Κεφάλαιο 7

Εκτιμητική, διαστήματα εμπιστοσύνης

Λύση Άσκησης 7.33

Επειδή το δείγμα είναι μικρό ακολουθούμε την παρατ. 7.10.
Η δειγματική μέση τιμή είναι

$$\overline{x} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = 15,36$$

και η δειγματική τυπική απόκλιση, σύμφωνα με την (6.23),

$$s = \sqrt{\frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - 7\overline{x}^2\right)} = 1,71,$$

Έτσι σύμφωνα με την παρατ. 7.10, ένα 90% δείγμα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή του χρόνου είναι το ($t_{6;0,05} = 1,943$)

$$\left[\overline{x} - t_{7-1;0,1/2}\frac{s}{\sqrt{9}},\ \overline{x} + t_{7-1;0,1/2}\frac{s}{\sqrt{7}}\right]$$

ή

$$\left[15,36 - 1,943\frac{1,71}{\sqrt{7}},\ 15,36 + 1,943\frac{1,71}{\sqrt{7}}\right] = [14,10,\ 16,62]$$

Λύση Άσκησης 7.35

α) Σύμφωνα με την παρατ. 7.20 (ίσες τυπικές αποκλίσεις), το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά των μέσων τιμών $\mu_X - \mu_Y$ των βαθμολογιών X και Y των φοιτητών των δύο τμημάτων είναι το

$$\left[\overline{x} - t_{n-1;a/2}\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_{n-1;a/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\left[(81,3-78,6) - t_0 s_p\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{15}},\ (81,3-78,6) - t_0 s_p\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{15}}\right]. \qquad (i)$$

Από τον πίνακα III

$$t_0 = t_{9+15-2;0,05/2} = t_{22;0,025} = 2,074$$

και σύμφωνα με την (7.22)

$$s_p = \sqrt{\frac{(9-1)60,8+(15-1)48,24}{(9+15-2)}} = 7,27,$$

οπότε η (i) δίνει

$$\left[2,7-2,074\cdot 7,27\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{15}},\ 2,7+2,074\cdot 7,27\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{15}}\right] = [-3,66,\ 9,06].$$

β) Επειδή το διάστημα εμπιστοσύνης αυτό περιέχει το μηδέν δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,05$ (βλ. παρατ. 7.16) αν οι φοιτητές Φυσικής του πανεπιστημίου Ι είχαν μεγαλύτερη βαθμολογία στο τεστ αυτό από ότι οι φοιτητές του πανεπιστημίου ΙΙ.

Λύση Άσκησης 7.37

Επειδή το δείγμα είναι μικρό ακολουθούμε την παρατ. 7.10, σύμφωνα με την οποία ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή είναι το ($t_{24;0,025} = 2,064$)

$$\left[\overline{x} - t_{25-1;0,05/2}\frac{s}{\sqrt{25}},\ \overline{x} + t_{25-1;0,05/2}\frac{s}{\sqrt{25}}\right]$$

ή

$$\left[12,81 - 2,064\frac{0,04}{\sqrt{25}},\ 12,81 - 2,064\frac{0,04}{\sqrt{25}}\right] = [12,79,\ 12,83]$$

Λύση Ἀσκησης 7.39

α) Επειδή τα δείγματα είναι μεγάλα, σύμφωνα με την παρατ. 7.17, ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά των μέσων τιμών των δύο πληθυσμών είναι το ($z_{0,01/2} = z_{0,005} = 2,58$)

$$\left[(538-470)-2,58 s_w,\ \ (538-470)+2,58 s_w\right], \tag{i}$$

όπου

$$s_w = \sqrt{\frac{s_x^2}{n}+\frac{s_y^2}{m}} = \sqrt{\frac{12,4^2}{500}+\frac{10,2^2}{700}} = 0,675,$$

οπότε από την (i) προκύπτει το διάστημα εμπιστοσύνης

$$[68-2,58\cdot 0,675,\ \ 68+2,58\cdot 0,675] = [66,26,\ 69,74].$$

β) Επειδή το διάστημα εμπιστοσύνης αυτό δεν περιέχει το μηδέν, μπορούμε να συμπεράνουμε (βλ. παρατ. 7.16) σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,01$ ότι η παραγωγή ανά στρέμμα του προϊόντος αυτού στην Βόρεια Ελλάδα είναι μεγαλύτερη από την παραγωγή στην Νότια Ελλάδα.

