Κεφάλαιο 8

Έλεγχοι υποθέσεων

Λύση Άσκησης 8.1

Ελέγχουμε την μηδενική υπόθεση (η μέση τιμή μ του βάρους X ενός τελάρου ροδάκινων είναι $5kg$)

$$H_0: \ \mu = 5kg$$

με εναλλακτική την

$$H_1: \ \mu < 5kg,$$

οπότε ο έλεγχος είναι μονόπλευρος. Επιλέξαμε αυτή την H_1, διότι ζητείται να ελέγξουμε αν η μέση τιμή μ είναι $5kg$ ή μικρότερη.
Επειδή το βάρος ακολουθεί κανονική κατανομή με γνωστή τυπική απόκλιση χρησιμοποιούμε το στατιστικό (8.3)

$$Z = \frac{\overline{X} - 5}{0,22/\sqrt{25}}, \qquad (i)$$

το οποίο ακολουθεί κανονική κατανομή με περιοχή απόρριψης της H_0 την

$$z < -z_{0,025}$$

(από τον πίνακα I ή τον πίνακα 4.1 βρίσκουμε ότι $z_{0,025} = 1,96$).
Από την (i) προκύπτει ότι η παρατηρούμενη τιμή του στατιστικού Z για το συγκεκριμένο δείγμα είναι

$$z = \frac{4,93 - 5}{0,22/\sqrt{25}} = -1,59.$$

Επειδή

$$z > -z_{0,025},$$

η H_0 δεν απορρίπτεται, οπότε δεν μπορούμε να απορρίψουμε από το δείγμα αυτό, σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,025$, ότι η μέση τιμή του βάρους ενός τελάρου ροδάκινων είναι $5kg$ και όχι μικρότερη.

Λύση Άσκησης 8.3

Αν $D = Y - X$, ελέγχουμε την μηδενική υπόθεση

$$H_0 : \mu_D = 0 \text{ (ίσες μέσες τιμές)}$$

με εναλλακτική την

$$H_1 : \mu_D < 0 \text{ (δηλαδή } \mu_Y < \mu_X\text{)},$$

οπότε ο έλεγχος είναι μονόπλευρος. Επιλέξαμε αυτή την H_1, διότι ζητείται να ελέγξουμε αν $\mu_Y < \mu_X$. Οι τιμές της διαφοράς των χρόνων είναι

$$d_i : \quad -16 \quad 3 \quad -4 \quad -19 \quad -13 \quad 1 \quad -25 \quad -6$$

και η μέση τιμή και τυπική απόκλιση των τιμών αυτών είναι (βλ.(5.57))

$$\overline{d} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} d_i = -9,875$$

και

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{8-1}\left(\sum_{1}^{8} d_i^2 - 8\overline{d}^2\right)} = 9,949,$$

οπότε η τιμή του στατιστικού (8.9) είναι

$$t = \frac{-9,875}{9,949/\sqrt{8}} = -2,807.$$

Από τον πίνακα III προκύπτει ότι $\quad t_{8-1;0,05} = t_{7;0,05} = 1,895,$

οπότε $\quad t < -t_{7;0,05}.$

Επομένως η H_0 απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας 5%, οπότε από το δείγμα αυτό συμπεράνουμε σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,05$ ότι η μέθοδος αυτή αυξάνει την ταχύτητα γραφής

Λύση Άσκησης 8.5

α) Ελέγχουμε την μηδενική υπόθεση ότι η μέση τιμή μ της κατανάλωσης καυσίμου X για το μοντέλο αυτό είναι ίση με $10,2lt$ ανά $100km$

$$H_0: \ \mu = 10,2$$

με εναλλακτική την

$$H_1: \ \mu > 10,2,$$

οπότε ο έλεγχος είναι μονόπλευρος (από δεξιά). Επιλέξαμε αυτή την H_1, διότι ζητείται να εξετάσουμε αν η μέση τιμή μ είναι μεγαλύτερη από $10,2lt$.
Επειδή το δείγμα είναι μεγάλο χρησιμοποιούμε (βλ. παρατ.8.5) το στατιστικό (8.4)

