

Κεφάλαιο 7

Επιφανειακά ολοκληρώματα

Άσκηση 7.2

Λύνοντας την εξίσωση της επιφάνειας ως προς z

$$z = 4 \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3} \right)$$

οπότε

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + (-2)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} dx dy \\ &= \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy \end{aligned}$$

Έτσι,

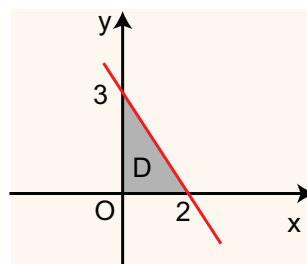
$$I = \iint_D \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) d\sigma = \iint_D \left[4 \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3} \right) + 2x + \frac{4}{3}y \right] \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy$$

όπου D η προβολή της επιφάνειας S στο επίπεδο xy που περικλείεται από τους άξονες και τη γραμμή που προκύπτει απαλείφοντας το z από τις εξισώσεις

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \quad \text{και} \quad z = 0,$$

δηλαδή την

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$



Σχήμα 7.2

Το D είναι λοιπόν το χωρίο του Σχήματος 7.2 το οποίο γράφεται

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq 3 \left(1 - \frac{x}{2} \right), 0 \leq x \leq 2 \right\}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^2 \left(\int_0^{3-\frac{3x}{2}} 4 \frac{\sqrt{61}}{3} dy \right) dx \\
 &= \int_0^2 4 \frac{\sqrt{61}}{3} \left(3 - \frac{3x}{2} \right) dx = 4\sqrt{61}
 \end{aligned}$$

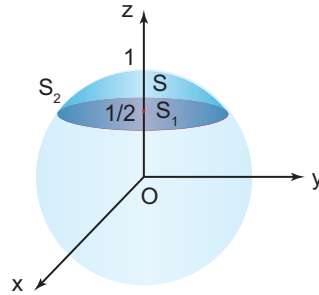
β' Λύση

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D 4 \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy \\
 &= 4 \frac{\sqrt{61}}{3} \iint_D dx dy \\
 &= 4 \frac{\sqrt{61}}{3} E(D) \\
 &= 4 \frac{\sqrt{61}}{3} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \\
 &= 4\sqrt{61}
 \end{aligned}$$

(το εμβαδόν του τριγωνικού χωρίου D είναι $E(D) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3$).

Άσκηση 7.3

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x+y) + \frac{\partial}{\partial z}(-(2xz+z)) \\ &= 2x+1-(2x+1)=0\end{aligned}$$


Σχήμα 7.3

Έτσι, θεωρώντας την κλειστή επιφάνεια $S_2 = SU S_1$ (βλ. σχήμα), όπου S_1 ο κύκλος κατά τον οποίο τέμνει τη σφαίρα το επίπεδο $z = \frac{1}{2}$, η εξίσωση του οποίου προκύπτει θέτοντας $z = \frac{1}{2}$ στην εξίσωσή της.

$$S_1 = \left\{ \left(x, y, \frac{1}{2} \right) : x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4} \right\},$$

από το θεώρημα Gauss προκύπτει

$$\oiint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_A (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dx dy dz = 0 \quad (i)$$

όπου A το χωρίο που περικλείει η S_2 . Επίσης,

$$\oiint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma},$$

οπότε από την (i) προκύπτει ότι (το μοναδιαίο κάθετο στην επίπεδη επιφάνεια S_1 είναι το $-\vec{k}$).

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} \\ &= - \iint \left[x^2 \hat{i} + (x+y) \hat{j} - \left(2x \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \hat{k} \right] \cdot (-\hat{k}) dx dy \\ &= - \iint_{S_1} \left(x + \frac{1}{2} \right) dx dy\end{aligned}$$

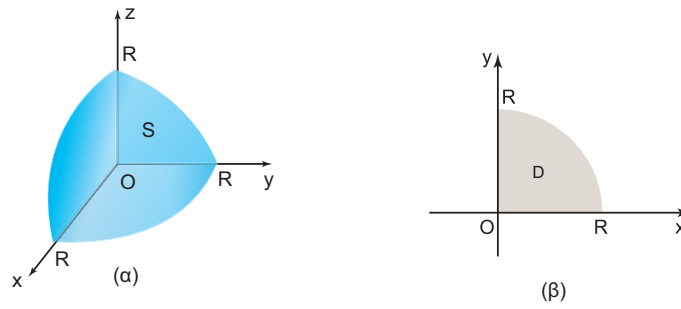
Η S_1 σε πολικές συντεταγμένες είναι (απαλείφουμε το z από την εξίσωση της σφαίρας και του επιπέδου $z = \frac{1}{2}$)

$$S_1 = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(r \cos \theta + \frac{1}{2} \right) r dr \right) d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{8} \cos \theta + \frac{3}{16} \right) d\theta \\ &= - \frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$

