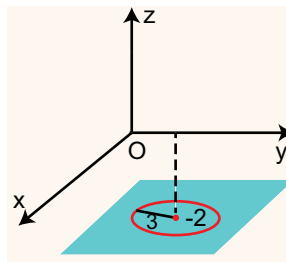


Κεφάλαιο 6

Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Άσκηση 6.1

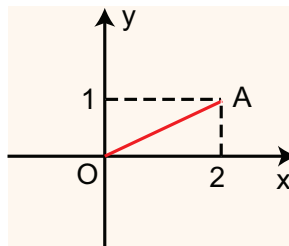


Σχήμα 6.1

$$x' = -3 \sin \theta, \quad y' = 3 \cos \theta \quad \text{και} \quad z' = 0$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_c zy ds &= \int -2 \cdot 3 \sin \theta \sqrt{(-3 \sin \theta)^2 + (3 \cos \theta)^2} d\theta \\ &= -6 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot 3\sqrt{2} d\theta = 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.2**Σχήμα 6.2**

Η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x, y)$ στο OA είναι

$$\bar{f} = \frac{1}{L} \int_{OA} f ds, \quad (i)$$

όπου, όπως προκύπτει από το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$L = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Το ευθύγραμμο τμήμα OA έχει καρτεσιανή εξίσωση

$$x = 2y, \quad 0 < y < 1$$

οπότε $x' = 2$

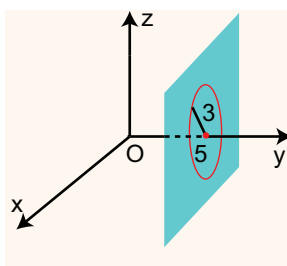
και

$$\begin{aligned} \int_{OA} f ds &= \int_0^1 f(x(y), y) \sqrt{1 + [x'(y)]^2} dy \\ &= \int_0^1 (2y + y^2) \sqrt{1 + 2^2} dy \\ &= \sqrt{5} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

Έτσι, η (i) δίνει

$$\bar{f} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{3}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{3}$$

Άσκηση 6.3



Σχήμα 6.3

Η μέση τιμή της f στον κύκλο c είναι

$$\bar{f} = \frac{1}{L} \oint_c f ds \quad (i)$$

όπου

$$L = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

το μήκος του κύκλου.

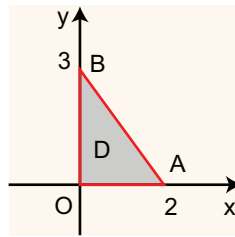
Επειδή

$$\begin{aligned} x' &= -3 \sin \theta, y' = 0 \quad \text{και} \quad z' = 3 \cos \theta \\ \oint_c f ds &= \int_0^{2\pi} (3 \sin \theta - 5) \sqrt{(-3 \sin \theta)^2 + 0^2 + (3 \cos \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (3 \sin \theta - 5) 3\sqrt{2} d\theta \\ &= 3\sqrt{2}(-10\pi) = -30\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Έτσι η (i) δίνει,

$$\bar{f} = \frac{-30\sqrt{2}\pi}{9\pi} = -\frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

Άσκηση 6.4



Σχήμα 6.4

Αν

$$\vec{F} = x\hat{j},$$

σύμφωνα με το θεώρημα Green

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(x) dx dy = \iint_D dx dy = \text{εμβαδό του } D$$

όπου D το χωρίο που περικλείεται από το c το οποίο είναι ορθογώνιο τρίγωνο εμβαδού (βλέπε σχήμα)

$$E = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3,$$

οπότε

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = 3$$

Άσκηση 6.5

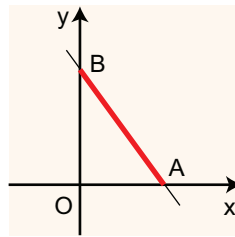
Τα σημεία Α και Β αντιστοιχούν στις τιμές $t_1 = 0$ και $t_2 = \pi$,

$$x' = -\sin t \text{ και } y' = \cos t \text{ } z' = t$$

οπότε το μήκος του τόξου ΑΒ είναι

$$\begin{aligned} L &= \int_{AB} ds = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + t^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{1 + t^2} dt \\ &= \frac{a \sinh(\pi)}{2} + \frac{\pi}{2} \sqrt{\pi^2 + 1} \end{aligned}$$

