Κεφάλαιο 2

Πιθανότητες

Λύση Άσκησης 2.2

Δίνονται οι πιθανότητες

$$P(A) = 0,3, \; P(B) = 0,6 \; \text{ και } \; P(A \cup B) = 0,8$$

και ζητείται να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

1) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5, ισχύει

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,1$$

2) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.7, ισχύει

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,5$$

3) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, ισχύει

$$P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 0,9$$

4) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, ισχύει

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 0,2.$$

5) Σύμφωνα με την (1.15)

$$P(A' \cup B') = P((A \cap B)') = 0,9$$

6) Σύμφωνα με την (1.16)

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 0,2.$$

7)

$$\begin{aligned} P[(A \cup B) - (A \cap B)] &= P[(A - B) \cup (B - A)] \\ &= P(A - B) + P(B - A) = 0,7 \end{aligned}$$

(βλ. Ορισμό 2.2), αφού

$$\begin{aligned} P(A - B) &= P(A) - P(A \cap B) = 0,3 - 0,1 = 0,2 \\ P(B - A) &= P(B) - P(A \cap B) = 0,3 - 0,1 = 0,5 \end{aligned}$$

8)

$$P(A' \cap B) = P(B - A) = 0,5$$

9) Λόγω των (1.14) και (1.16),

$$P(A' - B) = P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 0,2.$$

10)

$$P(A' - B') = P(A' \cap B) = P(B - A) = 0,5.$$

11) Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2,

$$P((A - B) \cup (B - A)) = 0,7,$$

λόγω του (7).

αφού

$$P(A') = 1 - P(A) = 0,7.$$

12) Λόγω της (1.14),

$$P(A - B') = P(A \cap B) = 0,1$$

13) Ισχύει

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = 0,5,$$

αφού

$$P(A \cap B') = P(A - B) = 0,2$$

και

$$P(B') = 1 - P(B) = 0,4$$

14)

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 0,8,$$

Λύση Άσκησης 2.6

Το πλήθος των στοιχείων του δειγματοχώρου είναι

$$n(\Omega) = \Delta_3^5 = 60$$

α)

$$P(E_1) = 1 - P(E_1') = 1 - \frac{\Delta_3^4}{n(\Omega)} = 1 - \frac{24}{60} = \frac{36}{60}$$

β)

$$P(E_2) = \frac{\binom{3}{2} \cdot 2 \cdot 3}{n(\Omega)} = \frac{18}{60}$$

γ)

$$E_3 = E_1 \cup E_5$$

όπου

$$E_5 : \text{“Η λέξη περιέχει το Β”}$$

οπότε

$$P(E_3) = P(E_1 \cup E_5) = P(E_1) + P(E_5) - P(E_1 \cap E_5)$$

όπου

$$E_1 \cap E_5 = E_2$$

και

$$P(E_5) = P(E_1)$$

οπότε

$$P(E_3) = 2P(E_1) - P(E_2) = 2 \cdot \frac{36}{60} - \frac{18}{60} = \frac{54}{60}$$

δ)

$$E_4 = E_1 - E_5$$

οπότε

$$P(E_4) = P(E_1 - E_5) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_5) = P(E_1) - P(E_2) = \frac{36}{60} - \frac{18}{60} = \frac{18}{60}$$

Λύση Άσκησης 2.8

Το πλήθος των στοιχείων του δειγματοχώρου είναι
$$n(\Omega) = 8^6$$
α) Το πλήθος των λέξεων που δεν περιέχουν Α είναι ίσο με το πλήθος των λέξεων των 6 γραμμάτων που γίνονται από τα 7 γράμματα Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ με επανάληψη, δηλαδή
$$n(E_1) = 7^6$$
οπότε
$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(\Omega)} = \frac{7^6}{8^6} = \left(\frac{7}{8}\right)^6 = 0,449$$
β)
$$P(E_2) = 1 - P(E_2') \tag{i}$$
όπου
$$E_2' : \text{“η λέξη δεν περιέχει Α”} = E_1$$
οπότε σύμφωνα με το (α) η (i) δίνει
$$P(E_2) = 1 - P(E_2') = 1 - \frac{7^6}{8^6} = 1 - 0,449 = 0,551$$
γ) Το ενδεχόμενο E_3 γράφεται
$$E_3 = E_1 \cup E_k$$
όπου
$$E_k : \text{“η λέξη περιέχει ακριβώς ένα Α”}$$
οπότε ($E_1 \cap E_k = \varnothing$)
$$P(E_3) = P(E_1) + P(E_k) \tag{ii}$$
Το πλήθος των λέξεων που περιέχουν ακριβώς ένα Α είναι
$$n(E_k) = 6 \cdot 7^5$$
οπότε
$$P(E_k) = \frac{n(E_k)}{n(\Omega)} = \frac{6 \cdot 7^5}{8^6} = 0,385$$
Έτσι λόγω και του (α), η (ii) δίνει
$$P(E_3) = \left(\frac{7}{8}\right)^6 + \frac{6 \cdot 7^5}{8^6} = 0,449 + 0,385 = 0,834$$
δ) Το πλήθος των λέξεων που περιέχουν ακριβώς δύο Α είναι
$$n(E_4) = \binom{6}{2} 7^4$$
οπότε
$$P(E_4) = \frac{\binom{6}{2} 7^4}{8^6} = 0,137$$
ε) Το πλήθος των λέξεων που περιέχουν ένα Α και ένα Β είναι
$$n(E_5) = \binom{6}{2} \cdot 2 \cdot 6^4$$
οπότε
$$P(E_5) = \frac{n(E_5)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{6}{2} \cdot 2 \cdot 6^4}{8^6} = 0,148$$
στ) Το ενδεχόμενο E_6 είναι
$$E_6 = E_2 \cap E_{2B}$$
όπου
$$E_{2B} : \text{“η λέξη περιέχει Β”}$$
οπότε λόγω του προσθετικού νόμου

$$P(E_6) = P(E_2) + P(E_{2B}) - P(E_2 \cup E_{2B}) \qquad (iii)$$

Ισχύει

$$P(E_2 \cup E_{2B}) = 1 - P(E_2 \cup E_{2B})' \qquad (iv)$$

όπου

$$(E_2 \cup E_{2B})' : \text{“η λέξη δεν περιέχει ούτε Α ούτε Β”}$$

οπότε

$$P(E_2 \cup E_{2B})' = \frac{6^6}{8^6}$$

Έτσι, η (iv) δίνει

$$P(E_2 \cup E_{2B}) = 1 - \frac{6^6}{8^6}$$

οπότε λόγω και του (β) η (iii) δίνει

$$P(E_6) = 2\left(1 - \frac{7^6}{8^6}\right) - \left(1 - \frac{6^6}{8^6}\right) = 0,28$$

ζ) Το ενδεχόμενο E_7 είναι

$$E_7 = E_2 - E_{2B}$$

όπου

$$E_{2B} : \text{“η λέξη περιέχει τουλάχιστον ένα Β”}$$

οπότε

$$P(E_7) = P(E_2) - P(E_2 \cap E_{2B}) = P(E_2) - P(E_6) = 0,551 - 0,28 = 0,271$$