Άσκηση 7.4



Σχήμα 7.4

Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της σφαίρας ως προς x και y παίρνουμε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \quad \text{και} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D x \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{y}{z}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D x \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{|z|} dx dy \\ &= \iint_D \frac{Rx}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy, \end{aligned}$$

όπου D η προβολή της S στο επίπεδο xy , δηλαδή το χωρίο (α' τεταρτημόριο κύκλου στο επίπεδο xy)

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, \text{ και } y \geq 0\}$$

το οποίο σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$D' = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} I &= R \iint_{D'} \frac{R \cos \theta}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr d\theta \\ &= R \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr \\ &= 0 \cdot R = 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 7.6

Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της σφαίρας ως προς x και y παίρνουμε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \quad \text{και} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{y}{z}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{|z|} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \iint_D R dx dy = R \iint_D dx dy, \end{aligned}$$

όπου

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

η προβολή της S στο επίπεδο xy

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

$$I = R \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r dr \right) d\theta = R 2\pi \frac{R^2}{2} = \frac{2\pi R^3}{2} = \pi R^3$$

β' Λύση

$$\begin{aligned} I &= \iint_D R dx dy \\ &= R \iint_D dx dy \\ &= RE(D) \\ &= R\pi R^2 \\ &= \pi R^3 \end{aligned}$$

(το εμβαδόν του κυκλικού χωρίου D είναι $E(D) = \pi R^2$).

Άσκηση 7.7

Θεωρώντας ελλειπτικές συντεταγμένες

$$x = \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) &= (\sin \theta \cos \varphi \hat{i} + (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) \hat{j} + \hat{k}) \\ &\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2 \theta \cos \varphi \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2 \theta \sin \varphi \hat{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \theta \hat{k} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sin^3 \theta \cos^2 \varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^3 \theta \sin \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Το $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$ έχει φορά από μέσα προς τα έξω του ελλειψοειδούς, οπότε η ροή της $\vec{F}(x, y, z)$ από την επιφάνεια S είναι (βλ. Παρατήρηση 7.5)

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) \right) d\theta d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \sin^3 \theta \cos^2 \varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^3 \theta \sin \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \theta \right] d\theta \right) d\varphi \\ &= -\frac{2\pi\sqrt{3}}{9} - \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 7.8

Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες πάνω στον κύλινδρο ακτίνας R

$$r^2 = R^2 + z^2$$

οπότε, λόγω της παρατήρησης 7.3,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2 + z^2} R d\varphi \right) dz \\ &= R \int_0^a \frac{1}{R^2 + z^2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= R \frac{1}{R} \left[\tan^{-1} \frac{z}{R} \right]_0^a 2\pi \\ &= 2\pi \tan^{-1} \frac{a}{R} \end{aligned}$$

Άσκηση 7.10

α) Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες (πάνω στην S $r = R$)

$$\begin{aligned}\iint \frac{1}{r} d\sigma &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \frac{1}{R} R^2 \sin \theta d\theta \right) d\varphi \\ &= R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= R \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi R\end{aligned}$$

β) Ο κώνος αυτός γράφεται

$$z^2 = \frac{\beta^2}{a^2}(x^2 + y^2)$$

οπότε σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται

$$S = \left\{ (r, \theta_0, \varphi) : 0 \leq r \leq \sqrt{a^2 + \beta^2} \text{ και } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \theta_0 = \tan^{-1} \frac{\beta}{a} \right\}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{1}{r} d\sigma &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{a^2 + \beta^2}} \frac{1}{r} r \sin \theta_0 dr \right) d\varphi \\ &= \sin \theta_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{a^2 + \beta^2}} dr \\ &= \sin \theta_0 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{a^2 + \beta^2}\end{aligned}$$

Άσκηση 7.11

Για τη σφαίρα ισχύει (παραγωγίζοντας την εξίσωσή της)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \quad \text{και} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