Άσκηση 6.6



Σχήμα 6.6

Επειδή η εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι

$$x = a \left(1 - \frac{y}{\beta} \right), \quad 0 \leq y \leq \beta$$

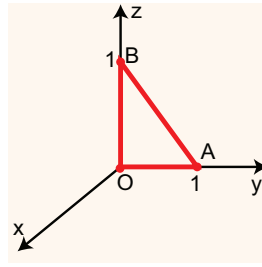
ισχύει

$$x'(y) = -\frac{a}{\beta}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_c x dy &= \int_0^\beta a \left(1 - \frac{y}{\beta} \right) \left(-\frac{a}{\beta} \right) dy \\ &= -\frac{a^2}{\beta} \int_0^\beta \left(1 - \frac{y}{\beta} \right) dy \\ &= -\frac{a^2}{\beta} \frac{\beta}{2} = -\frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 6.7



Σχήμα 6.7

$$I = \oint_C yz ds = \int_{AB} yz ds + \int_{BO} yz ds + \int_{OA} yz ds \quad (i)$$

το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει εξισώσεις

$$y + z = 1 \quad \text{και} \quad x = 0$$

οπότε έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = 0, \quad y = t \quad \text{και} \quad z = 1 - t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

οπότε για το ευθύγραμμο τμήμα AB

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{0 + 1^2 + (-1)^2} dt = \sqrt{2} dt$$

οπότε

$$\int_{AB} yz ds = \int_0^1 t(1-t)\sqrt{2} dt = \sqrt{2} \frac{1}{6}$$

Το ευθύγραμμο τμήμα BO έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

οπότε

$$\int_{BO} yz ds = \int 0 ds = 0$$

Στο ευθύγραμμο τμήμα OA, $z = 0$, οπότε

$$\int_{OA} yz ds = \int 0 ds = 0$$

Έτσι η (i) δίνει

$$I = \frac{\sqrt{2}}{6} + 0 + 0 = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Άσκηση 6.8

Το ημικύκλιο έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = a \cos \theta \quad \text{και} \quad y = a \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

οπότε

$$\dot{x} = -a \sin \theta \quad \text{και} \quad \dot{y} = a \cos \theta$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \int_c \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2} &= \int_0^\pi \frac{(a \sin \theta)^2 (-a \sin \theta) - (a \cos \theta)^2 a \cos \theta}{(a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2} d\theta \\ &= -a \int_0^\pi (\sin^3 \theta + \cos^3 \theta) d\theta \\ &= -a \cdot \frac{4}{3} = -\frac{4a}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 6.9

Σύμφωνα με το θεώρημα Green

$$I = \iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

όπου

$$\vec{F} = P(x, y) \hat{i} + Q(x, y) \hat{j}$$

διανυσματική συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (i)$$

Θέτοντας $P(x, y) = 0$ από την (i) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$Q(x, y) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + g(y) = \sqrt{x^2 + y^2} + g(y).$$

Επομένως, (θέτοντας $g(y) = 0$) για τη συνάρτηση

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y) \hat{i} + Q(x, y) \hat{j} = \sqrt{x^2 + y^2} \hat{j}$$

ισχύει

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Green,

$$I = \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D} \sqrt{x^2 + y^2} \hat{j} \cdot d\vec{r} \quad (i)$$

όπου ∂D το σύνορο του D , το αποτελείται από το τεταρτοκύκλιο c ακτίνας 1 με κέντρο την αρχή των αξόνων του οποίου παραμετρικές εξισώσεις είναι

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

με

$$\dot{x} = -\sin \theta, \quad \dot{y} = \cos \theta$$

και από τα ευθύγραμμα τμήματα

$$OA: (x, 0), \quad 0 \leq x \leq 1$$

και

$$BO: (0, y), \quad 0 \leq y \leq 1$$

Ετσι, η (i) γίνεται (για τα σημεία του τεταρτοκύκλιου c ισχύει

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

και στο OA , $dy = 0$, αφού $y = 0$)