$$Z = \frac{\overline{X} - 10,2}{S/\sqrt{49}}, \qquad (i)$$

το οποίο ακολουθεί κανονική κατανομή με περιοχή απόρριψης της H_0 σε στάθμη σημαντικότητας 5%

$$z > z_{0,05} \ \text{ ή } \ z > 1,645$$

(από τον πίνακα Ι βρίσκουμε ότι $z_{0,05} = 1,645$).
Η παρατηρούμενη τιμή του Z για το δείγμα αυτό προκύπτει από την (i)

$$z = \frac{10,5 - 10,2}{0,98/\sqrt{49}} = 2,14.$$

Επειδή
$$z > z_{0,05},$$

η H_0 απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,05$, οπότε η μέση κατανάλωση καυσίμου για το αυτοκίνητο αυτό είναι μεγαλύτερη από $10,2lt$ ανά $100km$.
β) Η κρίσιμη τιμή του στατιστικού του ελέγχου αυτού σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,01$ είναι (βλ. πίνακα Ι)

$$z_{0,01} = 2,33$$

Επειδή
$$z < z_{0,01},$$

η H_0 δεν απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,01$, οπότε δεν μπορούμε να απορρίψουμε από το δείγμα αυτό ότι η μέση κατανάλωση καυσίμου για το μοντέλο αυτό είναι $10,2lt$ ανά $100km$ και όχι μεγαλύτερη.

Λύση Άσκησης 8.8

α) Αν p το ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων που παράγει η μηχανή, ελέγχουμε την υπόθεση

$$H_0: p = 0,04$$

με εναλλακτική την

$$H_1: p > 0,04,$$

οπότε ο έλεγχος είναι μονόπλευρος. Επιλέξαμε αυτή την H_1, διότι ζητείται να ελέγξουμε αν το ποσοστό ελαττωματικών αντικειμένων που παράγει η μηχανή είναι μεγαλύτερο του 4%.
Το ποσοστό ελαττωματικών αντικειμένων στο δείγμα αυτό είναι

$$\frac{y}{n} = \frac{11}{150} = 0,073,$$

οπότε η τιμή του στατιστικού (8.11) για το δείγμα αυτό είναι

$$z = \frac{0,073 - 0,04}{\sqrt{\dfrac{0,04(1-0,04)}{150}}} = 2,062.$$

Από τον πίνακα Ι ή τον πίνακα βρίσκουμε ότι

$$z_{0,025} = 1,96.$$

Επειδή

$$z > z_{0,025}$$

(βλ. παρατ. 8.25) η H_0 απορρίπτεται, οπότε σε στάθμη σημαντικότητας 2,5% το ποσοστό ελαττωματικών αντικειμένων που παράγει η μηχανή είναι μεγαλύτερο του 4% και η μηχανή χρειάζεται ρύθμισμα.

β) Η μικρότερη στάθμη σημαντικότητας για την οποία η μηχανή χρειάζεται ρύθμιση είναι ίση με την p-τιμή του παραπάνω ελέγχου η οποία, σύμφωνα με την παρατ. 8.37, είναι

$$p\text{−τιμή} = 1 - \Phi(2,062) = 1 - 0,980 = 0,02.$$

Επομένως η H_0 απορρίπτεται σε κάθε στάθμη σημαντικότητας μεγαλύτερη της 0,02 ή 2%, οπότε το ποσοστό ανεργίας είναι μεγαλύτερο του 10% σε κάθε στάθμη σημαντικότητας μεγαλύτερη της 2%.