οπότε

$$\begin{aligned} S_1 &= \iint_{S_1} d\sigma = \iint_{D_1} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{y}{z}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_{D_1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{\beta^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \iint_{D_1} \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - x^2 - y^2}} dx dy \end{aligned}$$

όπου D_1 η προβολή της S_1 στο επίπεδο xy , που είναι

$$D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

οπότε χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} S_1 &= \beta \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - r^2}} r dr \right) d\theta \\ &= \beta \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\beta^2}^{\beta^2 - a^2} t^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) dt \\ &= \beta 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) 2 [\sqrt{t}]_{\beta^2}^{\beta^2 - a^2} \\ &= -2\pi\beta \left(\sqrt{\beta^2 - a^2} - \sqrt{\beta^2}\right) \\ &= 2\pi \left(\beta^2 - \beta\sqrt{\beta^2 - a^2}\right) \end{aligned}$$

(θέτοντας $t = \beta^2 - a^2$). Επομένως,

$$\begin{aligned} S_2 &= 4\pi\beta^2 - S_1 = 4\pi\beta^2 - 2\pi \left(\beta^2 - \beta\sqrt{\beta^2 - a^2}\right) \\ &= 2\pi\beta \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - a^2}\right) \end{aligned}$$

Άρα, ο λόγος των εμβαδών των S_1 και S_2 είναι

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2} &= \frac{2\pi \left(\beta^2 - \beta\sqrt{\beta^2 - a^2}\right)}{2\pi\beta \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - a^2}\right)} \\ &= \frac{\beta \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - a^2}\right)}{\beta \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - a^2}\right)} \\ &= \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - a^2}}{\beta + \sqrt{\beta^2 - a^2}} \end{aligned}$$

Άσκηση 7.13

Επειδή

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 3x + 2) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(-2(x-1)z) = 2x - 3 + 1 - 2(x-1) = 0,$$

το πεδίο \vec{F} είναι ασυμπύεστο, οπότε υπάρχει διανυσματική συνάρτηση $\vec{G}(x, y, z)$ τέτοια ώστε

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{G},$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5, η συνάρτηση αυτή είναι η

$$\begin{aligned} \vec{G} &= -\vec{r} \times \int_0^1 t \vec{F}(tx, ty, tz) dt \\ &= -\vec{r} \times \int_0^1 t \left[((tx)^2 - 3tx + 2) \hat{i} + ty \hat{j} - 2(tx-1)tz \hat{k} \right] dt \\ &= -\vec{r} \times \left[\left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1 \right) \hat{i} + \frac{y}{3} \hat{j} + \left(\frac{2}{3}z - \frac{1}{2}xz \right) \hat{k} \right] \\ &= - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ \frac{1}{4}x^2 - x + 1 & \frac{y}{3} & \frac{2}{3}z - \frac{1}{2}xz \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{xyz}{2} - \frac{yz}{3} \right) \hat{i} + \left(\frac{x^2z}{4} + \frac{5xz}{3} - z \right) \hat{j} + \left(\frac{x^2y}{4} + y - \frac{4xy}{3} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

Έτσι, από το θεώρημα Stokes προκύπτει

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \cdot d\vec{\sigma} = \oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r} \quad (i)$$

όπου C η καμπύλη που περιβάλλει η S και η οποία έχει εξισώσεις

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{και} \quad z = 1 - x,$$

από τις οποίες προκύπτει

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (1-x)^2 &= 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2 \left[x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] + y^2 = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

Η καμπύλη αυτή είναι έλλειψη οπότε χρησιμοποιώντας για την C παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \quad \text{και} \quad z = 1 - x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{xyz}{2} - \frac{yz}{3} \right] \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right)' + \left[\frac{x^2 z}{4} - \frac{5xz}{3} - z \right] \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right)' \\
&\quad + \left[\frac{x^2 y}{4} + y - \frac{4xy}{3} \right] \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta \right)' \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta \right) - \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta \right) \right] \left(-\frac{1}{2} \sin \theta \right) \\
&\quad + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta \right) \right] \frac{1}{2} \cos \theta \\
&\quad + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right)^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right] \frac{1}{2} \sin \theta \\
&= \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Άσκηση 7.14

Για τη συνάρτηση

$$\vec{F} = yz\hat{i} + xz\hat{j} + xy\hat{k},$$

ισχύει

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0,$$

οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Gauss,

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dx dy dz = 0$$

όπου Ω το χωρίο που περικλείεται από την επιφάνεια S .