Λύση Άσκησης 7.40

α) Σύμφωνα με την παρατ. 7.13 (γνωστές τυπικές αποκλίσεις), το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά των μέσων τιμών $\mu_X - \mu_Y$ των βαθμολογιών X και Y των φοιτητών των δύο τμημάτων είναι το

$$\big[(8,5-7,3) - z_{0,05/2}\sigma_W,\ \ (8,5-7,3) + z_{0,05/2}\sigma_W\big], \qquad (i)$$

όπου

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{12} + \frac{\sigma_Y^2}{10}} = \sqrt{\frac{2,6^2}{12} + \frac{2,1^2}{10}} = 1,002,$$

Από τον πίνακα I

$$z_{0,025} = 1,96$$

οπότε η (i) δίνει

$$[1,2 - 1,96 \cdot 1,002,\ \ 1,2 + 1,96 \cdot 1,002] = [-0,764,\ 3,16].$$

β) Επειδή το διάστημα εμπιστοσύνης αυτό περιέχει το μηδέν δεν μπορούμε να συμπεράνουμε σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,05$ (βλ. παρατ. 7.16) ότι η μέση τιμή της επίδοσης στο τέστ αυτό των φοιτητών του ΤΕΙ Α ήταν μεγαλύτερη από την μέση τιμή της επίδοσης των φοιτητών του ΤΕΙ Β.

Λύση Άσκησης 7.41

α) Επειδή τα δείγματα είναι μεγάλα, σύμφωνα με την παρατ. 7.17, ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά των μέσων τιμών των δύο πληθυσμών είναι το ($z_{0,05/2} = z_{0,025} = 1,96$)

$$\left[(9,31 - 7,40) - 1,96 s_w,\ \ (9,31 - 7,40) + 1,96 s_w\right], \qquad (i)$$

όπου

$$s_w = \sqrt{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}} = \sqrt{\frac{4,67^2}{100} + \frac{4,04^2}{100}} = 0,617,$$

οπότε από την (i) προκύπτει το διάστημα εμπιστοσύνης

$$[1,91 - 1,96 \cdot 0,617,\ \ 1,91 + 1,96 \cdot 0,617] = [0,7,\ 3,12].$$

β) Επειδή το διάστημα εμπιστοσύνης αυτό δεν περιέχει το μηδέν, μπορούμε να συμπεράνουμε (βλ. παρατ. 7.16) σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,01$ ότι η απώλεια βάρους ήταν μεγαλύτερη για την διαίτα I.

Λύση Άσκησης 7.42

Επειδή το δείγμα ακολουθεί κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση 0,19 ακολουθούμε την παρατ. 7.4. Η δειγματική μέση τιμή είναι

$$\overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 7,97$$

Έτσι σύμφωνα με την παρατ. 7.4, ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή είναι το ($z_{0,05/2} = 1,96$)

$$\left[\overline{x} - z_{0,05/2}\frac{\sigma}{\sqrt{10}},\ \overline{x} + z_{0,05/2}\frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right]$$

ή

$$\left[7,97 - 1,96\frac{0,19}{\sqrt{10}},\ 7,97 + 1,96\frac{0,19}{\sqrt{10}}\right] = [7,85,\ 8,09].$$

Λύση Άσκησης 7.44

Επειδή η X ακολουθεί κανονική κατανομή με διακύμανση $\sigma = 65,2$ ακολουθούμε την παρατ. 7.4, σύμφωνα με την οποία ένα 95% δείγμα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή της X είναι το ($z_{0,1/2} = 1,645$)

$$\left[\overline{x} - z_{0,1/2}\frac{\sigma}{\sqrt{25}},\ \overline{x} + z_{0,1/2}\frac{\sigma}{\sqrt{25}}\right]$$

ή

$$\left[485,3 - 1,645\frac{\sqrt{65,2}}{\sqrt{25}},\ 485,3 + 1,645\frac{\sqrt{65,2}}{\sqrt{25}}\right] = [482,6,\ 488,0].$$

Λύση Άσκησης 7.46

α) Επειδή το δείγμα είναι μικρό ακολουθούμε την παρατ. 7.10.
Η δειγματική μέση τιμή είναι

$$\overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 7,97$$

και η δειγματική τυπική απόκλιση, σύμφωνα με την (5.57),

$$s = \sqrt{\frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\overline{x}^2\right)} = 0,33,$$

