Κεφάλαιο 3

Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Λύση Άσκησης 3.1

α)

$$\begin{aligned} P(-1 \le X < 2) &= P(X=-1) + P(X=1) \\ &= f_X(-1) + f_X(1) = 0,25 + 0,4 = 0,65 \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} E(3X-2) &= \sum_x^4 (3x-2) f_X(x) \\ &= (3(-1)-2) f_X(-1) + (3 \cdot 1 - 2) f_X(1) + (3 \cdot 2 - 2) f_X(2) \\ &\quad + (3 \cdot 4 - 2) f_X(4) \\ &= -5 \cdot 0,25 + 0,4 + 4 \cdot 0,15 + 10 \cdot 0,2 \\ &= 1,75 \end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 3.2

Η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$$X : \text{“αριθμός αγοριών μίας οικογένειας με τρία παιδιά”}$$

παίρνει τις τιμές 0,1,2,3 και ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(3, 0.45)$, οπότε οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι:

$$\begin{aligned}
f_X(0) &= 0,55^3 = 0,166 \\
f_X(1) &= 3 \cdot 0,45 \cdot 0,55^2 = 0,408 \\
f_X(2) &= \binom{3}{2} \cdot 0,45^2 \cdot 0,55 = 3 \cdot 0,45^2 \cdot 0,55 = 0,334 \\
f_X(3) &= 0,45^3 = 0,091
\end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 3.3

Η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$$X : \text{“αριθμός γραμμάτων στις 5 ρίψεις”}$$

ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(5, 0.5)$, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - f_X(0) - f_X(1) \\ &= 1 - 0,5^5 - \binom{5}{1} 0,5 \cdot 0,5^4 \\ &= 0,813 \end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 3.4

Η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$$X : \text{“αριθμός πολιτών από τους 5 που προτιμούν για πρωθυπουργό τον Α”}$$

ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(5, 0.35)$, οπότε:

α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} P(X = 5) &= P(X = 5) = f_X(5) \\ &= 0,35^5 = 0,0052. \end{aligned}$$

β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι (λόγω και του (β))

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - 0,946 = 0,054. \end{aligned}$$

γ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= 1 - P(X > 3) \\ &= 1 - P(X = 4) - P(X = 5) \\ &= 1 - f_X(4) - f_X(5) \\ &= 1 - \binom{5}{4} 0,35^4 \cdot 0,65 - 0,35^5 \\ &= 0,946. \end{aligned}$$

δ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - f_X(0) - f_X(1) \\ &= 1 - 0,65^5 - \binom{5}{1} 0,35 \cdot 0,65^4 \\ &= 0,572. \end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 3.5

α) Η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$$X : \text{“αριθμός αγοριών σε μία οικογένεια πέντε παιδιών”}$$

ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(5, 0.45)$, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X = 3) = f_X(3) = \binom{5}{3} 0,45^3 \cdot 0,55^2 = 0,276.$$

β) Η διακριτή τυχαία μεταβλητή

X : “αριθμός αγοριών σε μία οικογένεια έξι παιδιών”

ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(6, 0.45)$, οπότε η ζητούμενη μέση τιμή είναι

$$E(X) = np = 6 \cdot 0,45 = 2,7$$

και η τυπικη απόκλιση

$$\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{6 \cdot 0,45 \cdot 0,55} = 1,219.$$

Λύση Άσκησης 3.6

Σύμφωνα με τον πίνακα V

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= F_X(2) = 0,125 \\
P(X > 4) &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3) = 1 - 0,265 = 0,735.
\end{aligned}
$$

Λύση Άσκησης 3.7

Επειδή οι σφαίρες επανατοποθετούνται, η τυχαία μεταβλητή

$$X : \text{“αριθμός άσπρων σφαιρών στις 8 επιλεγμένες”}$$

ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(8, p)$, όπου

$$p = \frac{3}{3+7} = 0,3$$

η πιθανότητα η επιλεγμένη σφαίρα να είναι άσπρη, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X = 5) = f_X(5) = \binom{8}{5} 0,3^5 \cdot 0,7^3 = 0,047.$$

Λύση Άσκησης 3.8

Η τυχαία μεταβλητή

$$X: \text{“αριθμός ρίψεων μέχρι να προκύψει εξάρι”}$$

ακολουθεί γεωμετρική κατανομή $G(p)$, όπου

$$p = \frac{1}{6} = 0,167,$$

η πιθανότητα να προκύψει εξάρι σε μία ρίψη, οπότε:

α) Η πιθανότητα να προκύψει για πρώτη φορά εξάρι στην τέταρτη ρίψη είναι

$$P(X = 4) = f_X(4) = (1 - 0,167)^{4-1} \cdot 0,167 = 0,097.$$

β) Η πιθανότητα να απαιτούνται το πολύ 3 ρίψεις ώστε να προκύψει για πρώτη φορά εξάρι είναι

$$\begin{aligned} P(X \le 3) &= 1 - P(X > 3) = 1 - (1-p)^3 \\ &= 1 - (1 - 0,167)^3 = 0,422 \end{aligned}$$