Άσκηση 7.15

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{8} \quad \text{και} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{2}$$

οπότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.10,

$$\begin{aligned} I = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \iint_D \left[-\frac{x}{2}\hat{i} - y\hat{j} + \left(1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4}\right)\hat{k} \right] \cdot \left(\frac{x}{8}\hat{i} + \frac{y}{2}\hat{j} + \hat{k} \right) dx dy \\ &= \iint_D \left(-\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{2} + 1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} \right) dx dy \\ &= \iint_D \left(1 - \frac{x^2}{8} - \frac{3y^2}{4} \right) dx dy \end{aligned}$$

όπου (απαλείφουμε το z από την επιφάνεια και το z_0)

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$$

Σε ελλειπτικές συντεταγμένες

$$x = 4r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = 2r \sin \theta$$

το D γράφεται

$$D' = \{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(1 - \frac{(4r \cos \theta)^2}{8} - \frac{3(2r \sin \theta)^2}{4} \right) 8r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (8r - 16r^3 \cos^2 \theta - 24r^3 \sin^2 \theta) 8r dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (64r^2 - 128r^4 - 64r^4 \sin^2 \theta) dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{64r^3}{3} - \frac{128r^5}{5} - \frac{64r^5}{5} \sin^2 \theta \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{64}{3} - \frac{128}{5} - \frac{64}{5} \sin^2 \theta \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-4,267 - 12,8 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= -8,61\pi \\ &= -27,06 \end{aligned}$$

Άσκηση 7.16

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.6,

$$\begin{aligned}
 \iint_S x^2 y^2 z dx dy &= \iint_D x^2 y^2 z \hat{k} \cdot (\sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= \iint_D x^2 y^2 z \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (R \sin \theta \cos \varphi)^2 (R \sin \theta \sin \varphi)^2 R \cos \theta \sin \theta d\theta \right) d\varphi \\
 &= R^7 \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^5 \theta \cos \theta d\theta \\
 &= R^7 \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{105} \\
 &= \frac{2\pi R^7}{105}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 7.17

Η απόκλιση της συνάρτησης

$$\vec{F} = 2xyz\hat{i} - x^2y\hat{j} + (x^2z - yz^2)\hat{k}$$

είναι

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(2xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2z - yz^2) \\ &= 2yz - x^2 + x^2 - 2yz \\ &= 0\end{aligned}$$

οπότε υπάρχει συνάρτηση $\vec{G}(x, y, z)$ με

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{F}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5,

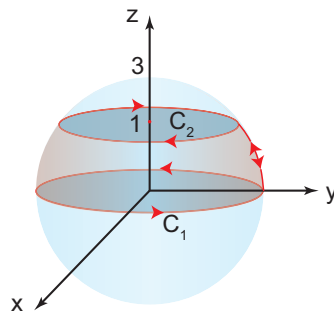
$$\begin{aligned}\vec{G} &= -\vec{r} \times \int_0^1 t \vec{F}(tx, ty, tz) dt \\ &= -\vec{r} \times \int_0^1 t (2txtytz)\hat{i} - t^2x^2ty\hat{j} + (t^2x^2tz - tyt^2z^2) dt \\ &= -\vec{r} \times \left[\frac{2}{5}xyz\hat{i} - \frac{1}{5}x^2y\hat{j} + \frac{1}{5}(x^2z - yz^2)\hat{k} \right] \\ &= - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ \frac{2}{5}xyz & -\frac{1}{5}x^2y & \frac{1}{5}(x^2z - yz^2) \end{vmatrix} \\ &= - \left[\left(\frac{2}{5}x^2yz - \frac{1}{5}y^2z^2 \right) \hat{i} + \left(\frac{3}{5}xyz^2 - \frac{1}{5}x^3z \right) \hat{j} + \left(-\frac{1}{5}x^3y - \frac{2}{5}xy^2z \right) \hat{k} \right]\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Stokes,

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \cdot d\vec{\sigma} = \oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r} \quad (i)$$

όπου C η καμπύλη στην οποία περατούται η επιφάνεια S και η οποία είναι οι κύκλοι C_1 και C_2 όπου (βλ. Παράδειγμα 7.29):

$$C_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 2, z = 0\}$$



Σχήμα 7.17

Σε πολικές συντεταγμένες

$$x = \sqrt{2} \cos \theta \quad \text{και} \quad y = \sqrt{2} \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

ο κύκλος είναι

$$C'_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq \sqrt{2}, z = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

καθώς και ο κύκλος

$$C_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$$

που σε πολικές συντεταγμένες

$$x = \cos \theta \quad \text{και} \quad y = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

είναι

$$C'_2 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, z = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Έτσι, η (i) δίνει (το – εισάγεται λόγω της αντίθετης φοράς διαγραφής του κύκλου C_2)

$$I = \oint_{C_1} \vec{G} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_2} \vec{G} \cdot d\vec{r}, \quad (ii)$$

όπου για τα δύο επικαμπύλια ολοκληρώματα οι κύκλοι διαγράφονται κατά τη θετική φορά.