η) Το ενδεχόμενο E_8 είναι

$$E_8 = (E_k - E_{2B}) \cup (E_{kB} - E_2)$$

όπου

$$E_2 : \text{“η λέξη περιέχει τουλάχιστον ένα Α”}$$

και

$$E_k : \text{“η λέξη περιέχει ακριβώς ένα Α”}$$

$$E_{2B} : \text{“η λέξη περιέχει τουλάχιστον ένα Β”}$$

και

$$E_{kB} : \text{“η λέξη περιέχει ακριβώς ένα Β”}$$

Προφανώς

$$(E_k - E_{2B}) \cap (E_{kB} - E_2) = \varnothing$$

οπότε

$$\begin{aligned} P(E_8) &= P(E_k - E_{2B}) + P(E_{kB} - E_2) \\ &= P(E_k) - P(E_k \cap E_{2B}) + P(E_{kB}) - P(E_{kB} \cap E_2) \end{aligned} \qquad (v)$$

Επειδή

$$E_k \cap E_{2B} : \text{“η λέξη περιέχει ακριβώς ένα Α και περιέχει Β”}$$

ισχύει

$n(E_k \cap E_{2B}) = 6\cdot$ πλήθος λέξεων των 5 γραμμάτων από τα Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ που έχουν τουλάχιστον ένα Β $= 6 \cdot ($ πλήθος λέξεων των 5 γραμμάτων από τα Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ$-$ πλήθος λέξεων των 5 γραμμάτων από τα Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ$) = 6(7^5 - 6^5)$

οπότε

$$P(E_k \cap E_{2B}) = \frac{6(7^5 - 6^5)}{8^6}$$

Όμοια

$$P(E_{kB} \cap E_2) = \frac{6(7^5 - 6^5)}{8^6}$$

Έτσι, η (v), λόγω και της λύσης του (γ) δίνει

$$
\begin{aligned}
P(E_8) &= 2P(E_k) - 2P(E_k \cap E_{2B}) \\
&= 2 \cdot \frac{6 \cdot 7^5}{8^6} - 2 \cdot \frac{6(7^5 - 6^5)}{8^6} \\
&= 2 \cdot 0,385 - 2 \cdot 0,207 = 0,357
\end{aligned}
$$

Λύση Άσκησης 2.9

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A : " κερδίζει ο παίχτης A" και B: " κερδίζει ο παίχτης B".

Δίνονται

$$P(A) = \frac{30}{100}, \quad P(B) = \frac{10}{100} \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = \frac{15}{100}$$

Ζητείται να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

α) Σύμφωνα με το θεώρημα 2.5, ισχύει

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{55}{100}$$

β) Σύμφωνα με το θεώρημα 2.1, ισχύει

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cap B) = \frac{45}{100}$$

γ)

$$P\left[(A - B) \cup (B - A)\right] = P(A - B) + P(B - A) = \frac{40}{100}$$

όπου

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{15}{100}$$

και

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{25}{100}$$

δ)

$$P(B - A) = \frac{25}{100}$$

ε)

$$P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = \frac{85}{100}$$

στ)

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = \frac{45}{100}$$

ζ)

$$P(A' \cup B') = P((A \cap B)') = \frac{85}{100}$$

Λύση Άσκησης 2.10

α) $(6-1)! = 5!$

β)
$$1 - \frac{(3-1)!3!}{5!} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

Λύση Άσκησης 2.27

α) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_a : \text{“ Οι επιλεγμένες σφαίρες είναι μαύρες”},$$

είναι

$$P(E_a) = \frac{n(E_a)}{n(\Omega)}$$

όπου

$$n(\Omega) = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = 36$$

το πλήθος των στοιχείων του δειγματοχώρου Ω (πλήθος διάδων που φτιάχνονται από τις 9 σφαίρες) και

$$n(E_a) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10,$$

το πλήθος των στοιχείων του E_a (πλήθος διάδων που φτιάχνονται από τις 5 μαύρες σφαίρες). Επομένως

$$P(E_a) = \frac{10}{36}$$

β) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_\beta : \text{“ Οι επιλεγμένες σφαίρες είναι διαφορετικού χρώματος”},$$

είναι

$$P(E_\beta) = \frac{n(E_\beta)}{n(\Omega)}$$

όπου $n(E_\beta)$ το πλήθος των διάδων στις οποίες οι σφαίρες είναι διαφορετικού χρώματος, το οποίο είναι ίσο με

$$n(E_\beta) = 4 \cdot 5 = 20.$$

Επομένως

$$P(E_\beta) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

γ) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_\gamma : \text{“ Τουλάχιστον μια από τις επιλεγμένες σφαίρες είναι μαύρη ”},$$

είναι

$$P(E_\gamma) = 1 - P(E'_\gamma),$$

όπου

$$n(E'_\gamma) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

το πλήθος στοιχείων του ενδεχομένου

$$E'_\gamma : \text{“ Οι επιλεγμένες σφαίρες είναι άσπρες ”},$$

οπότε

$$P(E_\gamma) = 1 - P(E'_\gamma) = 1 - \frac{6}{36} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Λύση Ἀσκησης 2.30

α) Το ενδεχόμενο

$$E_a : \text{“ Ακριβώς μία από τις δύο επιλεγμένες σφαίρες είναι άσπρη”},$$

γράφεται

$$E_a = A_1M_2M_3 \cup M_1A_2M_3 \cup M_1M_2A_3,$$

όπου A_i : “ Η i−επιλεγμένη σφαίρα είναι άσπρη”, $i = 1, 2, 3$

όπου M_i : “ Η i−επιλεγμένη σφαίρα είναι μαύρη”, $i = 1, 2, 3$.

Τα ενδεχόμενα $A_1M_2M_3, M_1A_2M_3$ και $M_1M_2A_3$ είναι ξένα μεταξύ τους, οπότε

$$P(E_a) = P(A_1M_2M_3) + P(M_1A_2M_3) + P(M_1M_2A_3), \tag{i}$$

Επειδή η πρώτη σφαίρα και η δεύτερη σφαίρα επανατοποθετούνται, οι πιθανότητες των ενδεχομένων A_i και M_i είναι

$$n(A_i) = \frac{8}{14} \text{ και } n(M_i) = \frac{6}{14},$$

και τα ενδεχόμενα A_1, M_2, M_3 είναι ανεξάρτητα, οπότε

$$P(A_1M_2M_3) = P(A_1)P(M_2)P(M_3) = \frac{8}{14}\frac{6}{14}\frac{6}{14} = 0,105.$$

Ὁμοια
$$P(M_1A_2M_3) = P(M_1M_2A_3) = 0,105,$$

οπότε η (i) δίνει

$$P(E_a) = 3 \cdot 0,105 = 0,315.$$

β) Η πιθανότητα του ενδεχομένου
E_β: “ τουλάχιστον μια από τις επιλεγμένες σφαίρες είναι άσπρη ” είναι

$$P(E_\beta) = 1 - P(E'_\beta) \tag{ii}$$

όπου

$$E'_\beta = M_1M_2M_3$$

και τα ενδεχόμενα M_1, M_2, M_3 είναι ανεξάρτητα, οπότε

$$P(E'_\beta) = P(M_1) \cdot P(M_2) \cdot P(M_3) = \frac{6}{14} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{6}{14} = \frac{216}{2744} = 0,079$$

οπότε η (ii) δίνει

$$P(E_\beta) = 1 - 0,079 = 0,921$$

γ) Η πιθανότητα του ενδεχομένου
E_γ: “ το πολύ μια σφαίρα είναι άσπρη ” είναι

$$\begin{aligned}
P(E_\gamma) &= P(A_1M_1M_3 \cup M_1A_2M_3 \cup M_1M_2A_3 \cup M_1M_2M_3) \\
P(E_\gamma) &= P(A_1)P(M_1)P(M_3) + P(M_1)P(A_2)P(M_3) + P(M_1)P(M_2)P(A_3) \\
&\quad + P(M_1)P(M_2)P(M_3) \\
&= 3 \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{6}{14} + \left(\frac{6}{14}\right)^3 \\
&= \frac{864}{2744} + \frac{216}{2744} = \frac{1080}{2744} = 0,39
\end{aligned}$$

