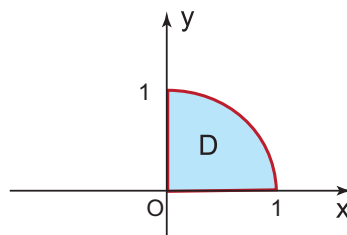
Το A είναι απλό ως προς z , οπότε ο όγκος του είναι

$$\begin{aligned} V &= \iiint_A dx dy dz \\ &= \iint_D \left[\int_0^{(x^2+y^2)} dz \right] dx dy \\ &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \end{aligned}$$

όπου D η προβολή στο επίπεδο xy , η οποία περικλείεται από τις γραμμές

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x > 0, \quad y > 0$$

οπότε είναι τεταρτοκύκλιο ακτίνας 1 με κέντρο την αρχή των αξόνων (στο α' τεταρτημόριο) (βλ. Σχήμα 5.9)



Σχήμα 5.9

Έτσι, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

το D είναι το ορθογώνιο

$$D' = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 r^2 r dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\theta \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \frac{1}{4} = \frac{\pi^4}{32} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.10

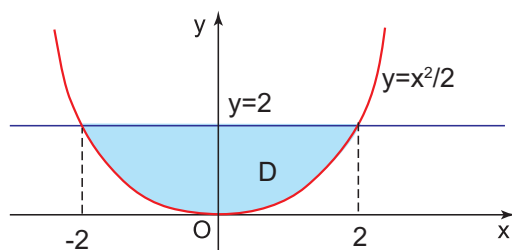
Το χωρίο αυτό είναι απλό ως προς z , οπότε

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_A dx dy dz \\
 &= \iint_D \left[\int_0^{(4-y^2)} dz \right] dx dy \\
 &= \iint_D (4-y^2) dx dy,
 \end{aligned} \tag{i}$$

όπου D το χωρίο του επιπέδου xy που περικλείεται από τις γραμμές

$$y = \frac{x^2}{2} \quad \text{και} \quad 4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2$$

όπου η $4 - y^2 = 0$ προκύπτει απαλείφοντας το z από τις εξισώσεις των δύο επιφανειών.

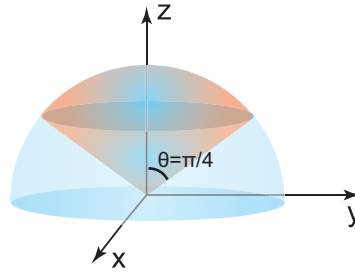


Σχήμα 5.10

Το D είναι απλό ως προς y , οπότε σύμφωνα με το Σχήμα 5.10

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-2}^2 \left[\int_{\frac{x^2}{2}}^2 (4-y^2) dy \right] dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left(\frac{x^6}{24} - 2x^2 + \frac{16}{3} \right) dx \\
 &= \frac{256}{51}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.11



Σχήμα 5.11

Η μάζα του χωρίου αυτού είναι

$$m = \iiint_A \rho dx dy dz = \iiint_A k z dx dy dz \quad (i)$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες το χωρίο αυτό είναι (αφού το ημιάνοιγμα του κώνου είναι $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$)

$$A = \left\{ (r, \theta, \varphi) : 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{και} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\},$$

οπότε χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες η (i) δίνει

$$\begin{aligned} m &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^a r \cos \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^a r^3 dr \\ &= k 2\pi \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\theta d\theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a \\ &= \frac{k\pi}{2} [-\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4}{4} \\ &= \frac{k\pi a^4}{8} \left(-\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + \cos \theta \right) \\ &= \frac{k\pi a^4}{8} \\ \iiint_A x dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^a r \sin \theta \cos \varphi k r \cos \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= k \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^a r^4 dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

αφού $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$
Επίσης,

$$\begin{aligned} \iiint_A y dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^a r \sin \theta \sin \varphi k r \cos \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= k \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^a r^4 dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