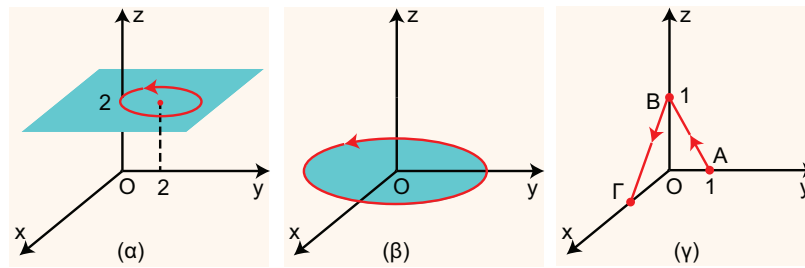
$$\begin{aligned} I &= \int_{OA} \sqrt{x^2 + y^2} \hat{j} \cdot d\vec{r} + \int_c \sqrt{x^2 + y^2} \hat{j} \cdot d\vec{r} + \int_{BO} \sqrt{x^2 + y^2} \hat{j} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{OA} \sqrt{x^2 + 0^2} dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta + \int_1^0 y dy \\ &= 0 + [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^0 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 6.10

Επειδή

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= a(1 - \cos t) \quad \text{και} \quad \dot{y} = a \sin t \\
 \int_c (2a - y)dx + (y - a)dy &= \int_0^{2\pi} \{ [2a - a(1 - \cos t)] a(1 - \cos t) + [a(1 - \cos t) - a] a \sin t \} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} [a(1 + \cos t)(1 - \cos t) - a^2 \cos t \sin t] dt \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t - \sin t \cos t) dt \\
 &= a^2 \pi
 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.11



Σχήμα 6.11

α)

$$x^2 + y^2 = 4y \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2 \cdot 2y + 2^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

οπότε ο κύκλος αυτός έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = 2 \cos \theta, \quad y = 2 + 2 \sin \theta \quad \text{και} \quad z = 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

Άρα,

$$\dot{x} = -2 \sin \theta, \quad \dot{y} = 2 \cos \theta \quad \text{και} \quad \dot{z} = 0$$

και

$$x^2 + y^2 + z^2 = (2 \cos \theta)^2 + (2 \sin \theta)^2 + 2^2 = 8$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2 \cos \theta}{8^3} (-2 \sin \theta) + \frac{(2 + 2 \sin \theta) 2 \cos \theta}{8^3} + 0 \right] d\theta \\ &= \frac{1}{128} \int_0^{2\pi} [-\cos \theta \sin \theta + (1 + \sin \theta) \cos \theta] d\theta \\ &= \frac{1}{128} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

β) Ο κύκλος αυτός έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta \quad \text{και} \quad z = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

οπότε

$$\dot{x} = -\sin \theta, \quad \dot{y} = \cos \theta \quad \text{και} \quad \dot{z} = 0$$

και

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 0 = 1.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos \theta}{1^3} (-\sin \theta) + \frac{\sin \theta}{1^3} \cos \theta + 0 \right] d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

γ) Για τη γραμμή ABΓ,

$$I = \int_{AB} \vec{F} d\vec{r} + \int_{B\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (i)$$

Το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει καρτεσιανές εξισώσεις

$$y + z = 1 \quad \text{και} \quad x = 0$$

οπότε έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = 0, \quad y = t \quad \text{και} \quad z = 1 - t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \left\{ 0 + \frac{t}{[t^2 + (1-t)^2]^3} + \frac{1-t}{[t^2 + (1-t)^2]^3} \right\} dt \\ &= \frac{3\pi}{4} + 2\end{aligned}$$

Το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ έχει καρτεσιανές εξισώσεις

$$x + z = 1 \quad \text{και} \quad y = 0,$$

οπότε έχει παραμετρικές εξισώσεις

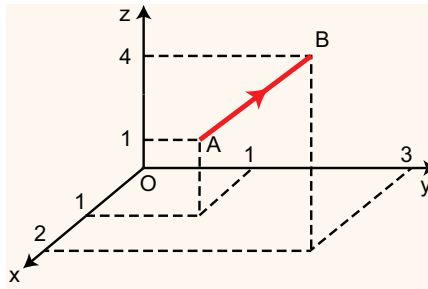
$$x = t, \quad y = 0 \quad \text{και} \quad z = 1 - t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Έτσι, όπως παραπάνω, προκύπτει

$$\int_{B\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4} + 2$$

οπότε

$$\begin{aligned}I &= \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{B\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{3\pi}{4} + 2 + \frac{3\pi}{4} + 2 = \frac{3\pi}{2} + 4\end{aligned}$$