δ) Η πιθανότητα του ενδεχομένου
E_δ: “ η πρώτη σφαίρα είναι άσπρη ή η δεύτερη είναι μαύρη ”

$$P(E_\delta) = 1 - P(E'_\delta) \tag{iv}$$

όπου

$$E'_\delta = M_1A_2A_3 \cup M_1A_2M_3$$

τα ενδεχόμενα $M_1A_2A_3$ και $M_1A_2M_3$ είναι ξένα μεταξύ τους, επομένως

$$\begin{aligned} P(E'_\delta) &= P(M_1A_2A_3) + P(M_1A_2M_3) \\ P(E'_\delta) &= P(M_1)P(A_2)P(A_3) + P(M_1)P(A_2)P(M_3) \\ P(E'_\delta) &= \frac{6}{14}\cdot\frac{8}{14}\cdot\frac{8}{14} + \frac{6}{14}\cdot\frac{8}{14}\cdot\frac{6}{14} \\ P(E'_\delta) &= \frac{384}{2744} + \frac{288}{2744} = 0,245 \end{aligned}$$

οπότε η (iv) δίνει

$$P(E_\delta) = 1 - 0,245 = 0,755$$

ε) Το ενδεχόμενο
E_ϵ: “ καμιά από τις δυο σφαίρες να μην είναι άσπρη ” γράφεται

$$E_\epsilon = M_1M_2M_3 \cup M_1M_2A_3$$

του οποίου η πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} P(E_\epsilon) &= P(M_1M_2M_3) + P(M_1M_2A_3) \\ &= P(M_1)P(M_2)P(M_3) + P(M_1)P(M_2)P(A_3) \\ &= 0,079 + 0,105 = 0,184 \end{aligned}$$

στ) Το ενδεχόμενο

$E_{\sigma\tau}$: “ τουλάχιστον δύο από τις τρεις σφαίρες είναι άσπρες ”

γράφεται

$$E_{\sigma\tau} = A_1A_2M_3 \cup A_1M_2A_3 \cup M_1A_2A_3 \cup A_1A_2A_3$$

τα ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους, επομένως

$$\begin{aligned} P(E_{\sigma\tau}) &= P(A_1A_2M_3) + P(A_1M_2A_3) + P(M_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) \\ &= 3\cdot\left(\frac{8}{14}\right)^2\cdot\frac{6}{14} + \left(\frac{8}{14}\right)^3 \\ &= \frac{1152}{2744} + \frac{512}{2744} = \frac{1664}{2744} = 0,61 \end{aligned}$$

ζ) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

E_ζ: “ Το πολύ δύο από τις τρεις σφαίρες είναι άσπρες ”

γράφεται ως

$$P(E_\zeta) = 1 - P(E'_\zeta) = 1 - (\frac{8}{14})^3 = \frac{2232}{2744} = 0,81$$

Λύση Άσκησης 2.31

Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E : \text{“ Ο ’κης κάθεται δίπλα στη Λίζα”},$$

είναι

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

όπου

$$n(\Omega) = 6!$$

το πλήθος των στοιχείων του δειγματοχώρου Ω (πλήθος μεταθέσεων 6 αντικειμένων) και

$$n(E) = 5 \cdot 2 \cdot 4!,$$

το πλήθος των τρόπων με τους οποίους ο ’κης κάθεται δίπλα στη Λίζα. Επομένως

$$P(E) = \frac{5 \cdot 2 \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{3}$$

Λύση Άσκησης 2.32

Το πλήθος τρόπων για την επιλογή της επιτροπής είναι ίσο με το γινόμενο του αριθμού τρόπων με τους οποίους 4 κορίτσια επιλέγονται από 15 (συνδιασμοί χωρίς επανάληψη των 15 ανά 4) επί του αριθμού τρόπων με τους οποίους 3 αγόρια επιλέγονται από 11 (συνδιασμοί χωρίς επανάληψη των 11 ανά 3)

$$\binom{15}{4} = \binom{11}{3}$$

Λύση Άσκησης 2.33

α) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_a : \text{“ Και τα πέντε φύλλα είναι κούπες”},$$

είναι

$$P(E_a) = \frac{n(E_a)}{n(\Omega)}$$

όπου

$$n(\Omega) = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = 2598960$$

το πλήθος των στοιχείων του δειγματοχώρου Ω (πλήθος πεντάδων που φτιάχνονται από τα 52 φύλλα) και

$$n(E_a) = \binom{13}{5} = \frac{13!}{5!8!} = 1287,$$

το πλήθος των στοιχείων του E_a (πλήθος πεντάδων που φτιάχνονται από τις 13 κούπες). Επομένως

$$P(E_a) = \frac{1287}{2598960} = 0,000495.$$

β) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_\beta : \text{“ Η επιλεγμένη πεντάδα είναι τρεις άσσοι και δύο δεκάρια”},$$

είναι

$$P(E_\beta) = \frac{n(E_\beta)}{n(\Omega)}.$$

Το πλήθος των στοιχείων του E_β είναι (τρεις άσσοι από τους 4 και δύο δεκάρια από τα 4)

$$n(E_\beta) = \binom{4}{3}\binom{4}{2} = \frac{4!}{3!1!}\frac{4!}{2!2!} = 4 \cdot 6 = 24,$$

Επομένως

$$P(E_a) = \frac{24}{2598960} = 9,23 \cdot 10^{-6}.$$

γ) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_\gamma : \text{“ προκύπτουν δύο ντάμες, δύο πεντάρια και ένας ρήγας”},$$

είναι

$$P(E_\gamma) = \frac{n(E_\gamma)}{n(\Omega)}.$$

Το πλήθος των στοιχείων του E_γ είναι (δύο ντάμες από τις 4, δύο πεντάρια από τα 4 και ένας ρήγας από τους 4)

$$n(E_\gamma) = \binom{4}{2}\binom{4}{2} \cdot 4 = \frac{4!}{2!2!}\frac{4!}{2!2!} \cdot 4 = 144,$$

Επομένως

$$P(E_\gamma) = \frac{144}{2598960} = 5,54 \cdot 10^{-5}.$$

Λύση Άσκησης 2.34

$$\begin{aligned}
\Delta_k^{n-1} + k\Delta_{k-1}^{n-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} + k\frac{(n-1)!}{[n-1-(k-1)]!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} + k\frac{(n-1)!}{(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} + k\frac{(n-1)!}{(n-k)(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\left(1 + \frac{k}{(n-k)}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\frac{n}{(n-k)} \\
&= \frac{(n-1)!n}{(n-k)(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!} \\
&= \Delta_k^n
\end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 2.35

Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E : \text{“ Οι 4 οδηγοί βάζουν βενζίνη σε δύο πρατήρια”}$$

είναι

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)},$$

όπου

$$n(\Omega) = 6^4$$

(αριθμός τρόπων κατανομής 4 διακριτών σφαιριδίων σε 6 κελιά) και

$$n(E) = \binom{6}{2} 2^4 = \frac{6!}{2!4!} 2^4 = 15 \cdot 2^4$$

ο αριθμός τρόπων κατανομής 4 διακριτών σφαιριδίων σε 2 από τα 6 κελιά,

οπότε

$$P(E) = \frac{15 \cdot 2^4}{6^4} = 15 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 0,185.$$

Λύση Άσκησης 2.36

Το πλήθος λέξεων των πέντε γραμμάτων που φτιάχνονται από τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ χωρίς επανάληψη είναι ίσο με Δ_5^{10}, το πλήθος λέξεων των πέντε γραμμάτων που φτιάχνονται από τα Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ χωρίς επανάληψη είναι Δ_5^9 και το πλήθος λέξεων των τεσσάρων γραμμάτων που φτιάχνονται από τα Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ χωρίς επανάληψη είναι Δ_4^9. Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι

$$\Delta_5^{10} = \Delta_5^9 + 5\Delta_4^9,$$

το οποίο δείχνουμε στην Άσκηση 2.34.

