Κεφάλαιο 4

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Λύση Άσκησης 4.1

α)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} 2e^{-x}dx = 2 \neq 1,$$

οπότε η $f(x)$ δεν μπορεί να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

β)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx = 1,$$

οπότε η $f(x)$ μπορεί να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Λύση Άσκησης 4.2

α) Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ πρέπει να είναι συνεχής, οπότε:

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^+} F(x)$$

ή

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{2} = \lim_{x\to 1}(ax+\beta)$$

ή

$$\frac{1}{2} = a + \beta \qquad (i)$$

και

$$\lim_{x\to 2^-} F(x) = \lim_{x\to 2^+} F(x)$$

ή

$$\lim_{x\to 2}(ax+\beta) = \lim_{x\to 2} 1$$

ή

$$2a + \beta = 1. \qquad (ii)$$

Από το σύστημα των (i) και (ii) προκύπτει ότι

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \beta = 0$$

β) Η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Λύση Ἀσκησης 4.3

Για τη διάμεσο δ της εκθετικής κατανομής ισχύει

$$\int_0^\delta f(x)dx = \frac{1}{2}$$

ή

$$\int_0^\delta \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx = \frac{1}{2}$$

ή

$$1 - e^{-\frac{\delta}{\theta}} = \frac{1}{2}$$

ή

$$e^{-\frac{\delta}{\theta}} = \frac{1}{2}$$

ή

$$-\frac{\delta}{\theta} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

ή

$$\delta = \theta \ln 2.$$

Λύση Άσκησης 4.4

α) Πρέπει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

ή

$$\int_{0}^{4} c(4-x)dx = 1$$

ή

$$c8 = 1 \text{ ή } c = \frac{1}{8}.$$

β) Επομένως

$$\begin{aligned} P(X > 3,3) &= \int_{3,3}^{4} f(x)dx = \int_{3,3}^{4} \frac{1}{8}(4-x)dx \\ &= 0,031. \end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 4.5

$$P(2 \le X < 3 | X \ge 1) = \frac{P(2 \le X < 3 \text{ και } X \ge 1)}{P(X \ge 1)} \qquad (i)$$

$$(2 \le X < 3 \text{ και } X \ge 1) \;\Leftrightarrow\; (2 \le X < 3),$$

οπότε

$$\begin{aligned} P(2 \le X < 3 \text{ και } X \ge 1) &= P(2 \le X < 3) \\ &= \int_2^3 cxe^{-2x}dx \\ &= c\left(\frac{5}{4}e^{-4} - \frac{7}{4}e^{-6}\right) \end{aligned}$$

και

$$P(X \ge 1) = \int_1^{+\infty} cxe^{-2x}dx = c\frac{3}{4}e^{-2}$$

Έτσι η (i) δίνει

$$P(2 \le X < 3 | X \ge 1) = \frac{c\left(\frac{5}{4}e^{-4} - \frac{7}{4}e^{-6}\right)}{c\frac{3}{4}e^{-2}} = \frac{1}{3}\left(5e^{-2} - 7\,e^{-4}\right).$$

Λύση `Ασκησης 4.7

α) Πρέπει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

ή

$$\int_0^2 cx^3 dx = 1$$

ή

$$c4 = 1 \text{ ή } c = \frac{1}{4}$$

β) Σύμφωνα με τον ορισμό της πυκνότητας πιθανότητας,

$$\begin{aligned} P(0,5 < X < 1) &= \int_{0,5}^{1} f(x)dx = \int_{0,5}^{1} \frac{1}{4}x^3 dx \\ &= 0,059. \end{aligned}$$

γ) Η μέση τιμή της X είναι

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 x f(x)dx \\ &= \int_0^2 x\frac{1}{4}x^3 dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^4 dx \\ &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Η διακύμανση της X είναι

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \qquad (i)$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^2 x^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2\frac{1}{4}x^3 dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^5 dx \\ &= \frac{8}{3}, \end{aligned}$$

οπότε η (i) δίνει

$$Var(X) = \frac{8}{3} - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = 0,107.$$

Λύση Άσκησης 4.9

α) Πρέπει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

ή

$$\int_{0}^{1} cxdx = 1$$

ή

$$c\frac{1}{2} = 1 \text{ ή } c = 2.$$

β) Η συνάρτηση κατανομής της X είναι:

- Για $x \leq 0$, $$F_X(x) = 0.$$
- Για $0 < x < 1$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{0}^{x} 2tdt \\ &= x^2 \end{aligned}$$

- Για $x \geq 1$, $$F_X(x) = 1.$$

Επομένως

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

γ) Η συνάρτηση $Y = lnX$ είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρ.4.1.

$$Y = lnX \;\Leftrightarrow\; X = e^Y, \quad Y \leq 0, \quad (\text{αφού } 0 < x \leq 1)$$

οπότε

$$\frac{dx}{dy} = e^y.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρ.4.1,

$$f_Y(y) = f_X(x(y))\left|\frac{dx}{dy}\right| = 2e^y e^y = 2e^{2y}, \;\; y \leq 0.$$

Λύση Άσκησης 4.10

Σύμφωνα με την (4.24):

α) Για το πρώτο τεταρτημόριο q_1 ισχύει

$$P(X \le q_1) = \frac{1}{4}$$

ή
$$F_X(q_1) = \frac{1}{4}$$

ή
$$1 - e^{-\lambda q_1} = \frac{1}{4}$$

ή
$$e^{-\lambda q_1} = \frac{3}{4}$$

ή
$$-\lambda q_1 = \ln\frac{3}{4}$$

ή
$$q_1 = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{4}{3}.$$

β) Για το $k-$ εκατοστημόριο q_k ισχύει

$$P(X \le q_k) = \frac{k}{100}$$

ή
$$F_X(q_k) = \frac{k}{100}$$

ή
$$1 - e^{-\lambda q_k} = \frac{k}{100}$$

ή
$$e^{-\lambda q_k} = 1 - \frac{k}{100}$$

ή
$$-\lambda q_k = \ln\left(1 - \frac{k}{100}\right)$$

ή
$$q_k = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-\frac{k}{100}}.$$

Λύση Άσκησης 4.11

Για την αντίστοιχη του βάρους X τυποποιημένη κανονική μεταβλητή

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ισχύει

$$P(X < 85) = P(Z < z_1) = 0,95 \Leftrightarrow \Phi(z_1) = 0,95,$$

όπου

$$z_1 = \frac{85 - \mu}{\sigma}$$

η αντίστοιχη της τιμής 85 τιμή της Z.
Από τον Πίνακα Ι προκύπτει ότι

$$\Phi(1,65) = 0,95,$$

οπότε

$$z_1 = 1,65$$

και

$$\frac{85 - \mu}{\sigma} = 1,65. \qquad (i)$$

Επίσης

$$P(X < 55) = P(Z < z_2) = 0,1 \Leftrightarrow \Phi(z_2) = 0,1,$$

οπότε

$$\Phi(-z_2) = 1 - 0,1 = 0,9$$

όπου

$$z_2 = \frac{55 - \mu}{\sigma}$$

η αντίστοιχη της τιμής 55 τιμή της Z.
Από τον πίνακα Ι προκύπτει ότι

$$\Phi(1,28) = 0,9,$$

οπότε

$$-z_2 = 1,28 \Leftrightarrow z_2 = -1,28$$

ή

$$\frac{55 - \mu}{\sigma} = -1,28. \qquad (ii)$$

Λύνοντας το σύστημα των (i) και (ii) προκύπτει

$$\mu = 68,11 \quad \text{και} \quad \sigma = 10,24.$$

Το ποσοστό μαθητών με βάρος μεγαλύτερο των $70Kg$ είναι

100-ποσοστό μαθητών με βάρος μικρότερο των $70Kg$

δηλαδή ίσο με

$$\begin{aligned} 100 - \Phi\left(\frac{70 - \mu}{\sigma}\right)100 &= 100 - \Phi\left(\frac{70 - 68,11}{10,24}\right)100 \\ &= 100\,(1 - \Phi(0,19)) \\ &= 100 \cdot 0,425 = 42,5\%, \end{aligned}$$

όπως προκύπτει από τον πίνακα Ι.