Άσκηση 6.12**Σχήμα 6.12**

Αν $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ και $\vec{\beta} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ τα διανύσματα θέσης των σημείων A και B, το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει διανυσματική εξίσωση (βλ. Παράδειγμα 3.8)

$$\begin{aligned}\vec{r} &= t\vec{a} + (1-t)\vec{\beta}, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ &= t(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + (1-t)(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \\ &= (2-t)\hat{i} + (3-2t)\hat{j} + (4-3t)\hat{k}\end{aligned}$$

οπότε το AB έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = 2 - t, \quad y = 3 - 2t \quad \text{και} \quad z = 4 - 3t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Έτσι,

$$\dot{x} = -1, \quad \dot{y} = -2 \quad \text{και} \quad \dot{z} = -3$$

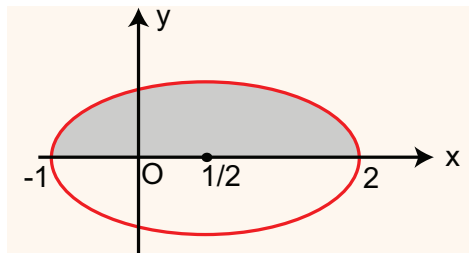
οπότε

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 [(2-t)(-1) + (3-2t)(-2) + (2-t+3-2t-1)(-3)] dt \\ &= \int_0^1 (14t - 20) dt = -13\end{aligned}$$

Άσκηση 6.13**Λύση**

Από τις καρτεσιανές εξισώσεις της γραμμής c προκύπτει

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + (1-x)^2 &= 5 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 + x^2 - 2x &= 5 \\
 &\Leftrightarrow 2(x^2 - x) + y^2 &= 4 \\
 &\Leftrightarrow 2\left[x^2 - 2\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + y^2 &= 4 + \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{9}{2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} &= 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} &= 1
 \end{aligned}$$

**Σχήμα 6.13**

Άρα, η C είναι έλλειψη του Σχήματος 6.13, οπότε έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos \theta, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \quad \text{και} \quad z = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos \theta\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

οπότε

$$\dot{x} = -\frac{3}{2} \sin \theta, \quad \dot{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \quad \text{και} \quad \dot{z} = \frac{3}{2} \sin \theta$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
 \int_c (\hat{x}i - z\hat{j}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos \theta\right) \left(-\frac{3}{2} \sin \theta\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos \theta\right) \frac{3}{2} \sin \theta \right] d\theta \\
 &= -\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

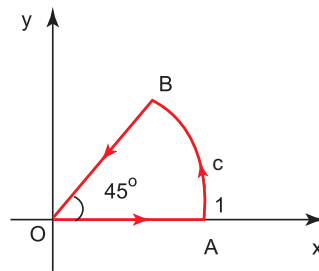
Άσκηση 6.14**Λύση**

Επειδή

$$\dot{x} = -R \sin \theta, \quad \dot{y} = R \cos \theta \quad \text{και} \quad \dot{z} = \frac{a}{\pi}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \left[R \sin \theta \cdot \frac{a\theta}{\pi} (-R \sin \theta) + \frac{a\theta}{\pi} R \cos \theta R \cos \theta + R \cos \theta R \sin \theta \frac{a}{\pi} \right] d\theta \\ &= \frac{R^2 a}{\pi} \int_0^\pi (\theta \sin^2 \theta + \theta \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{R^2 a}{\pi} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.15



Σχήμα 6.15

$$I = \int_{OA} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{BO} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (i)$$

Το ευθύγραμμο τμήμα OA έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = t \quad \text{και} \quad y = 0, \quad \text{όπου} \quad 0 \leq t \leq 1$$

οπότε

$$\dot{x} = 1 \quad \text{και} \quad \dot{y} = 0$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{OA} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 [(t \cdot 0 - t^2)1 + t^2 \cdot 0] dt \\ &= \int_0^1 -t^2 dt \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Το τόξο AB έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \cos \theta \quad \text{και} \quad y = \sin \theta, \quad \text{όπου} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