Λύση Άσκησης 2.37

α) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_a : \text{“Η πινακίδα περιέχει τα γράμματα } A, B, C\text{”}$$

είναι

$$P(E_a) = \frac{n(E_a)}{n(\Omega)},$$

όπου $$n(\Omega) = 26^3 \cdot 10^3$$

(αριθμός διατάξεων των 26 γραμμάτων ανά 3 με επανάληψη επί το πλήθος διατάξεων των 10 ψηφίων ανά 3 με επανάληψη)

και $$n(E_a) = 3^3 \cdot 10^3$$

(αριθμός διατάξεων των 3 γραμμάτων A, B, C ανά 3 με επανάληψη επί το πλήθος διατάξεων των 10 ψηφίων ανά 3 με επανάληψη),

οπότε $$P(E_a) = \frac{3^3 \cdot 10^3}{26^3 \cdot 10^3} = \left(\frac{3}{26}\right)^3 = 0,0015.$$

β) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_\beta : \text{“Η πινακίδα περιέχει τα γράμματα } P, Q, R \text{ χωρίς επανάληψη”}$$

είναι $$P(E_\beta) = \frac{n(E_\beta)}{n(\Omega)},$$

όπου $$n(E_\beta) = 3! \cdot 10^3$$

(αριθμός μεταθέσεων των 3 γραμμάτων P, Q, R επί το πλήθος διατάξεων των 10 ψηφίων ανά 3 με επανάληψη),

οπότε $$P(E_\beta) = \frac{3! \cdot 10^3}{26^3 \cdot 10^3} = \frac{3!}{26^3} = 0,00034.$$

γ) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_\gamma : \text{“Η πινακίδα περιέχει τα γράμματα } A, B \text{ και τα ψηφία 0, 1”}$$

είναι $$P(E_\gamma) = \frac{n(E_\gamma)}{n(\Omega)},$$

όπου $$n(E_\gamma) = (26^3 - 24^3)(10^3 - 8^3)$$

(αριθμός διατάξεων των 26 γραμμάτων που περιέχουν τα A, B, ανά 3 με επανάληψη, επί το πλήθος διατάξεων ανά 3 με επανάληψη των 10 ψηφίων που περιέχουν τα 0 και 1),

οπότε

$$\begin{aligned} P(E_\gamma) &= \frac{(26^3 - 24^3)(10^3 - 8^3)}{26^3 \cdot 10^3} = \left(1 - \left(\frac{24}{26}\right)^3\right)\left(1 - \left(\frac{8}{10}\right)^3\right) \\ &= 0,104. \end{aligned}$$

δ) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_\delta : \text{“Η πινακίδα περιέχει τα } A, B, C \text{ και τα 7, 8, 9 χωρίς επανάληψη”}$$

είναι

$$P(E_\delta) = \frac{n(E_\delta)}{n(\Omega)},$$

όπου $$n(E_\delta) = 3! \cdot 3!$$

(αριθμός μεταθέσεων των 3 γραμμάτων P, Q, R επί αριθμός μεταθέσεων των 3 ψηφίων 7, 8, 9),

οπότε

$$P(E_\delta) = \frac{3! \cdot 3!}{26^3 \cdot 10^3} = 2,05 \cdot 10^{-6}$$

Λύση Άσκησης 2.38

α) Το ενδεχόμενο

$$E_a : \text{“Κερδίζει ο παίκτης Α”}$$

γράφεται

$$E_a = E_{a1} \cup E_{a2} \cup \ldots$$

όπου

$$E_{ai} : \text{“Κερδίζει ο παίκτης Α στην } i\text{–ρίψη”}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Επειδή τα ενδεχόμενα E_{ai} είναι ξένα μεταξύ τους,

$$P(E_a) = P(E_{a1}) + P(E_{a2}) + \ldots \tag{i}$$

Επειδή η πιθανότητα επιτυχίας σε μια ρίψη είναι $\frac{1}{4}$ και αποτυχίας $\frac{3}{4}$,

$$P(E_{a1}) = \frac{1}{4}.$$

Επίσης, επειδή το E_{a2} γράφεται ως

$$E_{a2} : \text{“Και οι 3 παίκτες αποτυγχάνουν στην πρώτη ρίψη και ο Α επιτυγχάνει στην δεύτερη”},$$

$$P(E_{a2}) = \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{4}.$$

Όμοια

$$P(E_{a3}) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^6 \frac{1}{4},$$

οπότε η (i) δίνει

$$\begin{aligned} P(E_a) &= \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^6 \frac{1}{4} + \ldots \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^6 + \ldots\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{4}\right)^3} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{37}{64}} \\ &= \frac{16}{37} \end{aligned}$$

β) Όμοια προκύπτει ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_\beta : \text{“Κερδίζει ο παίκτης Β”}$$

είναι

$$P(E_\beta) = P(E_{\beta1}) + P(E_{\beta2}) + \ldots \tag{ii}$$

Επίσης, επειδή το $E_{\beta2}$ γράφεται ως

$$E_{\beta1} : \text{“Ο παίκτης Α αποτυγχάνει στην πρώτη ρίψη και ο Β επιτυγχάνει στην πρώτη ρίψη”},$$

$$P(E_{\beta1}) = \frac{3}{4}\frac{1}{4}.$$

Επίσης, επειδή το $E_{\beta2}$ γράφεται ως

$$E_{\beta2} : \text{“Και οι 3 παίκτες αποτυγχάνουν στην πρώτη ρίψη, ο Α αποτυγχάνει στην δεύτερη και ο Β επιτυγχάνει στην δεύτερη”},$$

$$P(E_{\beta2}) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{3}{4}\frac{1}{4}.$$

Όμοια

$$P(E_{\beta3}) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{3}{4}\frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^6 \frac{3}{4}\frac{1}{4},$$

οπότε

$$\begin{aligned}
P(E_\beta) &= \frac{3}{4}\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{3}{4}\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^6 \frac{3}{4}\frac{1}{4} + \ldots \\
&= \frac{3}{4}\frac{1}{4}\left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^6 + \ldots\right) \\
&= \frac{3}{4}\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3} \\
&= \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{\frac{37}{64}} \\
&= \frac{12}{37}
\end{aligned}$$

γ) Ὁμοια προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
P(E_\gamma) &= \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^6 \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4} + \ldots \\
&= \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4}\left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^6 + \ldots\right) \\
&= \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3} \\
&= \frac{9}{64} \cdot \frac{64}{37} \\
&= \frac{9}{37}
\end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 2.39