αφού $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$

$$\begin{aligned}
\iiint_A z \rho dx dy dz &= \iiint k z^2 dx dy dz \\
&= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^a (r \cos \theta)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
&= k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^a r^4 dr \\
&= k 2\pi \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -t^2 dt \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^a \\
&= 2k\pi \left[-\frac{t^3}{3} \right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{a^5}{5} \\
&= \frac{2k\pi a^5}{15} \left[-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - (-1) \right] \\
&= \frac{2k\pi a^5}{15} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)
\end{aligned}$$

’ρα, το κέντρο μάζας του χωρίου αυτού έχει συντεταγμένες

$$x_c = 0, \quad y_c = 0$$

και

$$\begin{aligned}
z_c &= \frac{\iiint_A z \rho dx dy dz}{m} \\
&= \frac{\frac{2k\pi a^5}{15} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)}{\frac{k\pi a^4}{8}} \\
&= \frac{16}{15} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) a
\end{aligned}$$

οπότε είναι το σημείο

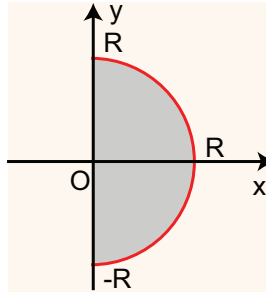
$$\left(0, 0, \frac{16}{15} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) a \right).$$

Άσκηση 5.12

$$V = \iiint_A dx dy dz$$

όπου

$$A = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq \frac{x^3}{a^2} \text{ και } (x, y) \in D \right\}$$



Σχήμα 5.12

Το χωρίο D (προβολή του A στο επίπεδο xy) περικλείεται από τον κύκλο (βλ. Σχήμα 5.12)

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad \text{με } x \geq 0,$$

οπότε σε πολικές συντεταγμένες το D γράφεται

$$D' = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq R \text{ και } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Έτσι, το A είναι απλό ως προς z , οπότε

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left(\int_0^{\frac{x^3}{a^2}} dz \right) dx dy \\ &= \iint_D \frac{x^3}{a^2} dx dy \\ &= \frac{1}{a^2} \iint_{D'} (r \cos \theta)^3 r dr d\theta \\ &= \frac{1}{a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{4}{3} \frac{R^5}{5} = \frac{4R^5}{15a^2} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.13

Χρησιμοποιώντας ελλειπτικές συντεταγμένες

$$x = ar \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \beta r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \gamma ar \cos \theta, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

μάζα του ελλειψοειδούς A είναι

$$\begin{aligned} m &= \iiint_A \rho_0 dx dy dz \\ &= \rho_0 \iiint_{A'} \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \rho_0 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \int_0^1 a\beta\gamma r^2 \sin \theta dr \right) d\theta d\varphi \\ &= \rho_0 a\beta\gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 dr \\ &= \rho_0 a\beta\gamma \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \rho_0 \\ &= \frac{4\pi}{3} a\beta\gamma. \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} I_0 &= \iiint_A (x^2 + y^2 + z^2) \rho_0 dx dy dz \\ &= \rho_0 \iiint_{A'} r^2 a\beta\gamma r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \rho_0 a\beta\gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 r^4 dr \\ &= \rho_0 a\beta\gamma 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{4\pi}{5} \rho_0 a\beta\gamma \end{aligned}$$

Άσκηση 5.14

Το χωρίο A γράφεται

$$A = \{(x, y, z) : 0 < z < xy, \quad x, y \in D\},$$

οπότε είναι απλό ως προς z . Έτσι

$$\begin{aligned} V &= \iiint_A dx dy dz \\ &= \iint_D \left(\int_0^{xy} dz \right) dx dy \\ &= \iint_D xy dx dy \end{aligned} \tag{i}$$

Το χωρίο D του επιπέδου xy περικλείεται από:

► Τη γραμμή (ευθεία)

$$x + y = 2$$

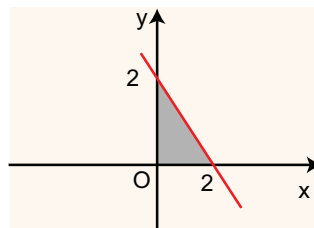
► Τις γραμμές που προκύπτουν απαλείφοντας το z από τις επιφάνειες

$$z = xy \quad \text{και} \quad z = 0$$

δηλαδή

$$xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad y = 0.$$

Έτσι, προκύπτει το χωρίο D του Σχήματος 5.14.