οπότε

$$\dot{x} = -\sin \theta \quad \text{και} \quad \dot{y} = \cos \theta$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta)(-\sin \theta) + \cos^2 \theta \sin \theta \cos \theta] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\cos \theta \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \sin \theta + \cos^3 \theta \sin \theta) d\theta \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{3}{16} \\ &= \frac{25}{48} - \frac{\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

Το ευθύγραμμο τμήμα BO έχει καρτεσιανή εξίσωση

$$y = x,$$

οπότε έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = t \quad \text{και} \quad y = t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Έτσι,

$$\dot{x} = 1 \quad \text{και} \quad \dot{y} = 1$$

οπότε

$$\begin{aligned}
 \int_{BO} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_1^0 [(t \cdot t - t^2) \cdot 1 + t^2 \cdot t \cdot 1] dt \\
 &= \int_1^0 t^3 = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Έτσι, η (i) δίνει

$$I = -\frac{1}{3} + \frac{25}{48} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{16} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Άσκηση 6.16

Σύμφωνα με το θεώρημα Green

$$\begin{aligned}\oint [(2xy - y)dx + x^2 dy] &= \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - y) dx dy \\ &= \iint_D [2x - (2x - 1)] dx dy \\ &= \iint_D dx dy \\ &= \text{εμβαδό του } D\end{aligned}$$

όπου D το χωρίο που περικλείει τη γραμμή c .

Άσκηση 6.17

Από τις εξισώσεις της c προκύπτει

$$x^2 + (2-x)^2 + z^2 = 2x + 2(2-x) \Leftrightarrow x^2 + 4 + x^2 - 4x + z^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x) + z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1) + z^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 + z^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1$$

οπότε η c είναι έλλειψη με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = 1 + \cos \theta, \quad y = 2 - (1 + \cos \theta) = 1 - \cos \theta, \quad z = \sqrt{2} \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

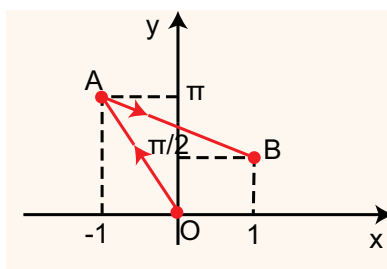
Έτσι,

$$\dot{x} = -\sin \theta, \quad \dot{y} = \sin \theta \quad \text{και} \quad \dot{z} = \sqrt{2} \cos \theta$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[(1 - \cos \theta)(-\sin \theta) + \sqrt{2} \sin \theta \sin \theta + (1 + \cos \theta)\sqrt{2} \cos \theta \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin \theta + \sin \theta \cos \theta + \sqrt{2} \sin^2 \theta + \sqrt{2} \cos \theta + \sqrt{2} \cos^2 \theta \right) d\theta \\ &= 2\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Άσκηση 6.18



Σχήμα 6.18

Επειδή

$$\frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y) = e^x \cos y$$

ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y) = -e^x \sin y,$$

οπότε η συνάρτηση

$$\vec{F} = e^x \sin y \hat{i} + e^x \cos y \hat{k},$$

είναι συντηρητική και η αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x, y, z)$ για την οποία

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U,$$

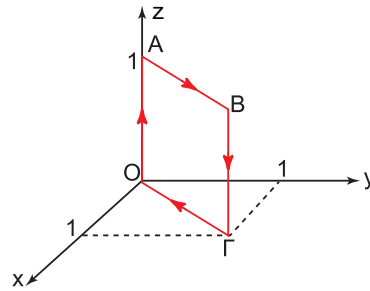
είναι η

$$\begin{aligned} U &= \int_0^x e^t \sin y dt + \int_0^y e^0 \cos t dt \\ &= [e^t]_0^x \sin y + [\sin t]_0^y \\ &= (e^x - 1) \sin y + \sin y \\ &= e^x \sin y \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{OAB} [e^x \sin y dx + e^x \cos y dy] &= \int_{OAB} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= U(B) - U(O) \\ &= e^1 \sin \frac{\pi}{2} - e^0 \sin 0 = e \sin \frac{\pi}{2} \\ &= e \end{aligned}$$