Λύση Άσκησης 8.10

Αν p_1, p_2 οι αναλογίες των ψηφοφόρων του κόμματος στους δυο νομούς αντίστοιχα, ελέγχουμε την μηδενική υπόθεση

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0 \quad \text{(ίδια ποσοστά στους δυο νομούς)}$$

με εναλλακτική την

$$H_1 : p_1 - p_2 \neq 0 \quad \text{(διαφορετικά ποσοστά).}$$

Οι αναλογίες των ψηφοφόρων του κόμματος στα δυο δείγματα από τους δύο νομούς είναι

$$\frac{y_1}{n_1} = \frac{85}{400} = 0,213 \;\; \text{και} \;\; \frac{y_2}{n_2} = \frac{121}{600} = 0,202$$

και από την (8.126)

$$\overline{p} = \frac{85 + 121}{400 + 600} = 0,206$$

οπότε η τιμή του στατιστικού (8.13) είναι

$$z = \frac{0,213 - 0,202}{\sqrt{0,206(1 - 0,206)\left(\frac{1}{400} + \frac{1}{600}\right)}} = 0,423.$$

Από τον πίνακα I ή τον πίνακα 4.1 προκύπτει ότι

$$z_{0,1/2} = z_{0,05} = 1,645,$$

οπότε

$$z < z_{0,05}.$$

Επομένως η H_0 δεν απορρίπτεται, οπότε δεν μπορούμε να απορρίψουμε από το δείγμα αυτό σε στάθμη σημαντικότητας 5% ότι τα ποσοστά του κόμματος στους δυο νομούς είναι ίσα.

Λύση Άσκησης 8.12

Αν p_1, p_2 οι αναλογίες των υποψηφίων που έγραψαν κάτω από την βάση στους δυο νομούς αντίστοιχα, ελέγχουμε την μηδενική υπόθεση

$$H_0 : p_1 = p_2 \quad \text{(ίδια ποσοστά στους δυο νομούς)}$$

με εναλλακτική την

$$H_1 : p_1 < p_2 \quad \text{(μεγαλύτερο ποσοστό στον νομό II)}.$$

Οι αναλογίες των υποψηφίων που έγραψαν κάτω από την βάση στα δύο δείγματα είναι

$$\frac{y_1}{n_1} = \frac{72}{150} = 0,48 \;\; \text{και} \;\; \frac{y_2}{n_2} = \frac{131}{250} = 0,524$$

οπότε από την (8.13б) προκύπτει ότι

$$\overline{p} = \frac{72 + 131}{150 + 250} = 0,508.$$

Έτσι η τιμή του στατιστικού (8.13) είναι

$$z = \frac{0,48 - 0,524}{\sqrt{0,508(1 - 0,508)\left(\frac{1}{150} + \frac{1}{250}\right)}} = -0,852.$$

Από τον πίνακα I ή τον πίνακα 4.1 προκύπτει ότι

$$z_{0,05} = z_{0,05} = 1,645,$$

οπότε

$$z > -z_{0,05}.$$

Επομένως, η H_0 δεν απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,05$, οπότε δεν μπορούμε να απορρίψουμε από το δείγμα αυτό ότι τα ποσοστά των υποψηφίων που έγραψαν κάτω από την βάση είναι ίσα στους δύο νομούς.

Λύση Άσκησης 8.27

Αν μ_X, μ_Y οι μέσες τιμές των απορροφητικοτήτων του βαμβακερού και του συνθετικού νήματος X και Y, ελέγχουμε τη μηδενική υπόθεση

$$H_0:\ \mu_X - \mu_Y = 0$$

με εναλλακτική την

$$H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq 0,$$

οπότε ο έλεγχος είναι δίπλευρος. Επιλέξαμε αυτήν την H_1, διότι ζητείται να ελέγξουμε αν η απορροφητικότητα του βαμβακερού νήματος είναι διαφορετική από αυτή του συνθετικού νήματος, δηλαδή αν $\mu_X \neq \mu_Y$.

Επειδή οι X και Y ακολουθούν κανονικές κατανομές με την ίδια τυπική απόκλιση και τα δείγματα είναι μικρά, χρησιμοποιούμε το στατιστικό (8.8), το οποίο ακολουθεί κατανομή t με

$$n + m - 2 = 22 + 24 - 2 = 44 \quad \text{βαθμούς ελευθερίας}$$

και περιοχή απόρριψης της H_0 την (βλ. Παρατήρηση 8.17)

$$|t| > t_{44;0{,}01/2}$$

$$s_p = \sqrt{\frac{(22-1)0{,}012^2 + (24-1)0{,}014^2}{(22+24-2)}} = 0{,}013,$$

οπότε η δειγματική τιμή του στατιστικού του ελέγχου είναι

$$t = \frac{0{,}0148 - 0{,}014}{0{,}013\sqrt{\frac{1}{22} + \frac{1}{24}}} = 2{,}085.$$