Σχήμα 5.14

Το D γράφεται

$$D = \{(x, y) : 0 < y < 2 - x, \quad 0 < x < 2\}$$

οπότε είναι απλό ως προς y . Έτσι, η (i) δίνει

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 x \left(\int_0^{2-x} y dy \right) dx \\ &= \int_0^2 x \frac{(2-x)^2}{2} dx \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.16

Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες r, θ, φ με

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta + 1$$

στις οποίες το υπόριζο του παρονομαστή γίνεται r^2 , η εξίσωση σφαίρας δίνει

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos \theta + 1 + 2r \cos \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow r^2 = -2r \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow r = -2 \cos \theta$$

οπότε το χωρίο A στις συντεταγμένες αυτές γίνεται

$$D' = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leq r \leq -2 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

Έτσι, από την Παρατήρηση 5.5, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{D'} \frac{1}{\sqrt{r^2}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left[\int_0^{-2 \cos \theta} r \sin \theta dr \right] d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{2} [r^2]_0^{-2 \cos \theta} d\theta \\ &= 4\pi \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= 4\pi \int_1^{-1} t^2 (-dt) \\ &= 4\pi \frac{2}{3} = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.17

Το χωρίο A γράφεται

$$A = \left\{ (x, y, z) : 1 - y < z < \sqrt{5 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D \right\}$$

όπου D η προβολή του στο επίπεδο xy . Έτσι, το A είναι απλό ως προς z , οπότε

$$\begin{aligned} I &= \iiint_A xz dx dy dz \\ &= \iint_D \left(\int_{1-y}^{\sqrt{5-x^2-y^2}} xz dz \right) dx dy \\ &= \iint_D x \left[\frac{z^2}{2} \right]_{1-y}^{\sqrt{5-x^2-y^2}} \\ &= \frac{1}{2} \iint_D x [5 - x^2 - y^2 - (1 - y)^2] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D x(4 - x^2 - 2y^2 + 2y) dx dy \end{aligned}$$

Το χωρίο D περικλείεται από τη γραμμή του επιπέδου xy που προκύπτει απαλείφοντας το z από τις επιφάνειες

$$y + z = 1 \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 5,$$

οπότε προκύπτει

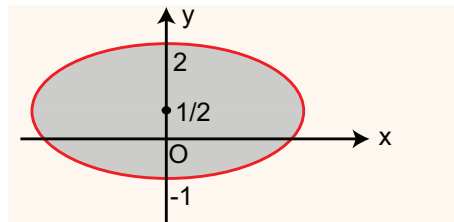
$$x^2 + y^2 + (1 - y)^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2y^2 - 2y + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2\left[y^2 - 2\frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = 4 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \quad (ii)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$$

Άρα, το D είναι το εσωτερικό της έλλειψης (ii) του Σχήματος 5.17.



Σχήμα 5.17

οπότε χρησιμοποιούμε ελλειπτικές συντεταγμένες

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}} r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = \frac{3}{2} r \sin \theta + \frac{1}{2}$$

στις οποίες D γράφεται

$$D' = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{2}} r \cos \theta \left[4 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}} r \cos \theta \right)^2 - 2 \left(\frac{3}{2} r \sin \theta + \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{3}{2} r \sin \theta + \frac{1}{2} \right) \right] \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{3}{2} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{3}{2} \frac{4}{15} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.18

Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες r, θ, φ , όπου

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

το χωρίο αυτό γράφεται

$$A' = \left\{ (r, \theta, \varphi) : R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{A'} (r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \iiint_{A'} r^4 \sin^3 \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \int_{R_1}^{R_2} r^4 dr \\ &= 2\pi \frac{2}{3} \frac{1}{5} (R_2^5 - R_1^5) \\ &= \frac{4\pi(R_2^5 - R_1^5)}{15} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.19