Λύση Άσκησης 4.12

α) Επειδή η μέση τιμή του χρόνου λειτουργίας της λυχνίας X είναι 2000 ώρες, για την εκθετική αυτή κατανομή

$$\frac{1}{\lambda} = 2000,$$

οπότε η διακύμανση της X είναι

$$\frac{1}{\lambda^2} = 2000^2 \text{ωρες}^2.$$

β) Η πιθανότητα μία λυχνία να λειτουργήσει για περισσότερο από 2500 ώρες είναι (βλ.(4.25))

$$\begin{aligned} P(X > 2500) &= e^{-\frac{2500}{2000}} \\ &= 0,287. \end{aligned}$$

γ) Η πιθανότητα μία λυχνία να λειτουργήσει για περισσότερο από 3000 ώρες με δεδομένο ότι λειτούργησε ήδη 2600 ώρες είναι (βλ. Παρατήρηση 4.2)

$$\begin{aligned} P(X > 3000 | X > 2600) &= P(X > 2600 + 400 | X > 2600) \\ &= P(X > 400) \\ &= e^{-\frac{400}{2000}} \\ &= 0,819. \end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 4.13

α) $i)$ Η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος δίσκος να διαρκέσει το πολύ 8 χρόνια είναι

$$P(X \le 8) = F_X(8) = 1 - e^{-\frac{8}{16}} = 0,393.$$

$ii)$ Η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος δίσκος να διαρκέσει από 12 έως 20 χρόνια είναι

$$\begin{aligned} P(12 \le X \le 20) &= F_X(20) - F_X(12) \\ &= 1 - e^{-\frac{20}{16}} - \left(1 - e^{-\frac{12}{16}}\right) \\ &= e^{-\frac{12}{16}} - e^{-\frac{20}{16}} \\ &= 0,186 \end{aligned}$$

$iii)$ Η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος δίσκος να διαρκέσει τουλάχιστον 30 χρόνια είναι (βλ.(4.25))

$$P(X \ge 30) = e^{-\frac{30}{16}} = 0,153.$$

β) Για τη διάμεσο δ της X ισχύει

$$P(X \le \delta) = 0,5 \quad \text{ή} \quad F_X(\delta) = 0,5$$

ή
$$1 - e^{-\frac{\delta}{16}} = 0,5$$

ή
$$e^{-\frac{\delta}{16}} = \frac{1}{2}$$

ή
$$-\frac{\delta}{16} = \ln\frac{1}{2}$$

ή
$$\frac{\delta}{16} = \ln 2$$

ή
$$\delta = 16\ln 2 = 11,09.$$

Λύση Άσκησης 4.14

α) i) Το ποσοστό λαπτήρων που αναμένεται να έχουν χρόνο ζωής μικρότερο των 1700 ωρών είναι ίσο με

$$\pi = P(X \le 1700) = P(Z \le z_1) = \Phi(z_1)$$

όπου

$$z_1 = \frac{1700 - 1800}{40} = -2,5$$

η αντίστοιχη της 1700 τιμή της τυχαίας μεταβλητής Z, οπότε (βλ. πίνακας I)

$$\pi = \Phi(-2,5) \cdot 100 = (1 - \Phi(2,5))\, 100 = (1 - 0,9938)\, 100 = 0,62\%.$$

ii) Το ποσοστό λαπτήρων που αναμένεται να έχουν χρόνο ζωής μεγαλύτερο των 1900 ωρών είναι

$$\pi = 100- \text{ ποσοστό λαπτήρων με χρόνο ζωής μικρότερο των } 1900$$

οπότε

$$\pi = 1 - P(X \le 1900) = 1 - P(Z \le z_2) = 1 - \Phi(z_2)$$

όπου

$$z_2 = \frac{1900 - 1800}{40} = 2,5$$

η αντίστοιχη της 1900 τιμή της αντίστοιχης του χρόνου ζωής τυποποιημένη κανονική μεταβλήτή, οπότε (βλ. πίνακας I)

$$\pi = (1 - \Phi(2,5))\, 100 = (1 - 0,9938)\, 100 = 0,62\%.$$

β) Αν ο χρόνος ζωής του 90% των λαπτήρων διαφέρει από την μέση τιμή του χρόνου ζωής περισσότερο από k,

$$P(|X - \mu| > k) = 0,9,$$

οπότε

$$P(|X - \mu| \le k) = 1 - 0,9 = 0,1 \quad \text{ή} \quad P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| \le \frac{k}{\sigma}\right) = 0,1$$

ή

$$P\left(|Z| \le \frac{k}{\sigma}\right) = 0,1$$

ή (βλ.(4.42))

$$2\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right) - 1 = 0,1 \quad \text{ή} \quad \Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right) = 0,55.$$

