Κεφάλαιο 5

Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

Λύση Άσκησης 5.4

Η τυχαία μεταβλητή

X: " αριθμός εξάρων που προκύπτουν από τη ρίψη 2 ζαριών 120 φορές "

ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους

$$n = 200 \quad \text{και} \quad p = \frac{1}{36} = 0,028$$

την οποία μπορούμε να προσεγγίσουμε με κανονική κατανομή με μέση τιμή

$$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,028 = 5,6 > 5$$

και διακύμανση

$$\sigma^2 = np(1-p) = 200 \cdot 0,028 \cdot 0,972 = 5,4 > 5.$$

Η αντίστοιχη της X τυποποιημένη μεταβλητή είναι η

$$Z = \frac{X - 5,6}{\sqrt{5,4}} = \frac{X - 5,6}{2,32}$$

και η αντίστοιχη της 10 τιμής της είναι

$$\frac{10 - 5,6}{2,32} = 1,9$$

οπότε, λόγω της παρατήρησης 4.5, της (4.36) και του Πίνακα I, προκύπτει

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= P(Z \geq 1,9) = 1 - \Phi(1,9) \\ &= 1 - 0,9713 = 0,0287 \end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 5.8

Σύμφωνα με το θεώρημα 5.1 η τυχαία μεταβλητή

$$B = 2x - y$$

όπου

$$X: \text{“ βάρος παιδικής μερίδας ”}$$

και

$$Y: \text{“ βάρος συνήθης μερίδας ”}$$

ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή και διακύμανση

$$E(B) = 2 \cdot 47 - 1 \cdot 100 = -6$$

$$Var(B) = 2^2 - 3 + (-1)^2 \cdot 4 = 16$$

$$B \sim N(-6, 4^2)$$

Η αντίστοιχη της B τυποποιημένη μεταβλητή

$$z = \frac{B - (-6)}{4}$$

και η αντίστοιχη της 0 τιμής της

$$\frac{0 + 6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$$

οπότε σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.5, την (4.396) και τον πίνακα I,

$$P(B < 0) = P(Z < 1,5) = \Phi(1,5) = 0,9332$$

Λύση Άσκησης 5.10

Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα (θεώρημα. 5.17), η τυχαία μεταβλητή

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{25}$$

όπου

$$X_i\text{: “ το ποσό της νικοτίνης που περιέχεται στο } i\text{–τσιγάρο ”}$$

ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή και διακύμανση

$$E(x) = 25 \cdot 0,5 = 12,5$$

$$Var(x) = 25 \cdot 0,0025 = 0,0625$$

$$Y \sim N(12,5, 0,25^2),$$

οπότε η αντίστοιχη της Y τυποποιημένη μεταβλητή

$$Z = \frac{Y - 12,5}{0,25}$$

ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1.
Η αντίστοιχη της $x = 13$ τιμή της z είναι

$$\frac{13 - 12,5}{0,25} = 2$$

οπότε με τη βοήθεια της παρατ. 4.5, της (4.36) και τον πίνακα I

$$\begin{aligned} P(Y > 13) = P(Z > 2) &= 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 \\ &= 0,0228 \end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 5.11

α) Σύμφωνα με τον ορισμό της κοινής πυκνότητας πιθανότητας

$$\sum_x \sum_y f_{XY}(x,y) = 1 \Leftrightarrow \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{3} A(x+y) = 1 \Leftrightarrow 21A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{21}.$$

β) Η συνδιακύμανση των X και Y υπολογίζεται από την σχέση (5.37)

$$Cov(XY) = E(XY) - \mu_X \mu_Y. \qquad (i)$$

Οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των X και Y είναι

$$f_{X(x)} = \sum_{y=1}^{3} \frac{1}{21}(x+y) = \frac{x+2}{7}$$

$$f_{Y(y)} = \sum_{x=1}^{2} \frac{1}{21}(x+y) = \frac{3+2y}{21},$$

οπότε οι μέσες τιμές των x και y είναι

$$\mu_X = \sum_x x f_{X(x)} = \sum_{x=1}^{2} x \frac{x+2}{7} = 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{4}{7} = \frac{11}{7}$$

και

$$\mu_Y = \sum_x y f_{Y(y)} = \sum_{y=1}^{3} y \frac{3+2y}{21} = 1 \cdot \frac{5}{21} + 2 \cdot \frac{7}{21} + 3 \cdot \frac{9}{21} = \frac{46}{21}.$$