Για τον κύκλο C_1 , όπου $z = 0$ και $z' = 0$, ισχύει

$$\oint_{C_1} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 0 d\theta = 0.$$

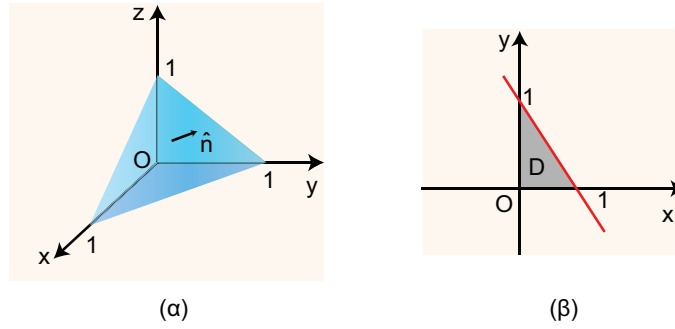
Για τον κύκλο C_2 , όπου $z = 1$, ισχύει

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \vec{G} \cdot d\vec{r} &= - \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{2}{5} \cos^2 \theta \sin \theta \cdot 1 - \frac{1}{5} y^2 \cdot 1^2 \right) (\cos \theta)' + \left(\frac{3}{5} \cos \theta \sin \theta \cdot 1^2 - \frac{1}{5} \cos^3 \theta \cdot 1 \right) (\sin \theta)' \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{5} \cos^3 \theta \sin \theta - \frac{2}{5} \cos \theta \sin^2 \theta \cdot 1 \right) (1)' \right] d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{2}{5} \cos^2 \theta \sin \theta - \frac{1}{5} y^2 \right) (-\sin \theta) + \left(\frac{3}{5} \cos \theta \sin \theta \cdot 1^2 - \frac{1}{5} \cos^3 \theta \right) (\cos \theta) \right] d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5} \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{1}{5} \sin^3 \theta - \frac{1}{5} \cos^2 \theta \right) d\theta \\ &= -\frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 0 - \frac{1}{5} \pi \\ &= -\frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

Έτσι, από την (ii) προκύπτει

$$I = -\frac{\pi}{5} - 0 = -\frac{\pi}{5}.$$

Άσκηση 7.22



Σχήμα 7.22

Ένα κάθετο διάνυσμα στο σημείο (x, y, z) της επιφάνειας S είναι το

$$\vec{n} = \vec{\nabla}g(x, y, z),$$

όπου

$$g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$$

η εξίσωσή της, οπότε

$$\vec{n} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

και

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Άρα,

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

οπότε

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = (xz\hat{i} + xy\hat{j} + yz\hat{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(xz + xy + yz)$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \iint \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) d\sigma \\ &= \iint_D \frac{1}{\sqrt{3}} [x(1-x-y) + xy + y(1-x-y)] \sqrt{3} dx dy \end{aligned} \quad (i)$$

οπότε η (i) γίνεται (αντικαθιστούμε το z από την εξίσωση $x + y + z = 1$ και $z = 0$ της S), δηλαδή τη γραμμή του επιπέδου xy

$$x + y = 1$$

κατά την οποία τέμνονται τα επίπεδα $z = 0$ και $x + y + z = 1$ καθώς και τους άξονες x και y (βλ. Σχήμα 7.22α)

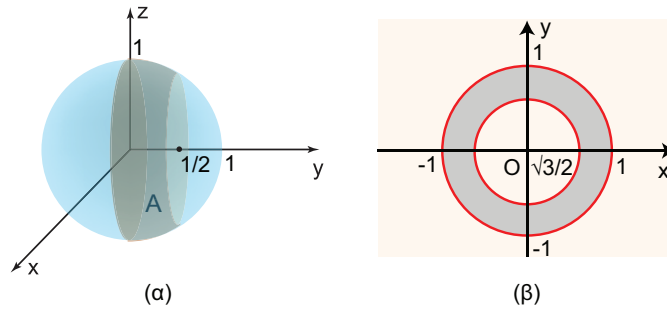
Η προβολή D της επιφάνειας στο επίπεδο xy είναι

$$D = \{(x, y) : 0 < y < 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}$$