Από τον Πίνακα III βρίσκουμε ότι

$$t_{44;0{,}005} = t_{\infty;0{,}005} = 2{,}576,$$

οπότε

$$|t| < t_{44;0{,}005}$$

Επομένως, η H_0 δεν απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας 1%, οπότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από το δείγμα αυτό ότι η απορροφητικότητα του βαμβακερού νήματος είναι διαφορετική από αυτή του συνθετικού νήματος.

Λύση Άσκησης 8.28

Αν p_1 και p_2 τα ποσοστά των κομμάτων Α και Β αντίστοιχα, ελέγχουμε την υπόθεση

$$H_0 : p_1 = p_2$$

με εναλλακτική την

$$H_1 : p_1 \neq p_2 \quad .$$

Οι αναλογίες ψηφοφόρων των κομμάτων στα δυο δείγματα είναι

$$\frac{y_1}{n_1} = \frac{40}{250} = 0,16 \ \text{ και } \ \frac{y_2}{n_2} = \frac{55}{400} = 0,138$$

και

$$\overline{p} = \frac{y_1 + y_2}{n_1 + n_2} = \frac{40 + 55}{250 + 400} = 0,146,$$

οπότε η παρατηρούμενη τιμή του στατιστικού (8.13) είναι

$$z = \frac{0,16 - 0,138}{\sqrt{0,146(1 - 0,146)\left(\frac{1}{250} + \frac{1}{400}\right)}} = 0,772$$

Από τον πίνακα Ι ή τον πίνακα 4.1 προκύπτει ότι

$$z_{0,05} = 1,645,$$

οπότε

$$z < z_{0,05}.$$

Επομένως, η H_0 δεν απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας 5%, οπότε δεν μπορούμε να απορρίψουμε από το δείγμα αυτό το ότι τα ποσοστά των κομμάτων Α και Β είναι ίσα.

Λύση Άσκησης 8.30

α) Ελέγχουμε τη μηδενική υπόθεση ότι η διακύμανση της συγκέντρωσης του συστατικού στο φάρμακο είναι $0,015gr^2$

$$H_0 : \sigma^2 = 2$$

με εναλλακτική την $$H_1 : \sigma^2 = 2,$$

επειδή ζητείται να εκτιμήσουμε αν η διακύμανση της συγκέντρωσης του συστατικού στο φάρμακο είναι $2mgr^2$.

Η παρατηρούμενη τιμή του στατιστικού (8.14) είναι

$$\chi^2 = \frac{(101-1)\cdot 2,77}{2} = 138,5.$$

Από τον Πίνακα ΙΙ προκύπτει ότι

$$\chi^2_{101-1;0,01/2} = \chi^2_{24;0,005} = 67,33,$$

και

$$\chi^2_{101-1;1-0,01/2} = \chi^2_{24;0,995} = 140:17,$$

οπότε

$$\chi^2_{101-1;0.01/2} < \chi^2_0 < \chi^2_{101-1;1-0.01/2},$$

Επομένως (βλ. Πίνακα 8.21), η H_0 δεν απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,01$, οπότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από το δείγμα αυτό ότι η διακύμανση της συγκέντρωσης του συστατικού στο φάρμακο δεν είναι $0,015$.

β) Η παρατηρούμενη τιμή του στατιστικού (8.14) για το δείγμα αυτό είναι

$$\chi^2 = \frac{(101-1)\cdot 2,83}{2} = 141,5$$

οπότε

$$\chi^2_0 > \chi^2_{100;1-0.01/2}$$

Επομένως (βλ. Πίνακα 8.21), η H_0 απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,01$, οπότε μπορούμε να συμπεράνουμε από το δείγμα αυτό ότι η διακύμανση της συγκέντρωσης του συστατικού στο φάρμακο δεν είναι $0,015$.