Έτσι, η (5.7) δίνει

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_x \sum_y xy f_{XY}(x,y) = \sum_X \sum_Y xy \frac{1}{21}(x+y) \\ &= 1 \cdot 1 \frac{2}{21} + 1 \cdot 2 \frac{3}{21} + 1 \cdot 3 \frac{4}{21} + 2 \cdot 1 \frac{3}{21} + 2 \cdot 2 \frac{4}{21} + 2 \cdot 3 \frac{5}{21} = \frac{61}{21} \end{aligned}$$

οπότε από την (i) προκύπτει

$$Cov(XY) = \frac{61}{17} - \frac{11}{7} \cdot \frac{46}{21} = \frac{365}{2499} = 0,15.$$

γ) Από τον Ορισμό (5.20) προκύπτει

$$\rho = \frac{Cov(XY)}{\sigma_X \sigma_Y} \qquad (ii)$$

και από την (3.9)

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 \qquad (iii)$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f_{X(x)} = \sum_{x=1}^{2} x^2 \frac{x+2}{7} = \frac{19}{7},$$

οπότε η (iii) δίνει $\left(\mu_X = \frac{11}{7}\right)$

$$\sigma_X^2 = \frac{19}{7} - \left(\frac{11}{7}\right)^2 = \frac{12}{49}.$$

Όμοια

$$E(Y^2) = \sum_y y^2 f_{Y(y)} = \sum_{y=1}^{3} y^2 \frac{3+2y}{21} = \frac{114}{21},$$

οπότε $\left(\mu_Y = \frac{46}{21}\right)$

$$\sigma_Y^2 = \frac{114}{21} - \left(\frac{46}{21}\right)^2 = \frac{278}{441}.$$

Έτσι η (ii) δίνει

$$\rho = \frac{\frac{365}{2499}}{\sqrt{\frac{12}{49}}\sqrt{\frac{278}{441}}} = 0,37.$$

δ) Στο (β) βρέθηκαν οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας, οπότε

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = \frac{x+2}{7}\cdot\frac{3+2y}{21} \neq f_{XY}(x,y)$$

οπότε οι τυχαίες μεταβλητές X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

ε) Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.9

$$f_{Y|X}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

η περιθώρια συνάρτηση της X είναι

$$f_X(x) = \frac{x+2}{7}$$

οπότε

$$f_{Y/x} = \frac{\frac{x+y}{21}}{\frac{x+2}{7}} = \frac{x+y}{3(x+2)} \tag{iv}$$

$i)$ Σύμφωνα με την (5.30) και την (iv),

$$EY|x = \sum_y y f_{Y/x}(Y/x) = 1\cdot\frac{x+1}{3(x+2)} + 2\cdot\frac{x+2}{3(x+2)} + 3\cdot\frac{x+3}{3(x+2)}$$

$$E(Y|x) = \frac{6x+14}{3(x+2)}.$$

$ii)$ Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.13,

$$Var(Y/x) = E(Y^2/x) - (E(Y/x))^2 \tag{v}$$

και σύμφωνα με τον Ορισμό 5.12

$$E(Y^2/x) = \sum y^2 f_{Y/x}(y/x) = \frac{14x+36}{3(x+2)}$$

οπότε η (v) δίνει

$$Var(Y/x) = \frac{14x+36}{3(x+2)} - \left(\frac{6x+14}{3(x+2)}\right)^2 = \frac{78x^2+360x+196}{9(x+2)^2}$$

$iii)$ από το (ϵi) προκύπτει

$$E(Y/x=1) = \frac{6\cdot 1+14}{3(1+2)} = \frac{20}{9}$$

στ) Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.9

$$f_{X/Y} = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_{Y(y)}}$$

$(f_{Y(y)} = \frac{3+2y}{21})$, οπότε

$$E(X/Y) = \frac{\frac{x+y}{21}}{\frac{3+2y}{21}} = \frac{x+y}{3+2y} \tag{vi}$$

$i)$ Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.3 και την (vi)

$$E(X/Y) = \sum_x x\cdot f_{X/Y}(x/y) = 1\cdot\frac{1+y}{3+2y} + 2\cdot\frac{2+y}{3+2y} = \frac{3y+5}{3+2y} \tag{vii}$$