οπότε η (i) δίνει

$$\begin{aligned}\iint \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} [x(1-x-y) + xy + y(1-x-y)] dy \right) dx \\&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} [(1-x-y)(x+y) + xy] dy \right) dx \\&= \int_0^1 (5x+1)(x-1)^2 \frac{1}{6} dx \\&= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Άσκηση 7.23



Σχήμα 7.23

Η ροή της \vec{F} από την επιφάνεια αυτή είναι

$$I = \iint_D (\vec{F} \cdot \vec{n}) dx dy \quad (i)$$

όπου

$$\vec{n} = -\frac{\partial y}{\partial x} \hat{i} + \hat{j} - \frac{\partial y}{\partial z} \hat{k}.$$

Από την εξίσωση της σφαίρας προκύπτει

$$2x + 2y \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$$

$$2z + 2y \frac{\partial y}{\partial z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{z}{y}$$

Άρα,

$$\vec{n} = \frac{x}{y} \hat{i} + \hat{j} + \frac{z}{y} \hat{k} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-z^2}} \hat{i} + \hat{j} - \frac{z}{\sqrt{1-x^2-z^2}} \hat{k}$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(x\hat{i} + \sqrt{1-x^2-z^2}\hat{j} + z\hat{k} \right) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\hat{i} + \hat{j} - \frac{z}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\hat{k} \right) dx dz \\ &= \iint_D \left(-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-z^2}} + \sqrt{1-x^2-z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{1-x^2-z^2}} \right) dx dz \\ &= \iint_D \left(-\frac{x^2+z^2}{\sqrt{1-x^2-z^2}} + \sqrt{1-x^2-z^2} \right) dx dz \end{aligned}$$

όπου D η προβολή της επιφάνειας στο επίπεδο xz .

Το χωρίο D περιβάλλεται από τις γραμμές (βλ. Σχήμα 7.236)

$$x^2 + z^2 = 1, \quad y = 0 \quad \text{και} \quad x^2 + z^2 = \frac{3}{4}$$

οπότε σε πολικές συντεταγμένες

$$x = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta$$

το χωρίο D γίνεται

$$D' = \left\{ (r, \theta) : \frac{\sqrt{3}}{2} \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left(-\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} + \sqrt{1-r^2} \right) r dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left(-\frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}} + r\sqrt{1-r^2} \right) dr \\ &= 2\pi \frac{37}{480} = \frac{37\pi}{240} \end{aligned}$$

Άσκηση 7.24

Η επιφάνεια S περικλείεται από τον κύλινδρο

$$x^2 + y^2 = R^2, \text{ το επίπεδο } z = a$$

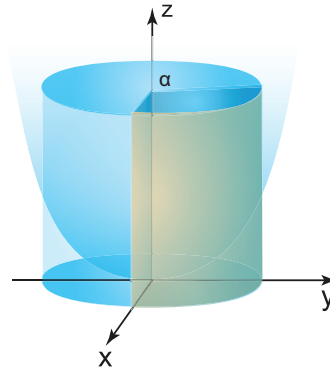
και τα συντεταγμένα επίπεδα και βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο των αξόνων, οπότε χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες, για τα σημεία της (x, y, z) ισχύει

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = z, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad 0 \leq z \leq a$$

Έτσι, σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.9,

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{e}_\rho) R d\varphi dz \\ &= \int_0^a \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos \varphi \cdot z \hat{i} + R \cos \varphi \cdot R \sin \varphi \hat{j} + R \sin \varphi \cdot z \hat{k} \right) \cdot (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}) d\varphi dz \\ &= \int_0^a \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (Rz \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi) d\varphi \right) dz \\ &= \int_0^a \left(\frac{\pi Rz}{4} + \frac{R^2}{3} \right) dz \\ &= \frac{\pi Ra^2}{8} + \frac{R^2 a}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 7.25



Σχήμα 7.25

α) Σύμφωνα με το Θεώρημα Gauss

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dx dy dz \quad (i)$$

όπου S η επιφάνεια που περικλείει το στερεό

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq a^2, \quad x \geq 0 \text{ και } y \geq 0\}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 z) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 y) = 0$$