Άσκηση 6.19



Σχήμα 6.19

Το ευθύγραμμο τμήμα OA έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

οπότε

$$I_1 = \int_{OA} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 (0 + 0 + t \cdot 1) dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = t, \quad y = t, \quad z = 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

οπότε

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{z} = 0$$

και

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^1 (t \cdot 1 \cdot 1 + t \cdot t \cdot 1 + 1 \cdot 0) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Το ΒΓ έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

οπότε

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{B\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_1^0 [1 \cdot t \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + t \cdot 1] dt \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Τέλος το ΓΟ έχει εξισώσεις

$$x = t, \quad y = t, \quad z = 0, \quad 0 < t < 1$$

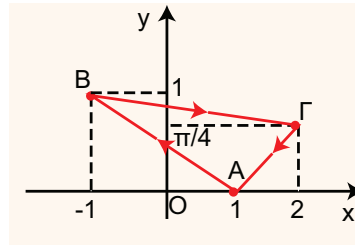
οπότε

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_1^0 (0 + t \cdot t \cdot 1 + 0) dt \\
 &= \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^0 = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
 \int \vec{F} \cdot d\vec{r} &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.20



Σχήμα 6.20

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \cos xy) = \cos xy - xy \sin xy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y \cos xy) = \cos xy - yx \sin xy$$

Θεωρώντας, λοιπόν, την κλειστή γραμμή $c = ABGA$, από το θεώρημα Green προκύπτει

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(x \cos xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y \cos xy) \right] dx dy = 0 \quad (i)$$

Επειδή

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{ABG} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{GA} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

από την (i) παίρνουμε

$$\int_{ABG} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{GA} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (ii)$$

Η ευθεία AG έχει κλίση

$$\lambda = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{2 - 1} = \frac{\pi}{4}$$

και εξίσωση

$$y - 0 = \frac{\pi}{4}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}(x - 1), \quad 1 < x < 2$$

οπότε

$$y'(x) = \frac{\pi}{4}$$

και

$$\begin{aligned} \int_{GA} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_2^1 y \cos xy dx + x \cos xy dy \\ &= \int_2^1 \left[\frac{\pi}{4}(x - 1) \cos x \left(\frac{\pi}{4}(x - 1) \right) \cdot 1 + x \cos x \left(\frac{\pi}{4}(x - 1) \right) \cdot \frac{\pi}{4} \right] dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_2^1 \left[2x \cos \left(\frac{\pi}{4}(x^2 - x) \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4}(x^2 - x) \right) \right] dx \end{aligned}$$

Εκτελώντας την εντολή αναλυτικού υπολογισμού του ολοκληρώματος αυτού

```
syms x y
int (2*x*cos (pi/4*(x^2-x)) - cos (pi/4*(x^2-x)), x, 2, 1)
```

προκύπτει

$$-4/\pi$$

οπότε

$$\int_{GA} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\pi}{4} \left(-\frac{4}{\pi} \right) = -1$$

Έτσι, από την (ii) προκύπτει

$$\int_{ABG} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{GA} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(-1) = 1$$

Β' Λύση

Επειδή

$$\frac{\partial}{\partial y} (y \cos(xy)) = \cos(xy) - xy \sin(xy)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x \cos(xy)) = \cos(xy) - xy \sin(xy),$$

ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial y} (y \cos(xy)) = \frac{\partial}{\partial x} (x \cos(xy)),$$

οπότε η συνάρτηση

$$\vec{F} = y \cos(xy) \hat{i} + x \cos(xy) \hat{k},$$

είναι συντηρητική και η αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x, y, z)$ για την οποία

$$\vec{F} = \vec{\nabla} U,$$

είναι η

$$\begin{aligned} U &= \int_0^x y \cos(yt) dt + \int_0^y 0 \cos(0t) dt \\ &= [\sin(yt)]_0^x \\ &= \sin(xy) \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{AB\Gamma} [(y \cos(xy) dx + x \cos(xy) dy] &= \int_{AB\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= U(\Gamma) - U(A) \\ &= \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \sin(1 \cdot 0) = \sin \frac{\pi}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$