Έτσι σύμφωνα με την παρατ. 7.12, ένα 95% μονόπλευρο διάστημα εμπιστοσύνης για το άνω φράγμα της μέσης τιμής της βαθμολογίας όλων των υποψηφίων είναι το ($t_{9;0,05} = 1,833$)

$$\left(0,\ 7,97 + 1,833\frac{0,33}{\sqrt{10}}\right] = (0,\ 8,16].$$

β) Σύμφωνα με την παρατ. 7.10, ένα 95% δίπλευρο διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή της βαθμολογίας όλων των υποψηφίων είναι το ($t_{9;0,025} = 2,262$)

$$\left[7,97 - 2,262\frac{0,33}{\sqrt{10}},\ 7,97 + 2,262\frac{0,33}{\sqrt{10}}\right] = [7,73,\ 8,21].$$

γ) Σύμφωνα με την παρατ. 7.32 ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την τυπική απόκλιση της X είναι το

$$\left[\sqrt{\frac{10-1}{\chi^2_{10-1;0,05/2}}}\,0,33,\ \sqrt{\frac{10-1}{\chi^2_{10-1;1-0,05/2}}}\,0,33\right]. \qquad (i)$$

Από τον πίνακα II προκύπτει ότι $\chi^2_{9;0,975} = 2,7$ και $\chi^2_{9;0,025} = 19,02$, οπότε η (i) δίνει ότι το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την τυπική απόκλιση της X είναι το

$$\left[\sqrt{\frac{9}{19,02}}\,0,33,\ \sqrt{\frac{9}{2,7}}\,0,33\right] = [0,23,\ 0,60].$$

Λύση Άσκησης 7.48

Η δειγματική αναλογία των τηλεθεατών που παρακολουθούσαν την εκπομπή είναι

$$\frac{y}{n} = \frac{40}{200} = 0,2,$$

οπότε σύμφωνα με την (7.32) ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την αναλογία τηλεθεατών που παρακολουθούν την εκπομπή είναι το (από τον πίνακα I $z_{0,05/2} = z_{0,025} = 1,96$)

$$\left[0,2 - 1,96\sqrt{0,2(1-0,2)/200},\ \ 0,2 + 1,96\sqrt{0,2(1-0,2)/200}\right] = [0,145,\ 0,255].$$

Λύση Άσκησης 7.51

α) Σύμφωνα με την (7.42), ένα 98% διάστημα εμπιστοσύνης για τον λόγο των διακυμάνσεων σ_X^2/σ_Y^2 των τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι το

$$\left[\frac{1}{F_{20,15;0,01}}\frac{6}{4},\ \ F_{15,20;0,01}\frac{6}{4}\right]. \qquad (i)$$

Από τον πίνακα IV προκύπτει ότι $F_{20,15;0,01} = 3,37$ και $F_{15,20;0,01} = 2,94$, οπότε η (i) δίνει

$$\left[\frac{1}{3,37}\frac{6}{4},\ \ 2,94\frac{6}{4}\right] = [0,445, 4,41].$$

β) Επειδή το διάστημα εμπιστοσύνης περιέχει την μονάδα δεν μπορούμε να συμπεράνουμε σε στάθμη σημαντικότητας 0,02 σε ποιά πόλη η διακύμανση του ύψους είναι μεγαλύτερη.

Λύση Άσκησης 7.52

Επειδή το ποσοστό του κόμματος στις εκλογές είναι περίπου $p^* = 0,08$, από την (7.47) προκύπτει ότι το μέγεθος του δείγματος από το οποίο συνάγεται ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης εύρους 0,01 (1%) είναι

$$n = \frac{z_{0,1/2}^2 \cdot 0,08 \cdot (1 - 0,08)}{0,01^2}. \qquad (i)$$

Από τον πίνακα I ή τον 4.1 βρίσκουμε ότι $z_{0,05} = 1,645$, οπότε η (i) δίνει

$$n = \frac{1,645^2 \cdot 0,08 \cdot 0,92}{0,0001} = 1991,6.$$

Επομένως το απαιτούμενο μέγεθος του δείγματος είναι $n = 1992$.