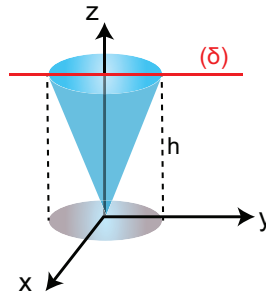
$$\begin{aligned}
m &= \iiint_A \rho dx dy dz \\
&= \iiint_{A'} k |r \sin \theta \cos \varphi r \sin \theta \sin \varphi| r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
&= k \int_0^{2\pi} |\cos \varphi \sin \varphi| d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr \\
&= k 2 \cdot \frac{2}{3} \frac{R^5}{5} = \frac{4kR^5}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_c &= \frac{1}{m} \iiint_A x \rho dx dy dz \\
&= \frac{1}{m} \iiint_{A'} r \sin \theta \cos \varphi k |r \sin \theta \cos \varphi r \sin \theta \sin \varphi| r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
&= \frac{k}{m} \int_0^{2\pi} |\cos \varphi \sin \varphi| \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta \int_0^R r^5 dr \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_c &= \frac{1}{m} \iiint_A y \rho dx dy dz \\
&= \frac{1}{m} \iiint_{A'} r \sin \theta \sin \varphi k |r \sin \theta \cos \varphi r \sin \theta \sin \varphi| r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
&= \frac{k}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos \varphi \sin \varphi| \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta \int_0^R r^5 dr \\
&= 0
\end{aligned}$$

(Θέτοντας $t = \cos \varphi$ ή $t = \sin \varphi$ τα παραπάνω ολοκληρώματα ως προς φ προκύπτουν μηδέν, αφού τα δύο όρια τους είναι ίσα).

Άσκηση 5.20



Σχήμα 5.20

Το τετράγωνο της απόστασης ενός σημείου $P(x, y, z)$ από την ευθεία (δ) ($x = 0, z = h$) είναι

$$d^2 = x^2 + (h - z)^2$$

οπότε η ροπή αδράνειας του κώνου Ω ως προς την (δ) είναι (ρ η σταθερή πυκνότητα)

$$I = \iiint_{\Omega} [x^2 + (h - z)^2] \rho dx dy dz \quad (i)$$

όπου

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h, (x, y) \in D \right\}$$

το απλό ως προς z χωρίο και D η προβολή του Ω στο επίπεδο x, y που είναι ο κύκλος

$$D = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2 \}$$

που σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$D' = \{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi \}$$

Έτσι, η (i) γίνεται

$$\begin{aligned} I &= \rho \iint_D \left(\int_{\frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}}^h [x^2 + (h - z)^2] dz \right) dx dy \\ &= \rho \iint_D \left(\int_{\frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}}^h (x^2 + h^2 - 2hz + z^2) dz \right) dx dy \\ &= \rho \iint_D \left[(x^2 + h^2)z - hz^2 + \frac{z^3}{3} \right]_{\frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}}^h dx dy \\ &= \rho \iint_D \left\{ (x^2 + h^2) \left(h - \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \right) - x \left[h^2 - \frac{h^2}{R^2} (x^2 + y^2) \right] + \frac{1}{3} \left[h^3 - \frac{h^3}{R^3} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \right] \right\} dx dy \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned}
I &= \rho \iint_{D'} \left[(r^2 \cos^2 \theta + h^2) \left(h - \frac{h}{R} r \right) - r \cos \theta \left(h^2 - \frac{h^2}{R^2} r^2 \right) + \frac{1}{3} \left(h^3 + \frac{h^3}{R^3} r^3 \right) \right] r dr d\theta \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \left(h \cos^2 \theta r^3 - \frac{h}{R} \cos^2 \theta r^4 + h^3 r - \frac{h^3}{R} r^2 - h^2 \cos \theta r^2 + \frac{h^2}{R^2} \cos \theta r^4 + \frac{1}{3} h^3 r + \frac{h^3}{3R^3} r^4 \right) dr \right] d\theta \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \left(h \cos^2 \theta \frac{R^4}{4} - \frac{h}{R} \cos^2 \theta \frac{R^5}{5} + h^3 \frac{R^2}{2} - \frac{h^3}{R} \frac{R^3}{3} - h^2 \cos \theta \frac{R^3}{3} + \frac{h^2}{R^2} \cos \theta \frac{R^5}{5} + \frac{h^3 R^2}{6} + \frac{h^3}{R^3} \frac{R^5}{15} \right) d\theta \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \left[\frac{hR^4}{20} \cos^2 \theta + \frac{6}{15} h^3 R^2 - \frac{2}{15} h^2 R^3 \cos \theta \right] d\theta \\
&= \rho \left[\frac{hR^4}{20} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \frac{6}{15} h^3 R^2 \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{2}{15} h^2 R^3 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right] \\
&= \rho \left(\frac{hR^4}{20} \pi + \frac{6}{15} h^3 R^2 2\pi \right) \\
&= \frac{\rho h R^2 \pi}{5} \left(\frac{R^2}{4} + 4h^2 \right)
\end{aligned}$$