α) Το ενδεχόμενο

$$E : \text{“ Η μία χάντρα είναι άσπρη και η άλλη μαύρη”},$$

γράφεται

$$E = A_1 M_2 \cup M_1 A_2,$$

όπου A_i : “ Η i–επιλεγμένη σφαίρα είναι άσπρη”, $i = 1, 2$

όπου M_i : “ Η i–επιλεγμένη σφαίρα είναι μαύρη”, $i = 1, 2.$

Τα ενδεχόμενα $A_1 M_2$ και $M_1 A_2$ είναι ξένα μεταξύ τους, οπότε

$$P(E) = P(A_1 M_2) + P(M_1 A_2), \qquad (i)$$

Επειδή η πρώτη σφαίρα επανατοποθετείται, οι πιθανότητες των ενδεχομένων A_i και M_i είναι

$$n(A_i) = \frac{5}{9} \text{ και } n(M_i) = \frac{4}{9},$$

και τα ενδεχόμενα A_1, M_2 είναι ανεξάρτητα, οπότε

$$P(A_1 M_2) = P(A_1)P(M_2) = \frac{5}{9}\frac{4}{9} = 0,247.$$

Όμοια

$$P(M_1 A_2) = 0,247,$$

οπότε η (i) δίνει

$$P(E) = 2 \cdot 0,247 = 0,494.$$

β) Στην περίπτωση αυτή (μη επανατοποθέτηση) το πλήθος των στοιχείων του δειγματοχώρου Ω είναι ίσο με το πλήθος διάδων που φτιάχνονται από τις 9 χάντρες

$$n(\Omega) = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = 36$$

και το πλήθος των στοιχείων του E είναι ίσο με το πλήθος διάδων χαντρών διαφορετικού χρώματος

$$n(E) = 4 \cdot 5 = 20,$$

Επομένως

$$P(E) = \frac{20}{36} = 0,556.$$

Λύση Άσκησης 2.40

Το πλήθος των λέξεων με 1,2,3,4 ή 5 γράμματα που μπορούμε να φτιάξουμε με τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ, Ε χωρίς επανάληψη είναι

$$5 + \Delta_2^5 + \Delta_3^5 + \Delta_4^5 + 5! = 5 + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{1!} + 5! = 325.$$

Λύση Άσκησης 2.41

Επειδή η λέξη αυτή των 8 γραμμάτων περιέχει 2 Ι και 2 Ο, με τα γράμματα της μπορούμε να σχηματίσουμε

$$\frac{8!}{2!2!} = 10080.$$

Λύση Άσκησης 2.42

α) i) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_1 : \text{“Καλούνται οι δύο γονείς”}$$

είναι

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(\Omega)}$$

όπου

$$\begin{aligned} n(\Omega) &= \text{αριθμός συνδυασμών 10 ατόμων ανά 4} \\ &= \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} \\ &= 210 \\ n(E_1) &= \text{αριθμός συνδυασμών 8 ατόμων (παιδιά) ανά 2} \\ &= \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} \\ &= 28, \end{aligned}$$

οπότε

$$P(E_1) = \frac{28}{210} = 0,133.$$

ii) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_2 : \text{“Καλείται ένας από τους δύο γονείς”}$$

είναι

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(\Omega)}$$

όπου

$$\begin{aligned} n(E_2) &= 2 \cdot \text{αριθμός συνδυασμών 8 ατόμων (παιδιά) ανά 3} \\ &= 2\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} \\ &= 2 \cdot 56 = 112, \end{aligned}$$

οπότε

$$P(E_2) = \frac{112}{210} = 0,533.$$

iii) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_3 : \text{“Δεν καλείται κανένας από τους δύο γονείς”}$$

είναι

$$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(\Omega)}$$

όπου

$$\begin{aligned} n(E_3) &= \text{αριθμός συνδυασμών 8 ατόμων (παιδιά) ανά 4} \\ &= \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} \\ &= 70, \end{aligned}$$

οπότε

$$P(E_3) = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}.$$

Λύση Άσκησης 2.43

Το πλήθος των στοιχείων του δειγματοχώρου είναι (πλήθος διατάξεων 24 γραμμάτων σε τριάδες με επανάληψη επί 9 (το πρώτο ψηφίο είναι 1,2,....,9) επί πλήθος διατάξεων 10 ψηφίων σε τριάδες με επανάληψη (τα άλλα 3 ψηφία του αριθμού)

$$n(\Omega) = 24^3 \cdot 9 \cdot 10^3.$$

α) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου

$$E_a : \text{“Η πινακίδα ξεκινάει με Α”}$$

είναι (πλήθος διατάξεων 24 γραμμάτων σε διάδες με επανάληψη επί 9 (για τα ψηφία 1,2,....,9) επί πλήθος διατάξεων 10 ψηφίων σε τριάδες με επανάληψη)

$$n(E_a) = 24^2 \cdot 9 \cdot 10^3,$$

οπότε η πιθανότητα του είναι

$$P(E_a) = \frac{n(E_a)}{n(\Omega)} = \frac{24^2 \cdot 9 \cdot 10^3}{24^3 \cdot 9 \cdot 10^3} = \frac{1}{24} = 0,042.$$

β) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_\beta : \text{“Η πινακίδα περιέχει τουλάχιστον ένα Α”}$$

είναι
$$P(E_\beta) = 1 - P(E'_\beta),$$

όπου
$$E'_\beta : \text{“Η πινακίδα δεν περιέχει κανένα Α”}.$$

Το πλήθος στοιχείων του E'_β είναι (πλήθος διατάξεων των 23 γραμμάτων (πλήν του Α) σε τριάδες με επανάληψη επί 9 (για τα ψηφία 1,2,....,9) επί πλήθος διατάξεων 10 ψηφίων σε τριάδες με επανάληψη)

$$n(E'_\beta) = 23^3 \cdot 9 \cdot 10^3,$$

οπότε

$$\begin{aligned} P(E_\beta) &= 1 - \frac{n(E'_\beta)}{n(\Omega)} = 1 - \frac{23^3 \cdot 9 \cdot 10^3}{24^3 \cdot 9 \cdot 10^3} = 1 - \left(\frac{23}{24}\right)^3 \\ &= 0,120. \end{aligned}$$

γ) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου

$$E_\gamma : \text{“Η πινακίδα περιέχει ακριβώς ένα Α”}$$

είναι
$$n(E_\gamma) = 3 \cdot 23^2 \cdot 9 \cdot 10^3,$$

οπότε η πιθανότητα του είναι

$$P(E_\gamma) = \frac{n(E_\gamma)}{n(\Omega)} = \frac{3 \cdot 23^2 \cdot 9 \cdot 10^3}{24^3 \cdot 9 \cdot 10^3} = 0,115.$$

δ) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_\delta : \text{“Η πινακίδα περιέχει τουλάχιστον ένα Α ή ένα Β”}$$

είναι

$$P(E_\delta) = 1 - P(E'_\delta),$$

όπου

$$E'_\delta : \text{“Η πινακίδα δεν περιέχει κανένα Α ή Β”}.$$

Το πλήθος στοιχείων του E'_β είναι (πλήθος διατάξεων των 22 γραμμάτων (πλην των Α, Β) σε τριάδες με επανάληψη επί 9 (για τα ψηφία 1,2,....,9), επί το πλήθος διατάξεων 10 ψηφίων σε τριάδες με επανάληψη)

$$n(E'_\delta) = 22^3 \cdot 9 \cdot 10^3,$$

οπότε

$$\begin{aligned} P(E_\delta) &= 1 - \frac{n(E'_\delta)}{n(\Omega)} = 1 - \frac{22^3 \cdot 9 \cdot 10^3}{24^3 \cdot 9 \cdot 10^3} = 1 - \left(\frac{22}{24}\right)^3 \\ &= 0,230. \end{aligned}$$