γ) Η πιθανότητα να απαιτούνται τουλάχιστον 5 ρίψεις ώστε να προκύψει για πρώτη φορά εξάρι είναι (βλ. Πρόταση 3.2)

$$\begin{aligned} P(X \ge 5) &= P(X > 4) = (1-p)^4 \\ &= (1 - 0,167)^4 = 0,481 \end{aligned}$$

δ) Η πιθανότητα να απαιτούνται τουλάχιστον 6 ρίψεις για να προκύψει εξάρι με δεδομένο ότι απαιτούνται τουλάχιστον 2 ρίψεις είναι (λόγω της Πρότασης 3.2 και του (β))

$$\begin{aligned} P(X > 5 | X > 1) &= P(X > 4 + 1 | X > 1) \\ &= P(X > 4) = (1-p)^4 \\ &= (1 - 0,167)^4 = 0,481. \end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 3.9

Η τυχαία μεταβλητή

$$X : \text{“αριθμός φύλλων μέχρι να προκύψει άσσος”}$$

ακολουθεί γεωμετρική κατανομή $G(p)$, όπου

$$p = \frac{4}{52} = 0,077,$$

η πιθανότητα ένα επιλεγμένο φύλλο να είναι άσσος, οπότε η πιθανότητα μόνο το τέταρτο φύλλο να είναι άσσος είναι

$$P(X = 4) = f_X(4) = (1 - 0,077)^{4-1} \cdot 0,077 = 0,061.$$

Λύση Άσκησης 3.10

Η τυχαία μεταβλητή

$$X : \text{“αριθμός βλαβών σε μία εβδομάδα”}$$

ακολουθεί κατανομή Poisson $X \sim Po(3,1)$, οπότε η πιθανότητα να συμβούν:
α) $i)$ (ακριβώς) τρεις βλάβες σε μία βδομάδα είναι

$$P(X = 3) = f_X(3) = e^{-3,1}\frac{3,1^3}{3!} = 0,224.$$

Λύση Άσκησης 3.11

Η τυχαία μεταβλητή

X : "αριθμός άσπρων σφαιρών στις δύο επιλεγμένες χωρίς επανατοποθέτηση"

ακολουθεί υπεργεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{1}{2-x}}{\binom{3+1}{2}}$$

οπότε:

α) Η πιθανότητα η μία σφαίρα να είναι άσπρη είναι

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{2-1}}{\binom{3+1}{2}} \\ &= \frac{\frac{3!}{1!2!}\frac{1!}{1!0!}}{\frac{4!}{2!2!}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

β) Η πιθανότητα και οι δύο σφαίρες να είναι άσπρες είναι

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{2-2}}{\binom{3+1}{2}} \\ &= \frac{\frac{3!}{2!1!}\frac{1!}{0!1!}}{\frac{4!}{2!2!}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 3.12

β) Η τυχαία μεταβλητή

$$X : \text{“αριθμός λευκών σωματιδίων σε δύο φιλμ”}$$

ακολουθεί κατανομή Poisson $X \sim Po(2 \cdot 1,6)$, οπότε η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον δύο λευκά σωματίδια σε δύο φιλμ είναι

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\
&= 1 - P(X \leq 1) \\
&= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (f_X(0) + f_X(1)) \\
&= 1 - \left(e^{-3,2} \frac{3,2^0}{0!} + e^{-3,2} \frac{3,2^1}{1!} \right) \\
&= 1 - 0,171 = 0,829.
\end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 3.13

α) Η τυχαία μεταβλητή

$$X : \text{“αριθμός σωστών απαντήσεων στις 10 ερωτήσεις”}$$

ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(10, p)$, όπου

$$p = \frac{1}{4} = 0,25$$

η πιθανότητα μια απάντηση να είναι σωστή, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) \\
&= 1 - (f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) + f_X(3)) \\
&= 1 - (1 - 0,25)^{10} - \binom{10}{1}(1 - 0,25)^9 0,25 \\
&- \binom{10}{2}(1 - 0,25)^8 0,125^2 - \binom{10}{3}(1 - 0,25)^7 0,25^3 = 0,224
\end{aligned}$$

β) Η τυχαία μεταβλητή X : “αριθμός σωστών απαντήσεων στις 32 ερωτήσεις” ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(33, 0.125)$,

οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned}
P(X \geq 30) &= P(X = 30) + P(X = 31) + P(X = 32) \\
&= \binom{32}{30} 0,125^{30}(1 - 0,125)^2 \\
&\quad + \binom{32}{31} 0,125^{31}(1 - 0,125) + 0,125^{32} \\
&= 3 \cdot 10^{-25}.
\end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 3.15

Η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$$X : \text{“αριθμός αγοριών στα 6 επιλεγμένα παιδιά”}$$

ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(6, p)$, όπου

$$p = \frac{8}{20} = 0,4$$

η πιθανότητα το επιλεγμένο παιδί να είναι αγόρι,

οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X = 3) = f_X(3) = \binom{6}{3} 0,4^3 \cdot 0,6^3 = 0,276.$$