οπότε

$$E(X/Y=3)=\frac{3\cdot 3+5}{3+2\cdot 3}=\frac{14}{9}$$

ii) Σύμφωνα με την (5.32)

$$Var(X/Y)=\sum_x (x-E(X/Y))^2\cdot f_{X/Y}(x/y)$$

επομένως

$$\begin{aligned}Var(X/Y=3) &= \sum_{x=1}^{2}(x-\frac{14}{9})^2\cdot\frac{x+3}{9}\\ &= (1-\frac{14}{9})^2\cdot\frac{4}{9}+(2-\frac{14}{9})^2\cdot\frac{5}{9}=\frac{164}{729}\end{aligned}$$

iii) Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.12

$$\begin{aligned}E(X^2/Y) &= \sum_x x^2 f_{X/Y}(x/y)=\sum_{x=1}^{2}x^2\frac{x+y}{3+2y}\\ &= 1^2\frac{1+y}{3+2y}+2^2\frac{2+y}{3+2y}=\frac{5y+9}{3+2y}\end{aligned}\qquad (viii)$$

iv) Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.13, την (vii) και την $(viii)$

$$Var(X/y)=E(X^2/y)-(E(X/y))^2=\frac{5y+9}{3+2y}-\left(\frac{3y+5}{3+2y}\right)^2,$$

οπότε

$$Var(x/y=1)=\frac{5\cdot 1+9}{3+2\cdot 1}-(\frac{3\cdot 1+5}{3+2\cdot 1})^2=\frac{1}{25}$$

Λύση Άσκησης 5.16

α) Προσεγγιστικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή (παρατ. 5.7)

X: " πλήθος αριθμών προτεραιότητας που δίνει ένα μηχάνημα σε μια τράπεζα σε μια ημέρα" ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = \lambda = 250$ και διακύμανση $\sigma^2 = 250$

$$X \sim N(250, 250)$$

Η αντίστοιχη της X τυποποιημένη μεταβλητή

$$Z = \frac{Q - 250}{\sqrt{250}}$$

και οι αντίστοιχες των $x = 210$ και $x = 290$ τιμές της Z

$$z_1 = \frac{210 - 250}{\sqrt{250}} = -2,53 \quad z_2 = \frac{290 - 250}{\sqrt{250}} = 2,53,$$

οπότε με τη βοήθεια της Παρατ. 4.5, την (4.42) και τον Πίνακα Ι

$$\begin{aligned} P(210 < X < 290) &= P(-2,53 < Z < 2,53) = P(|Z| < 2,53) \\ &= 2\Phi(2,53) - 1 = 2 \cdot 0,9943 - 1 = 0,9886 \end{aligned}$$

β) Η τυχαία μεταβλητή

$$Y = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

όπου x_i, $i = 1, \ldots, 5$ δειγματικές παρατηρήσεις της X σύμφωνα με το παράδειγμα 5.14 ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $n \cdot \lambda = 5 \cdot 250 = 1250$

$$Y \sim P_0(1250)$$

για την οποία προσεγγιστικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή

$$\mu = 1250$$

και διακύμανση

$$\sigma^2 = 1250$$

Η αντίστοιχη της Y τυποποιημένη μεταβλητή

$$W = \frac{Y - 1250}{\sqrt{1250}}$$

και η αντίστοιχη της $x = 1250$ τιμή της

$$w = \frac{1250 - 1250}{\sqrt{1250}} = 0,$$

οπότε σύμφωνα με την παρατήρηση 4.5, την (4.36) και τον Πίνακα Ι

$$P(Y > 1250) = P(W > 0) = 1 - \Phi(0) = 1 - 0,5 = 0,5$$

Λύση Άσκησης 5.18

Οι τυχαίες μεταβλητές

$$X: \text{“ αριθμός λαθών στο πρώτο μέρος μιας σελίδας της εφημερίδας ”}$$

και

$$Y: \text{“ αριθμός λαθών στο δεύτερο μέρος μιας σελίδας της εφημερίδας ”}$$

ακολουθούν κατανομή Poisson με παραμέτρους

$$\lambda_1 = 2,8 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 2,2 \ \text{ αντίστοιχα}$$