ε) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου

E_ϵ : "Η πινακίδα περιέχει τα Α και Β (τουλάχιστον μία φορά το καθένα)"

είναι

$$n(E_\epsilon) = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} 24 \cdot 9 \cdot 10^3 = 144 \cdot 9 \cdot 10^3,$$

οπότε η πιθανότητα του είναι

$$P(E_\epsilon) = \frac{n(E_\epsilon)}{n(\Omega)} = \frac{144 \cdot 9 \cdot 10^3}{24^3 \cdot 9 \cdot 10^3} = \frac{144}{24^3} = 0,010.$$

στ) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου

$E_{\sigma\tau}$: "Η πινακίδα δεν περιέχει κανένα άρτιο ψηφίο"

είναι (πλήθος διατάξεων 24 γραμμάτων σε τριάδες με επανάληψη επί πλήθος διατάξεων 5 ψηφίων (1,3,5,7,9) σε τετράδες με επανάληψη)

$$n(E_{\sigma\tau}) = 24^3 \cdot 5^4,$$

οπότε η πιθανότητα του είναι

$$P(E_{\sigma\tau}) = \frac{n(E_{\sigma\tau})}{n(\Omega)} = \frac{24^3 \cdot 5^4}{24^3 \cdot 9 \cdot 10^3} = 0,069.$$

ζ) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

E_ζ : "Η πινακίδα περιέχει τουλάχιστον ένα μηδέν"

είναι

$$P(E_\zeta) = 1 - P(E'_\zeta),$$

όπου E'_ζ : "Η πινακίδα δεν περιέχει κανένα μηδέν".

Το πλήθος στοιχείων του E'_ζ είναι (πλήθος διατάξεων των 24 γραμμάτων σε τριάδες με επανάληψη επί πλήθος διατάξεων 9 ψηφίων (1,2,...,9) σε τετράδες με επανάληψη)

$$n(E'_\zeta) = 24^3 \cdot 9^4,$$

οπότε

$$P(E_\zeta) = 1 - \frac{n(E'_\zeta)}{n(\Omega)} = 1 - \frac{24^3 \cdot 9^4}{24^3 \cdot 9 \cdot 10^3} = 0,271.$$

η) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου

E_η : "Η πινακίδα δεν περιέχει το 1"

είναι

$$n(E_\eta) = 24^3 \cdot 8 \cdot 9^3,$$

οπότε η πιθανότητα του είναι

$$P(E_\eta) = \frac{n(E_\eta)}{n(\Omega)} = \frac{24^3 \cdot 8 \cdot 9^3}{24^3 \cdot 9 \cdot 10^3} = 0,648.$$

θ) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου

E_θ : "Η πινακίδα δεν περιέχει δύο ίδια γράμματα"

είναι

$$n(E_\theta) = \Delta_3^{24} \cdot 9 \cdot 10^3 = \frac{24!}{21!} \cdot 9 \cdot 10^3 = 12144 \cdot 9 \cdot 10^3,$$

(πλήθος διατάξεων των 24 γραμμάτων σε τριάδες χωρίς επανάληψη επί 9 (για τα ψηφία 1,2,....,9) επί πλήθος διατάξεων 10 ψηφίων σε τριάδες με επανάληψη) οπότε η πιθανότητα του είναι

$$P(E_\theta) = \frac{n(E_\theta)}{n(\Omega)} = \frac{12144 \cdot 9 \cdot 10^3}{24^3 \cdot 9 \cdot 10^3} = 0,878.$$

Λύση Άσκησης 2.44

α) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E_a : \text{“Ο αριθμός περιέχει τουλάχιστον δύο ίδια ψηφία”}$$

είναι
$$P(E_a) = 1 - P(E_a'),$$

όπου
$$E_a' : \text{“Ο αριθμός δεν περιέχει ίδια ψηφία”}.$$

Το πλήθος στοιχείων του E_a' είναι ίσο με (το πρώτο ψηφίο δεν μπορεί να είναι μηδέν) το πλήθος αριθμών με ένα ψηφίο (9) συν πλήθος αριθμών με δύο διαφορετικά ψηφία $(9 \cdot 9)$ συν πλήθος αριθμών με 3 διαφορετικά ψηφία $(9 \cdot \Delta_2^9)$ συν πλήθος αριθμών με 4 διαφορετικά ψηφία $(9 \cdot \Delta_3^9)$ συν πλήθος αριθμών με 5 διαφορετικά ψηφία $(9 \cdot \Delta_4^9)$ συν πλήθος αριθμών με 6 διαφορετικά ψηφία $(9 \cdot \Delta_5^9)$, οπότε

$$\begin{aligned} n(E_a') &= 9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot \Delta_2^9 + 9 \cdot \Delta_3^9 + 9 \cdot \Delta_4^9 + 9 \cdot \Delta_5^9 \\ &= 9\left(1 + 9 + \frac{9!}{7!} + \frac{9!}{6!} + \frac{9!}{5!} + \frac{9!}{4!}\right) \\ &= 168571 \end{aligned}$$

οπότε
$$P(E_a) = 1 - \frac{168570}{1000000} = 0,831.$$

β) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου

$$E_\beta : \text{“Ο αριθμός που κληρώθηκε περιέχει 3 φόρες το ίδιο ψηφίο”}$$

είναι
$$n(E_b) = n_3 + n_4 + n_5 + n_6,$$

όπου n_3, n_4, n_5 και n_6 το πλήθος των τριψήφιων, τετραψήφιων, πενταψήφιων και εξαψήφιων αριθμών αντίστοιχα με 3 ίδια ψηφία. Προφανώς

$$n_3 = 9.$$

Το πλήθος των τετραψήφιων αριθμών που περιέχουν 3 φορές το “1” είναι (το μηδέν δεν μπορεί να είναι πρώτο ψηφίο)

$$8 + \binom{3}{2} \cdot 9 = 35$$

(8 είναι οι αριθμοί 2111,3111,...,9111 και το πλήθος των αριθμών που έχουν πρώτο ψηφίο το 1 είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων επιλογής 2 θέσεων από τις 3 στις οποίες υπάρχει 1 επί το πλήθος των τρόπων επιλογής ενός ακόμη ψηφίου από τα 0,2,3...,9).
Ίδιο προκύπτει το πλήθος των τετραψήφιων που περιέχουν 3 φορές το “2” ή το “3” ή ... το “9”.
Το πλήθος των τετραψήφιων που περιέχουν 3 φορές το “0” είναι 9 (αριθμοί 1000,2000,...,9000) Άρα το πλήθος των τετραψήφιων με 3 ίδια ψηφία είναι

$$n_4 = 9 \cdot 35 + 9 = 324.$$

Το πλήθος των πενταψήφιων αριθμών που περιέχουν 3 φορές το “1” είναι ίσο με το άθροισμα του πλήθους πενταψήφιων με πρώτο ψηφίο το “1” και του πλήθους πενταψήφιων με πρώτο ψηφίο διάφορο του 0 και του 1 (αυτός ο χωρισμός γίνεται επειδή το μηδέν δεν μπορεί να είναι πρώτο ψηφίο)

$$\binom{4}{2} \cdot 9^2 + 8\binom{4}{3} \cdot 9 = 774.$$

Ίδιο προκύπτει το πλήθος των πενταψήφιων αριθμών που περιέχουν 3 φορές το “2” ή το “3” ή ... το “9”.
Το πλήθος των πενταψήφιων που περιέχουν 3 φορές το “0” είναι

$$9\binom{4}{3} \cdot 9 = 324$$

(9 είναι οι τρόποι επιλογής του πρώτου ψηφίου από τα 1,2,...,9 και $\binom{4}{3}$ είναι οι τρόποι επιλογής των