Η μάζα του κώνου είναι

$$m = \rho V = \rho \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

οπότε

$$\pi \rho h R^2 = 3m$$

Έτσι,

$$I = \frac{3m}{5} \left(\frac{R^2}{4} + 4h^2 \right)$$

Άσκηση 5.21

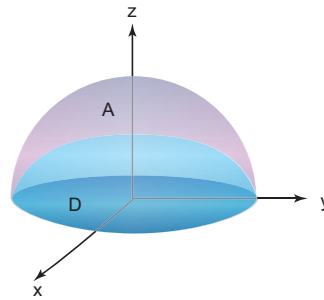
Από τον ορισμό των σφαιρικών συντεταγμένων φαίνεται ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες το χωρίο A είναι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

$$A' = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\},$$

οπότε

$$\begin{aligned} I = \iiint_{A|z|} dx dy dz &= \iiint_{A'} |r \cos \theta| r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |\cos \theta| \sin \theta d\theta \int_0^R r^3 dr \\ &= 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{R^4}{4} \\ &= \frac{\pi R^4}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.22



Σχήμα 5.22

Το χωρίο αυτό (εντός της σφαίρας και εκτός του παραβολοειδούς) γράφεται

$$A = \left\{ (x, y, z) : \frac{1}{2} \left(R - \frac{x^2 + y^2}{R} \right) \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x, y \in D \right\}$$

όπου D η προβολή του A στο επίπεδο xy , που είναι το εσωτερικό κύκλου με κέντρο το O και ακτίνα R . Το A είναι απλό ως προς z , οπότε χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος

$$\begin{aligned} V &= \iiint_A dx dy dz \\ &= \iint_D \left(\int_{\frac{1}{2} \left(R - \frac{x^2 + y^2}{R} \right)}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dz \right) dx dy \\ &= \iint_D \left[\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - \frac{1}{2} \left(R - \frac{x^2 + y^2}{R} \right) \right] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{1}{2} \left(R - \frac{r^2}{R} \right) \right] r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(r \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{R}{2} r + \frac{1}{2R} r^3 \right) dr \\ &= 2\pi \frac{5R^3}{24} = \frac{5\pi R^3}{12} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.24

Το χωρίο αυτό A είναι απλό ως προς z , οπότε

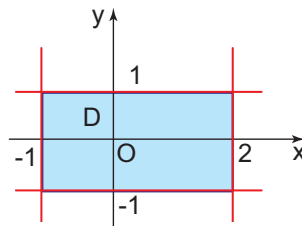
$$\begin{aligned} V &= \iiint_A dx dy dz = \iint_D \left[\int_{2+y^2}^{4-y^2} dz \right] dy dz \\ &= \iint_D [4 - y^2 - (2 + y^2)] dy dz = \iint_D (2 - 2y^2) dy dz \end{aligned} \quad (i)$$

όπου D η προβολή του A στο επίπεδο xy

Απαλείφοντας το z από τις εξισώσεις των δύο επιφανειών προκύπτει

$$4 - y^2 = 2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1,$$

οπότε ο D είναι το ορθογώνιο του Σχήματος 5.24.



Σχήμα 5.24 Το χωρίο της Άσκησης 4.24

Έτσι η (i) γίνεται

$$V = 2 \int_{-1}^2 \left[\int_{-1}^1 (1 - y^2) dy \right] dx = 2 \int_{-1}^2 \frac{4}{3} dx = 8.$$