Από τον πίνακα I προκύπτει ότι $\Phi\,(0,12) = 0,55$, οπότε

$$\frac{k}{\sigma} = 0,12 \quad \text{ή} \quad k = 0,12\sigma = 0,12 \cdot 40 = 4,8 \text{ ώρες}.$$

Λύση Άσκησης 4.15

$$P(X < 86) = P(Z < z_1) = \Phi(z_1) = 0,885$$

όπου

$$z_1 = \frac{86 - 80}{\sigma}$$

η αντίστοιχη της 86 τιμή της αντίστοιχης της X τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής Z.
Από τον πίνακα I προκύπτει ότι $\Phi\left(1,2\right) = 0,885$, οπότε

$$z_1 = 1,2$$

και

$$\frac{86 - 80}{\sigma} = 1,2 \Leftrightarrow \sigma = \frac{6}{1,2} = 5.$$

Λύση Άσκησης 4.17

α) Πρέπει

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$$

ή

$$\int_0^{+\infty} ke^{-2x}dx = 1$$

ή

$$k\frac{1}{2} = 1 \text{ ή } k = 2.$$

β) Η συνάρτηση $Y = \sqrt{X}$ είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρ.4.1.

$$Y = \sqrt{X} \iff X = Y^2, \; Y \geq 0,$$

οπότε

$$\frac{dx}{dy} = 2y.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρ.4.1,

$$f_Y(y) = f_X(x(y))\left|\frac{dx}{dy}\right| = 2e^{-2y^2}2y = 4ye^{-2y^2}, \; y \geq 0.$$

Λύση Άσκησης 4.18

Για την περίπτωση αυτή ($\overline{x} = 120, s = 5$)

$$\begin{aligned}
\overline{x} - s &= 15 \\
\overline{x} + s &= 125 \\
\overline{x} - 2s &= 110 \\
\overline{x} - 3s &= 105 \\
\overline{x} + 2s &= 130 \\
\overline{x} + 3s &= 135
\end{aligned}$$

α)
$$105 < X < 135 \;\Leftrightarrow\; \overline{x} - 3s < X < \overline{x} + 3s,$$

οπότε το ποσοστό παρατηρήσεων με $105 < X < 135$ είναι

$$99,7\%.$$

β)
$$X > 130 \;\Leftrightarrow\; X > \overline{x} + 2s,$$

οπότε το ποσοστό παρατηρήσεων με $X > 130$ είναι

$$2,5\%.$$

γ)
$$X < 105 \;\Leftrightarrow\; X < \overline{x} - 3s,$$

οπότε το ποσοστό παρατηρήσεων με $X < 105$ είναι

$$\frac{0,3}{2} = 0,15\%.$$

δ)
$$X < 130 \;\Leftrightarrow\; X < \overline{x} + 2s,$$

οπότε το ποσοστό παρατηρήσεων με $X < 130$ είναι

$$100 - 2,5 = 97,5\%.$$

ε)
$$X > 105 \;\Leftrightarrow\; X > \overline{x} - 3s,$$

οπότε το ποσοστό παρατηρήσεων με $X > 105$ είναι

$$100 - 0,15 = 99,85\%.$$

στ)
$$X > 110 \;\Leftrightarrow\; X > \overline{x} - 2s,$$

οπότε το ποσοστό παρατηρήσεων με $X > 110$ είναι

$$100 - 2,5 = 97,5\%.$$

ζ)
$$105 < X < 130 \;\Leftrightarrow\; \overline{x} - 3s < X < \overline{x} + 2s,$$

οπότε το ποσοστό παρατηρήσεων με $105 < X < 130$ είναι

$$\frac{99,7}{2} + \frac{95}{2}\%.$$

Λύση Άσκησης 4.25

Υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς A.
Από τον ορισμό της πυκνότητας πιθανότητας

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{40}^{100} A(1-\frac{x}{100})dx = 1\\ &\Leftrightarrow \quad 18A = 1\\ &\Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{18}\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό (4.1) η πιθανότητα αστοχίας είναι

$$\begin{aligned}P(\text{αστοχίας}) &= P(X \geq 88)\\ &= 1 - P(X < 88)\\ &= 1 - \int_{-\infty}^{88} f_X(x)dx\\ &= 1 - \int_{40}^{88} \frac{1}{18}(1-\frac{x}{100})dx\\ &= 1 - 0,96 = 0,04\end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 4.26

Υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς k. Σύμφωνα με τον ορισμό της πυκνότητας πιθανότητας

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r)dr = 1 \Leftrightarrow \int_4^{10} k(r-4)(10-r)dr = 1 \Leftrightarrow 36k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{36}$$

α) $i)$ Η μέση τιμή της αντίστασης είναι

$$M_R = \int_{\infty}^{+\infty} rf_R(r)dr = \int_4^{10} r\frac{1}{36}(r-4)(10-r)dr = 7$$

$ii)$ Σύμφωνα με την (4.6) για την διάμεσο m ισχύει

$$\int_{-\infty}^{m} f_R(r)dr = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_4^{m} \frac{1}{36}(r-4)(10-r)dr = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 7m^2 - \frac{m^3}{3} - 40m + 69,33 = 18$$

Με τη βοήθεια του Matlab λύνουμε την εξίσωση αυτή, οπότε προκύπτει $m = 7$ (οι λύσεις $m = 1,8$ και $m = 12,2$ απορρίπτονται).

$iii)$ Η επικρατούσα τιμή είναι η τιμή για την οποία η συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας παίρνει τη μέγιστη τιμή.

β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(R>9|R>6) = \frac{P(R>9)}{R(>6)} \qquad (i)$$

$$\begin{aligned} P(R>9) &= 1-P(R\le 9) = 1-\int_4^9 f_R(r)dr = 1-0,93 = 0,07 \\ P(R>6) &= 1-P(R\le 6) = 1-\int_4^6 f_R(r)dr = 1-0,26 = 0,74 \end{aligned}$$

οπότε η (ii) δίνει

$$P(R>9/R>6) = \frac{0,07}{0,79} = 0,095$$

$$\frac{df_R}{dr} = 0 \Leftrightarrow (10-r)+(-1)+r-4 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{14}{2} = 7$$

Επίσης

$$\frac{d^2f_R}{dr^2} = -2 < 0,$$

οπότε η συνάρτηση $f_R(r)$ έχει μέγιστο για $r = 7$.

Άρα, η επικρατούσα τιμή της τυχαίας μεταβλητής R είναι $r = 7$.

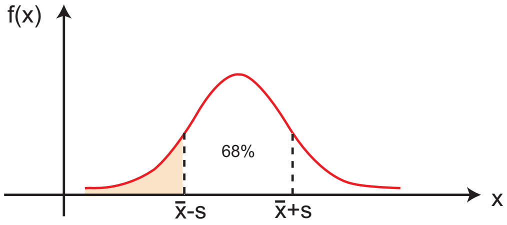
Λύση Άσκησης 4.28

Για την περίπτωση αυτή ($\overline{x} = 220, s = 20$)

$$\overline{x} - s = 200, \qquad \overline{x} + s = 240, \qquad \overline{x} - 2s = 180, \qquad \overline{x} + 2s = 260.$$

α) Λιγότερες από 200 γεννήσεις σημαίνει

$$X < 200 = \overline{x} - s$$



Σχήμα 4.51 *Κανονική κατανομή,* $X < \overline{x} - s$

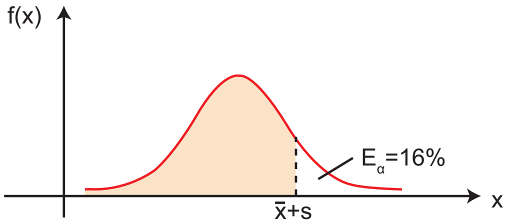
Το αντίστοιχο ποσοστό ισούται με το γραμμοσκιασμένο εμβαδό του Σχήμα 4.46, το οποίο λόγω της συμμετρίας της καμπύλης συχνοτήτων περί της ευθείας $x = \overline{x}$ και του ότι για το 68% των παρατηρήσεων ισχύει $\overline{x} - s < X < \overline{x} + s$ είναι

$$\frac{100 - 68}{2} = 16\%.$$

Ο αντίστοιχος αριθμός ημερών είναι $\frac{16}{100}365 = 58,4$ ημέρες.