θέσεων των τριών “0” από τις 4. Το επί 9 είναι για τους τρόπους επιλογής του άλλου φηφίου από τα 1,2,…,9).
Άρα το πλήθος των πενταψήφιων αριθμών με 3 ίδια ψηφία είναι

$$n_5 = 9 \cdot 774 + 324 = 7290.$$

Το πλήθος των εξαψήφιων αριθμών που περιέχουν 3 φορές το “1” είναι ίσο με το άθροισμα του πλήθους εξαψήφιων με πρώτο ψηφίο το “1” και του πλήθους εξαψήφιων με πρώτο ψηφίο του 0 και του 1

$$\binom{5}{2} \cdot 9^3 + 8\binom{5}{3} \cdot 9^2 = 13770.$$

Ίδιο προκύπτει το πλήθος των εξαψήφιων αριθμών που περιέχουν 3 φορές το “2” ή το “3” ή … το “9”.
Το πλήθος των εξαψήφιων αριθμών που περιέχουν 3 φορές το “0” είναι

$$9\binom{5}{3} \cdot 9^2 = 7290$$

(9 είναι οι τρόποι επιλογής του πρώτου ψηφίου από τα 1,2,…,9 και $\binom{5}{3}$ είναι οι τρόποι επιλογής των θέσεων των τριών “0” από τις 5. Το επί 9^2 είναι για τους τρόπους επιλογής των άλλων δύο φηφίων από τα 1,2,…,9).
Στα παραπάνω μετρήσαμε δύο φορές τους αριθμούς που περιέχουν δύο τριάδες ίδιων ψηφίων, όπως π.χ τον 112212, οπότε πρέπει να αφαιρέσουμε από τα παραπάνω πλήθη το πλήθος αυτών των εξαψήφιων αριθμών, το οποίο είναι ίσο με (ο χωρισμός γίνεται επειδή το μηδέν δεν μπορεί να είναι πρώτο ψηφίο)

$$\binom{9}{2}\frac{6!}{3!3!} + 9 \cdot \frac{5!}{3!2!} = 810$$

($\binom{9}{2}\frac{6!}{3!3!}$ είναι το πλήθος τρόπων επιλογής 2 ψηφίων από τα 1,2,…,9 επί τον αριθμό μεταθέσεων 6 αντικειμένων εκ των οποίων τα τρία είναι ίδια και τα άλλα τρία ίδια και $9 \cdot \frac{5!}{3!2!}$ είναι το πλήθος αριθμών με 3 μηδενικά και 3 άλλα ίδια ψηφία, π.χ 200220).
Άρα το πλήθος των εξαψήφιων αριθμών με 3 ίδια ψηφία είναι

$$n_6 = 9 \cdot 13770 + 7290 - 810 = 130410.$$

Λύση Άσκησης 2.45

Το πλήθος των στοιχείων του δειγματοχώρου είναι ίσο με τον αριθμό τρόπων κατανομής 6 διαφορετικών σφαιριδίων σε 8 κελιά, οπότε

$$n(\Omega) = 8^6.$$

α) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου

$$E_a : \text{“Κατεβαίνουν όλοι στον ίδιο όροφο”}$$

είναι

$$n(E_a) = 8,$$

οπότε η πιθανότητα του είναι

$$P(E_a) = \frac{n(E_a)}{n(\Omega)} = \frac{8}{8^6} = \frac{1}{8^5} = 0,00003.$$

β) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου

$$E_\beta : \text{“Κατεβαίνουν όλοι σε διαφορετικούς ορόφους”}$$

είναι ίσο με τον αριθμό τρόπων κατανομής 6 διαφορετικών σφαιριδίων σε 8 κελιά με το πολύ ένα σφαιρίδιο σε κάθε κελί, οπότε

$$n(E_\beta) = \Delta_6^8 = \frac{8!}{2!} = 20160,$$

οπότε η πιθανότητα του είναι

$$P(E_\beta) = \frac{n(E_a)}{n(\Omega)} = \frac{20160}{8^6} = \frac{1}{8^5} = 0,077.$$

γ) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου

$$E_\gamma : \text{“Κατεβαίνουν 2 άτομα στον δεύτερο όροφο”}$$

είναι ίσο με τον αριθμό τρόπων επιλογής 2 ατόμων από τα 6 (συνδυασμοί των 6 ανά 2) επί τον αριθμό τρόπων κατανομής 4 διαφορετικών σφαιριδίων σε 7 κελιά με το πολύ ένα σφαιρίδιο σε κάθε κελί, οπότε

$$n(E_\gamma) = \binom{6}{2} 7^4 = \frac{6!}{2!4!} 7^4 = 15 \cdot 7^4 = 36.015,$$

οπότε η πιθανότητα του είναι

$$P(E_\gamma) = \frac{n(E_\gamma)}{n(\Omega)} = \frac{36.015}{8^6} = 0,137.$$

δ) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου

$$E_\delta : \text{“Κατεβαίνουν 2 άτομα στον δεύτερο όροφο και 2 στον τέταρτο”}$$

είναι ίσο με τον αριθμό τρόπων επιλογής 2 ατόμων από τα 6 (2 άτομα κατεβαίνουν στον δεύτερο όροφο) επί τον αριθμό τρόπων επιλογής 2 ατόμων από τα 4 (2 άτομα κατεβαίνουν στον τέταρτο όροφο) επί τον αριθμό τρόπων κατανομής 2 διαφορετικών σφαιριδίων σε 6 κελιά με το πολύ ένα σφαιρίδιο σε κάθε κελί (τα υπόλοιπα δύο άτομα κατεβαίνουν στους άλλους 6 ορόφους), οπότε

$$n(E_\delta) = \binom{6}{2}\binom{4}{2} 6^2 = \frac{6!}{4!2!}\frac{4!}{2!2!} 6^2 = 3240,$$

οπότε η πιθανότητα του είναι

$$P(E_\delta) = \frac{n(E_\delta)}{n(\Omega)} = \frac{3240}{8^6} = 0,012.$$

ε) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου

$$E_\epsilon : \text{“Ο Α και ο Β κατεβαίνουν στον δεύτερο όροφο”}$$

είναι ίσο με τον αριθμό τρόπων κατανομής 4 διαφορετικών σφαιριδίων σε 8 κελιά (τα υπόλοιπα 4 άτομα κατεβαίνουν σε κάποιον από τους 8 ορόφους), οπότε

$$n(E_\epsilon) = 8^4,$$

οπότε η πιθανότητα του είναι

$$P(E_\epsilon) = \frac{8^4}{8^6} = 0,016.$$

στ) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου

$E_{\sigma\tau}$: "όλοι κατεβαίνουν στον τρίτο και τέταρτο όροφο"