οπότε από την (i) προκύπτει ότι

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

β) Η επιφάνεια του στερεού Ω (βλ. Σχήμα 7.25) αποτελείται από τις επιφάνειες:

► του τμήματος του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$

$$S_1 = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq a^2, \quad x \geq 0 \text{ και } y \geq 0\} \quad (i)$$

► του τμήματος του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = a^2$

$$S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2, \quad 0 \leq z \leq a, \quad x \geq 0 \text{ και } y \geq 0\} \quad (ii)$$

► του τμήματος του επιπέδου $y = 0$

$$S_3 = \{(x, z) : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1\} \quad (iii)$$

► του τμήματος του επιπέδου $x = 0$

$$S_4 = \{(0, y, z) : 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq a\} \quad (iv)$$

► του τμήματος του επιπέδου $z = 0$

$$S_5 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 < 1, \quad x > 0 \text{ και } y > 0\} \quad (v)$$

Με τον γνωστό τρόπο από την (i) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} S_1 &= \iint_{S_1} d\sigma = \iint_{S_5} \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^a \sqrt{1 + 4r^2} r dr \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{12} \left[(1 + 4a^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \\ &= \frac{\pi}{48} \left[(1 + 4a^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \end{aligned}$$

Από τις (ii) προκύπτει ότι (εμβαδόν κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας a και ύψους a^2)

$$\text{και} \quad S_2 = \frac{1}{4} 2\pi \cdot a \cdot a^2 = \frac{\pi a^3}{2}$$

Από τις (iii) και (iv) προκύπτει ότι

$$S_3 = S_4 = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

και από την (v)

$$S_5 = \frac{1}{4}\pi a^2 = \frac{\pi a^2}{4}$$

Άρα η συνολική επιφάνεια είναι

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = \frac{\pi}{48} \left[(1 + 4a^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] + \frac{\pi a^3}{2} + 2 \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{\pi a^2}{4}$$

Άσκηση 7.26

Η στροφή της \vec{F} είναι

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial y}(x^3 y^3) \hat{k} = -3x^3 y^2 \hat{k}.$$

Σύμφωνα την Παρατήρηση 7.6 για το ημισφαίριο αυτό, για τις σφαιρικές συντεταγμένες των σημείων του οποίου ισχύει

$$r = R, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \quad \text{και} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

προκύπτει

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-3x^3 y^2 \hat{k}) \cdot \hat{e}_r R^2 \sin \theta d\theta \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -3(R \sin \theta \cos \varphi)^3 (R \sin \theta \sin \varphi)^2 \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta \right) d\varphi \\ &= -3R^7 \int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^5 \theta \cos \theta d\theta \\ &= -3R^7 \cdot 0 \left(-\frac{1}{7} \right) = 0 \end{aligned}$$

Επομένως, στην περίπτωση αυτή ισχύει (λόγω του Θεωρήματος Stokes) ότι

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma} = 0.$$

Άσκηση 7.27

Η ροπή αδράνειας, ως προς τον άξονα z , του τμήματος του κώνου αυτού είναι

$$I = \iint_S (x^2 + y^2) d\sigma,$$

όπου S η επιφάνεια του κώνου $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ με $0 \leq z \leq h$.

Σύμφωνα με το παράδειγμα 7.4 χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες

$$d\sigma = r \sin \frac{\pi}{4} dr d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} r dr d\varphi$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}h} r^2 \frac{\sqrt{2}}{2} r dr \right) d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}h} r^3 dr \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}h} \\ &= \pi \sqrt{2} h^4. \end{aligned}$$

Άσκηση 7.28

Σύμφωνα με το θεώρημα Gauss αν Ω το χωρίο που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια S ,

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dx dy dz \quad (i)$$

Επειδή

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

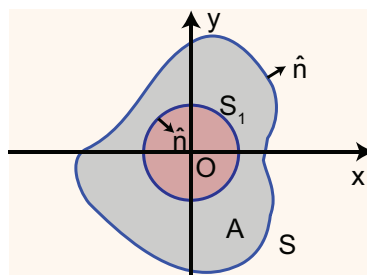
η (i) γίνεται

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{\Omega} 3 dx dy dz = 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz = 3V(\Omega)$$

όπου $V(\Omega)$ ο όγκος του χωρίου Ω .

Άσκηση 7.29

Θεωρούμε το χωρίο A που περικλείεται από την επιφάνεια S και μια σφαίρα S_1 ακτίνας R_1 που περικλείει την αρχή των αξόνων (βλέπε σχήμα 7.29).