$$X \sim P_0(2,8) \quad \text{και} \quad Y \sim P_0(2,2),$$

οπότε σύμφωνα με θεώρ.5.2 η τυχαία μεταβλητή $Z = X + Y$ ακολουθεί επίσης κατανομή Poisson (X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές) με παράμετρο $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 5$

$$Z \sim P_0(5).$$

α)i) Σύμφωνα με τον Πίνακα V

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,040 = 0,96.$$

ii) Όμοια

$$P(Z \leq 7) = \Phi(7) = 0,867$$

β) Ισχύει

$$\begin{aligned} P(Z \geq \nu) < 0,15 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - P(Z \leq \nu) < 0,15 \\ &\Leftrightarrow \quad P(Z \leq \nu) > 0,85 \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi(\nu) > 0,85 > \varphi(6). \end{aligned}$$

Επομένως, (η $\Phi(z)$ είναι γνησίως αύξουσα)

$$\nu > 6.$$

Επομένως, ο μικρότερος φυσικός ν, ώστε η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον ν λάθη στη σελίδα αυτή να είναι μικρότερη από 15% είναι $\nu = 7$.

Λύση Άσκησης 5.20

α) Σύμφωνα με τον ορισμό της κοινής πυκνότητας πιθανότητας

$$\iint_D cxydxdy = 1 \tag{i}$$

όπου $D = \{(x, y) : x + y < 2,\ x > 0,\ y > 0\}$

$$\begin{aligned}\iint_D cxydxdy &= c\int_0^2 x\left(\int_0^{2-x} ydy\right)dx = c\int_0^2 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-x} dx \\ &= c\int_0^2 x\frac{(2-x)^2}{2} = \frac{2}{3}c\end{aligned}$$

οπότε η (i) δίνει

$$c = \frac{3}{2}.$$

β) Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.8, ισχύει

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(t,s)ds\right)dt \\ &= \int_0^x\left(\int_0^{2-t}\frac{3}{2}tsds\right)dt \\ &= \int_0^x t\left[\frac{3s^2}{4}\right]_0^{2-t} dt = \int_0^x t\frac{3(2-t)^2}{4}dt = \frac{3x^4}{16} - x^3 + \frac{3x^2}{2}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{Y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(t,s)dt\right)ds = \int_0^Y\left(\int_0^{2-y}\frac{3}{2}tsdt\right)ds \\ &= \frac{3y^4}{16} - y^3 + \frac{3y^2}{2}\end{aligned}$$

γ) i) Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.7, ισχύει

$$\begin{aligned}E(X^2Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2yf_{XY}(x,y)dx\right)dy \\ &= \int_0^2\left(\int_0^{2-y} x^2y\frac{3}{2}xydx\right)dy \\ &= \frac{3}{2}\int_0^2 Y^2\left(\int_0^{2-y} x^3dx\right)dy \\ &= \frac{3}{2}\int_0^2 Y^2\frac{(2-y)^4}{4}dy = \frac{3}{2}\frac{128}{105} = \frac{64}{95}.\end{aligned}$$

ii) Επίσης, σύμφωνα με τον Ορισμό 5.7, ισχύει

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$$

όπου

$$f_X(x) = \frac{F_X(x)}{dx} = \frac{3}{4}x^3 - 3x^2 + 3x,$$

οπότε

$$E(X) = \int_0^2 x(\frac{3}{4}x^3 - 3x^2 + 3x)dx = 0,8.$$

iii) Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.7, ισχύει

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2f_Y(y)dy,$$

όπου

$$f_Y(y) = \frac{F_Y(y)}{dy} = \frac{3}{4}y^3 - 3y^2 + 3y,$$

οπότε

$$E(Y^2) = \int_0^2 y^2 \left(\frac{3}{4}y^3 - 3y^2 + 3y\right) dy = 0,8.$$

Λύση Άσκησης 5.22

Αρχικά, υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς c. Σύμφωνα με τον ορισμό της κοινής πυκνότητας πιθανότητας

$$\iint_D f_{XY}(x,y)dxdy = 1$$

όπου $D = \{(x,y) : \ x+y<1, \ x>0 \ \text{ και } \ y>0\}$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} cxdydx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c\int_0^1 x[y]_0^{1-x}dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad c\int_0^1 x(1-x)dx = 1 \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{6}c = 1 \ \Leftrightarrow \ c = 6$$

α) Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.9, ισχύει

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(X)}, \qquad (i)$$

όπου $f_X(x)$ η περιθώρια πυκνότητα πιθανότητας της x, η οποία σύμφωνα με τον Ορισμό 5.6 είναι

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_0^{1-x} 6xdy = 6x[y]_0^{1-x} = 6x(1-x)$$

οπότε από την (i)

$$f_{Y|x}(y,x) = \frac{6x}{6x(1-x)} = \frac{1}{1-x}, \ 0<x<1$$

όμοια σύμφωνα με τον Ορισμό 5.9

$$f_{X/Y}(x,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

όπου

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_0^{1-y} 6xdx = 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y} = 3(1-y)^2$$

οπότε

$$f_{X/Y}(x,y) = \frac{6x}{3(1-y)^2} = \frac{2x}{(1-y)^2}, \ 0<y<1, \ 0<x<1$$

β) Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.16, ισχύει

$i)$
$$E(Y/x) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_{Y/X}(y/x)dy = \int_0^{1-x} y\frac{1}{1-x}dy = \frac{1-x}{2}$$

$ii)$
$$E(Y^2/x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{Y|x}(y,x)dy = \int_0^{1-x} y^2\frac{1}{1-x}dy = \frac{(1-x)^2}{3}$$

γ) Σύμφωνα με την αντίστοιχη της (5.12), ισχύει

$$Var(X|y) = E(X^2|y) - [E(X|y)]^2. \qquad (i)$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.16, ισχύει

$$E(X|Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{X|Y}dx = \int_0^{1-y} x\frac{2x}{(1-y)^2}dx = \frac{2(1-y)}{3}$$

και

$$E(X^2|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X/Y}(x/y)dx = \int_0^{1-y} x^2\frac{2x}{(1-y)^2}dx = \frac{(1-y)^2}{2}.$$

Έτσι η (i) δίνει

$$Var(X|y) = \frac{(1-y)^2}{2} - \left(\frac{2(1-y)}{3}\right)^2 = \frac{(1-y)^2}{6}$$

δ) $i)$

$$P(Y<1|x) = \int_{-\infty}^{1} f_{Y|X}(y|x)dy = \int_x^1 6xdy = 6x\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^1 = 3x - x^3,$$

ii)

$$P\left(Y<1|X>\frac{1}{2}\right)=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1}P\left(Y<1|x\right)f_X(x)dx}{P\left(X>\frac{1}{2}\right)} \qquad (iii)$$

Το ολοκλήρωμα του αριθμητή είναι

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}P(Y<1|x)f_X(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(3x-x^3)6x(1-x)dx=\frac{159}{320}.$$

και του παρονομαστή

$$P\left(X>\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}6x(1-x)dx=\frac{1}{2}$$

οπότε η (iii) γίνεται

$$P\left(Y<1|X>\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{159}{320}}{\frac{1}{2}}=\frac{318}{320}=0,994.$$

Λύση Άσκησης 5.25

Επειδή $\lambda = 30 > 10$, χρησιμοποιούμε την κανονική προσέγγιση της κατανομής της X

$$X \sim N(80, 80)$$

οπότε χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη της X τυποποιημένη μεταβλητή

$$Z = \frac{X - 80}{\sqrt{80}}$$

προκύπτει ότι:

α) η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} P(X < 100) &= P\left(Z < \frac{100-80}{\sqrt{80}}\right) \\ &= P(Z < 2,24) \\ &= \Phi(2,24) = 0,9875 \end{aligned}$$

β) Η πιθανότητα αυτή, σύμφωνα με την (4.38), είναι

$$\begin{aligned} P(X > 65) &= P\left(Z > \frac{65-80}{\sqrt{80}}\right) \\ &= P(Z > -1,68) = P(Z < 1,68) \\ &= \Phi(1,68) = 0,9535 \end{aligned}$$

Με τη χρήση της αντίστοιχης τυποποιημένης μεταβλητής της X

$$Z = \frac{X - 465,6}{\sqrt{96}}$$

η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} P(X \le 8 \cdot 60) &= P(X < 480) \\ &= P\left(Z < \frac{480-465,6}{\sqrt{96}}\right) \\ &= P(Z < 1,47) = \Phi(1,47) \\ &= 0,9292 \end{aligned}$$