είναι ίσο με τον αριθμό τρόπων κατανομής 6 διαφορετικών σφαιριδίων σε 2 κελιά, οπότε

$$n(E_{\sigma\tau}) = 2^6,$$

οπότε η πιθανότητά του είναι

$$P(E_{\sigma\tau}) = \frac{2^6}{8^6} = 0,0002.$$

ζ) Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου

$E_{\sigma\tau}$: "όλοι κατεβαίνουν σε δύο ορόφους"

είναι ίσο με τον αριθμό τρόπων επιλογής δύο ορόφων από τους 8, επί τον αριθμό τρόπων κατανομής 6 διαφορετικών σφαιριδίων σε 2 κελιά , οπότε

$$n(E_z) = \binom{8}{2} 2^6 = \frac{8!}{2!6!} 2^6 = 1792,$$

οπότε η πιθανότητά του είναι

$$P(E_z) = \frac{1792}{8^6} = 0,0068.$$

Λύση Άσκησης 2.47

α) Η πιθανότητα να επιλεγεί ο A είναι

$$P_1 = \frac{n_1}{n(\Omega)}$$

όπου n_1 το πλήθος συνδυασμών που περιέχουν τον A, το οποίο είναι ίσο με το πλήθος συνδυασμών των 19 ανά 4, οπότε

$$n(\Omega) = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5!15!} = 15504$$

$$n_1 = \binom{19}{4} = \frac{19!}{4!15!} = 3876.$$

Επομένως

$$P_1 = \frac{3876}{15504} = 0,25.$$

β) Η πιθανότητα να επιλεγούν οι φοιτητές A και ο B είναι

$$P_2 = \frac{n_2}{n(\Omega)}$$

όπου n_2 το πλήθος τριάδων που περιέχουν τον A και τον B, το οποίο είναι ίσο με το πλήθος συνδυασμών 18 ανά 3, οπότε

$$n_2 = \binom{18}{3} = \frac{18!}{3!15!} = 816.$$

Επομένως

$$P_2 = \frac{816}{15504} = 0,053.$$

γ) Η πιθανότητα να επιλεγεί ο φοιτητής A και να μην επιλεγεί ο B είναι

$$P_3 = \frac{n_3}{n(\Omega)}$$

όπου n_3 το πλήθος των συνδυασμών που περιέχουν τον A και δεν περιέχουν τον B, το οποίο είναι ίσο με το πλήθος συνδυασμών 18 ανά 4, οπότε

$$n_3 = \binom{18}{4} = \frac{18!}{4!14!} = 3060.$$

Επομένως

$$P_3 = \frac{3060}{15504} = 0,197.$$

δ) Η πιθανότητα να μην επιλεγεί κανένας από τους A , B ή Γ είναι

$$P_4 = \frac{n_4}{n(\Omega)}$$

όπου n_4 το πλήθος πεντάδων που δεν περιέχουν τους A, B και Γ, το οποίο είναι ίσο με το πλήθος συνδυασμών των άλλων 17 φοιτητών σε πεντάδες, οπότε

$$n_4 = \binom{17}{5} = \frac{17!}{5!12!} = 1688$$

και

$$P_4 = \frac{n_4}{n(\Omega)} = \frac{1688}{15504} = 0,109$$

ε) Η πιθανότητα να επιλεγεί τουλάχιστον ένας από τους A , B ή Γ είναι

$$P_5 = 1 - P_4 = 1 - 0,109 = 0,891.$$

Λύση Άσκησης 2.48

Αν E : “Η βολή είναι επιτυχής ”

και A : “Φυσάει”

$$P(A) = 0,2,\ P(E|A) = 0,3 \ \text{ και } \ P(E|A') = 0,6$$

οπότε η πιθανότητα να πετύχει μία βολή είναι

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|A')P(A') = 0,3 \cdot 0,2 + 0,6(1 - 0,2) = 0,54.$$

β) Η πιθανότητα να μην φυσάει με δεδομένο ότι πέτυχε η βολή είναι

$$P(A'|E) = \frac{P(E|A')P(A')}{P(E)} = \frac{0,6 \cdot (1 - 0,2)}{0,54} = 0,889.$$

Λύση Άσκησης 2.49

Οι πιθανότητες των ενδεχόμενων

$$E_i : \text{“ Υπάρχουν } i \text{ άσσοι στα πέντε φύλλα”, όπου } i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

είναι
$$P(E_i) = \frac{n(E_i)}{n(\Omega)},$$

όπου
$$n(\Omega) = \begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{52!}{5!47!} = 2.598.960$$

το πλήθος των στοιχείων του δειγματοχώρου Ω (πλήθος συνδυασμών 52 ανά 5). Επίσης:

α) Το πλήθος των στοιχείων του E_4 είναι $n(E_4) = 48$ (4 άσσοι και ένα από τα άλλα 48 φύλλα) οπότε

$$P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(\Omega)} = \frac{48}{2.598.960} = 0,0001.$$

β) Το πλήθος $n(E_2)$ των στοιχείων του E_2 είναι (δύο άσσοι και τρία άλλα φύλλα) το γινόμενο του αριθμού διάδων από τους τέσσερις άσσους επί το πλήθος των τριάδων που γίνονται από τα άλλα 48 φύλλα, δηλαδή

$$n(E_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 48 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{4!}{2!2!}\frac{48!}{3!45!} = 103776,$$

οπότε
$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(\Omega)} = \frac{103776}{2.598.960} = 0,0399.$$

γ) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$\Gamma : \text{“ Υπάρχει τουλάχιστον ένας άσσος στα πέντε φύλλα”},$$

είναι
$$P(\Gamma) = 1 - P(\Gamma'),$$

όπου
$$n(\Gamma') = \begin{pmatrix} 48 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{48!}{5!43!} = 1.712.304$$

ο αριθμός πεντάδων που δεν περιέχουν κανέναν άσσο (πλήθος συνδυασμών των άλλων 48 φύλλων ανά 5). Επομένως

$$P(\Gamma) = 1 - \frac{1.712.304}{2.598.960} = 0,341.$$

δ) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$\Delta : \text{“ Υπάρχουν 4 όμοια στα πέντε φύλλα”},$$

είναι
$$P(\Delta) = P(\Delta_1) + P(\Delta_1) + \ldots + P(\Delta_{13}),$$

όπου
$$\Delta_i : \text{“ Υπάρχουν 4 όμοια } i \text{ στα πέντε φύλλα”}, \quad i = 1, 2, \ldots, 13.$$

Σύμφωνα με το (α)
$$P(\Delta_i) = 0,0001,$$

οπότε
$$P(\Delta) = 13 \cdot 0,0001 = 0,0013.$$

ε) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$E : \text{“ Υπάρχουν 3 άσσοι και ένα ζευγάρι στα πέντε φύλλα”},$$

είναι
$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}.$$

Το $n(E)$ είναι ίσο με το γινόμενο του πλήθος τρόπων επιλογής 3 άσσων από τους 4 (συνδυασμοί των 4 ανά 3) επί 12 (τα υπόλοιπα είδη φύλλων, δηλαδή δυάρια, τριάρια,...) επί το πλήθος τρόπων επιλογής 2 από τα 4 του κάθε είδους (συνδυασμοί των 4 ανά 2), οπότε

$$n(E) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 12 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4!}{3!1!}12\frac{4!}{2!2!} = 288$$

και
$$P(E) = \frac{288}{2.598.960} = 0,00011.$$

στ) Η πιθανότητα του ενδεχομένου

$$B: \text{“ Έχει ένα οποιοδήποτε φουλ”},$$

είναι
$$P(B) = 13P(E) = 0,00144.$$