**Σχήμα 7.29**

Το χωρίο A περιβάλλεται από την κλειστή επιφάνεια $S \cup S_1$, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Gauss

$$\oiint_{S \cup S_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_A \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dx dy dz \quad (i)$$

Η \vec{F} γράφεται

$$\vec{F} = -\frac{kr\hat{e}_r}{r^3} = -\frac{k}{r^2}\hat{e}_r$$

οπότε από την απόκλιση σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r^2 \frac{k}{r^2} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (k) = 0$$

Έτσι, από την (i) προκύπτει

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 0 \quad (ii)$$

Η ροή της $\vec{F} = \frac{k}{r^2}\hat{e}_r$ από τη σφαίρα S_1 με προσανατολισμό προς τα μέσα (για την κλειστή επιφάνεια S η θετική κάθετος είναι παντού προς τα έξω) είναι

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \iint -\frac{k}{r^2} \hat{e}_r \cdot (-\hat{e}_r) d\sigma \\ &= \frac{k}{R_1^2} \iint d\sigma \\ &= \frac{k}{R_1^2} \cdot (\text{εμβαδόν της σφαίρας}) \\ &= \frac{k}{R_1^2} 4\pi R_1^2 \\ &= 4\pi k \end{aligned}$$

Έτσι, από την (ii) προκύπτει ότι

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = -\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = -4\pi k.$$

Άσκηση 7.30

Σύμφωνα με το θεώρημα Gauss αν Ω το χωρίο που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια S ,

$$I = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dx dy dz \quad (i)$$

Επειδή

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 2x + 2y + 2z$$

η (i) γίνεται

$$I = \iiint_{\Omega} 2(x + y + z) dx dy dz \quad (ii)$$

Το χωρίο Ω (εσωτερικό κώνου) γράφεται ως

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{\beta}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \beta \right\}$$

και είναι απλό ως προς z , οπότε η (ii) γίνεται

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\int_{\frac{\beta}{a} \sqrt{x^2 + y^2}}^{\beta} 2(x + y + z) dz \right) dx dy \\ &= 2 \iint_D \left[(x + y)z + \frac{z^2}{2} \right]_{\frac{\beta}{a} \sqrt{x^2 + y^2}}^{\beta} dx dy \\ &= 2 \iint_D \left[(x + y) \left(\beta - \frac{\beta}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\beta^2 - \frac{\beta^2}{a^2} (x^2 + y^2) \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (iii)$$

όπου D η προβολή του Ω στο επίπεδο xy , η οποία είναι το χωρίο που περικλείεται από την τομή του κώνου και του επιπέδου $z = \beta$, δηλαδή της γραμμής που προκύπτει από την απαλοιφή του z από την εξίσωση του κώνου και του επιπέδου $z = \beta$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{\beta^2}{\beta^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

Επομένως,

$$D = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2 \}$$

δηλαδή το εσωτερικό κύκλου στο επίπεδο xy με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα a .

Έτσι, χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες, οπότε η (iii) γίνεται

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[(r \cos \theta + r \sin \theta) \left(\beta - \frac{\beta}{a} r \right) + \frac{1}{2} \left(\beta^2 - \frac{\beta^2}{a^2} r^2 \right) \right] r dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\left(\beta r^2 \cos \theta + \beta r^2 \sin \theta - \frac{\beta}{a} r^3 \cos \theta - \frac{\beta}{a} r^3 \sin \theta + \frac{\beta^2}{2} r + \frac{\beta^2}{2a^2} r^3 \right) \right] dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\beta \frac{a^3}{3} \cos \theta + \beta \frac{a^3}{3} \sin \theta - \frac{\beta}{a} \frac{a^4}{4} \cos \theta - \frac{\beta}{a} \frac{a^4}{4} \sin \theta + \frac{\beta^2}{2} \frac{a^2}{2} + \frac{\beta^2}{2a^2} \frac{a^4}{4} \right) d\theta \\ &= 2 \left(\frac{\beta^2}{2} \frac{a^2}{2} + \frac{\beta^2}{2a^2} \frac{a^4}{4} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2 \left(\frac{a^2 \beta^2}{4} + \frac{a^2 \beta^2}{8} \right) 2\pi \\ &= \frac{3\pi a^2 \beta^2}{2} \end{aligned}$$

(αφού $\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$)