β) Λιγότερες από 240 γεννήσεις σημαίνει

$$X < 240 = \overline{x} + s.$$



Σχήμα 4.55 *Κανονική κατανομή,* $X < \overline{x} + s$

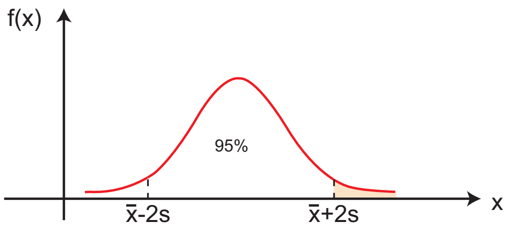
Το αντίστοιχο ποσοστό (ίσο με το γραμμοσκιασμένο εμβαδό του Σχήμα 4.47) είναι

$$100 - E_a = 100 - 16 = 84\%,$$

όπου E_a το ποσοστό παρατηρήσεων με $X > \overline{x} + s$, το οποίο λόγω συμμετρίας και του (α) είναι ίσο με 16% (βλ. Σχήμα 4.43)

γ) Περισσότερες από 260 γεννήσεις σημαίνει

$$X > \overline{x} + 2s.$$



Σχήμα 4.56 *Κανονική κατανομή,* $X > \overline{x} + 2s$

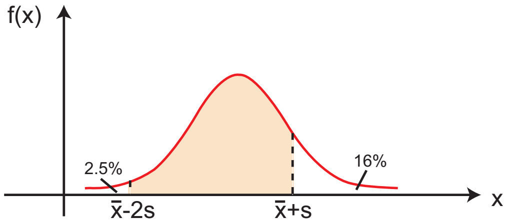
Το αντίστοιχο ποσοστό είναι ίσο με το γραμμοσκιασμένο εμβαδό του Σχήματος 4.48, δηλαδή

$$\frac{100 - 95}{2} = 2,5\%.$$

δ) Μεταξύ 180 και 240 σημαίνει

$$\overline{x} - 2s < X < \overline{x} + s.$$

Το αντίστοιχο ποσοστό είναι ίσο με (βλ. Σχήμα 4.49)

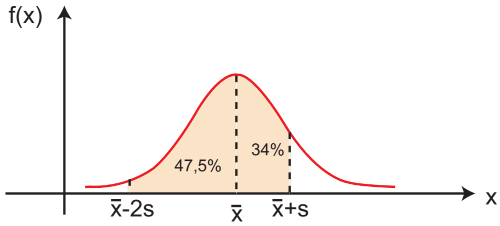


Σχήμα 4.57 *Κανονική κατανομή,* $\overline{x} - 2s < X < \overline{x} + s$

$$100 - \text{ ποσοστό με } (X < \overline{x} - 2s) - \text{ ποσοστό με } (X > \overline{x} + s)$$
$$= 100 - 2,5 - 16 = 81,5\%.$$

Με άλλο τρόπο, ποσοστό αυτό είναι ίσο με (βλ. Σχήμα 4.50)

$$\text{ποσοστό με } (\overline{x} - 2s < X < \overline{x}) + \text{ ποσοστό με } (\overline{x} < X < \overline{x} + s)$$
$$= \frac{95}{2} + \frac{68}{2} = 47,5 + 34 = 81,5\%.$$



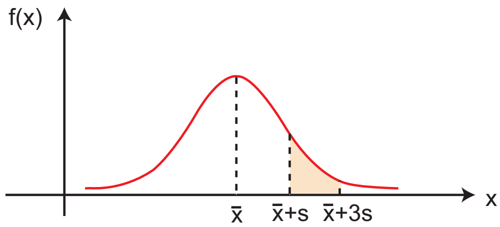
Σχήμα 4.58 *Κανονική κατανομή,* $\overline{x} - 2s < X < \overline{x} + s$

ε) Στην περίπτωση αυτή

$$\overline{x} + s < X < \overline{x} + 3s$$

οπότε το αντίστοιχο ποσοστό είναι ίσο με (βλ. Σχήμα 4.51)

$$\text{ποσοστό με } (\overline{x} < X < \overline{x} + 3s) - \text{ ποσοστό με } (\overline{x} < X < \overline{x} + s)$$
$$= \frac{99,7}{2} - \frac{68}{2} = 15,85\%.$$



Σχήμα 4.59 *Κανονική κατανομή,* $\overline{x} + s < X < \overline{x} + 3s$