Κεφάλαιο 1

Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα

Άσκηση 9.1

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

οπότε

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$$

Για $\lambda_1 = 1$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y-z \\ -y+z \\ -2y-4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} y - z &= 0 \\ -y + z &= 0 \\ -2y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει

$$y = z = 0$$

οπότε

$$\begin{aligned} V(1) &= \{(x,y,z) = (x,0,0), \quad x \in R\} \\ &= span(1,0,0) \end{aligned}$$

Για $\lambda_2 = -1$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \quad & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x+y-z \\ y+z \\ -2y-2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ -2y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει

$$y = -z$$

και
$$2x = -y + z = 2z \Leftrightarrow x = z$$

οπότε

$$\begin{aligned} V(-1) &= \{(x, y, z) = (z, -z, z), \quad z \in R\} \\ &= span(1, -1, 1) \end{aligned}$$

Για $\lambda_3 = -2$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_3 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x + y - z \\ 2y + z \\ -2y - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 0 \\ 2y + z &= 0 \\ -2y - z &= 0 \end{aligned}$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις δίνουν

$$z = -2y$$

και η πρώτη

$$3x = -y + z = -y - 2y \Leftrightarrow x = -y$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} V(-2) &= \{(x, y, z) = (-y, y, -2y), \quad y \in R\} \\ &= span(-1, 1, -2). \end{aligned}$$

Αφου ο A έχει 3 διακριτές ιδιοτιμές, διαγωνιοποιείται.

Άσκηση 9.2

α) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

οπότε

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

Για $\lambda_1 = 2$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 2x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$2x + 2y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -y$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} V(2) &= \{(x,y,z) = (-y,y,z), \quad y,z \in R\} \\ &= span\{(-1,1,0),(0,0,1)\} \end{aligned}$$

Για $\lambda_2 = 3$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - y \\ 2x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$x - y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} V(3) &= \{(x,y,z) = (y,y,z), \quad y,z \in R\} \\ &= span\{(1,1,0),(0,0,1)\} \end{aligned}$$

β) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

οπότε

$$\lambda_1 = 2 \text{ (διπλή) και } \lambda_2 = 3.$$

Για $\lambda_1 = 2$ παίρνουμε το σύστημα

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda_1 I)\vec{v}=\vec{0} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 \\ 0 & 2 & 4-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y \\ -y-z \\ 2y+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

δηλαδή

$$
\begin{aligned}
y &= 0 \\
-y-z &= 0 \\
2y+2z &= 0
\end{aligned}
$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει

$$y=z=0$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
V(2) &= \{(x,y,z)=(x,0,0), \quad x\in R\} \\
&= span(1,0,0)
\end{aligned}
$$

Για $\lambda_2 = 3$ παίρνουμε το σύστημα

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda_2 I)\vec{v}=\vec{0} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-3 & 1 & 0 \\ 0 & 1-3 & -1 \\ 0 & 2 & 4-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -x+y \\ -2y-z \\ 2y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
-x+y &= 0 \\
-2y-z &= 0 \\
2y+z &= 0
\end{aligned}
$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει

$$
\begin{aligned}
z &= -2y \\
x &= y
\end{aligned}
$$

’ρα,

$$
\begin{aligned}
V(3) &= \{(x,y,z)=(y,y,-2y)=y(1,1,-2), \quad y\in R\} \\
&= span(1,1,-2)
\end{aligned}
$$

Άσκηση 9.3

α) Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 0$$

'ρα, ο A έχει μόα διπλή ιδιοτιμή την

$$\lambda_1 = 1$$

Για $\lambda_1 = 1$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A-\lambda_I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

'ρα $\qquad y = 0$

οπότε

$$\begin{aligned} V(1) &= \{(x,y) = (x,0), \ \ x \in R\} \\ &= span(1,0) \end{aligned}$$

β) Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 - 1 = 0$$

'ρα, οι ιδιοτιμές του A είναι

$$\lambda = \pm\sqrt{2}$$

Για $\lambda_1 = \sqrt{2}$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A-\lambda_I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (1-\sqrt{2})x + y \\ x - (1-\sqrt{2})y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

'ρα από το σύστημα αυτό προκύπτει

$$(1-\sqrt{2})x + y = 0 \Leftrightarrow y = (\sqrt{2}-1)x$$

Για $x = 1$ ισχύει

$$y = (\sqrt{2}-1),$$

οπότε

$$V(\sqrt{2}) = \left\{k(1,\sqrt{2}-1), \ \ k \in R\right\} = span(1,\sqrt{2}-1).$$

Όμοια προκύπτει

$$\begin{aligned} V(-\sqrt{2}) &= \left\{k(1-\sqrt{2},1), \ \ k \in R\right\} \\ &= span(1-\sqrt{2},1) \end{aligned}$$

Άσκηση 9.4

α) Ο πίνακας της γραμμικής αυτής απεικόνισης είναι

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

’ρα, οι ιδιοτιμές του A είναι

$$\lambda_1 = 5 \quad \text{ή} \quad \lambda_2 = 2.$$

Για $\lambda_1 = 5$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}(A - \lambda_I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-5 & 2 \\ 1 & 3-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -x+2y \\ x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

’ρα, από το σύστημα αυτό προκύπτει

$$-x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y,$$

οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda = 5$ είναι

$$V(5) = \{(x,y) = k(1,2) \ \ x \in R\}$$

Όμοια προκύπτει

$$V(2) = \{k(-1,1), \ \ k \in R\}.$$

Επειδή η γραμμική αυτή απεικόνιση έχει δύο διακριτές ιδιοτιμές, είναι διαγωνιοποιήσιμη.

β) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) = 0$$

οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι

$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -1 \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 0$$

Για $\lambda_1 = 1$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-1 & 2 & -1 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 2 & -2 & 0-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2y-z \\ x-2y \\ 2x-2y-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} 2y - z &= 0 \\ x - 2y &= 0 \\ 2x - 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις προκύπτει

$$z = 2y \quad \text{και} \quad x = 2y$$

και αντικαθιστώντας στην τρίτη παίρνουμε

$$2 \cdot 2y - 2y - 2y = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Επομένως, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(1) &= \{(x,y,z) = (2y,y,2y) = y(2,1,2), \quad y \in R\} \\ &= span(2,1,2) \end{aligned}$$

Για $\lambda_2 = -1$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 & -1 \\ 1 & 1-(-1) & 0 \\ 2 & -2 & 0-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x+2y-z \\ x \\ 2x-2y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} 2x+2y-z &= 0 \\ x &= 0 \\ 2x-2y+z &= 0 \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει

$$z = 2y \quad \text{και} \quad x = 0$$

οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(3) &= \{(x,y,z) = (0,y,2y) = y(0,1,2), \quad y \in R\} \\ &= span(0,1,2) \end{aligned}$$

Για $\lambda_3 = 0$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-0 & 2 & -1 \\ 1 & 1-0 & 0 \\ 2 & -2 & 0-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+2y-z \\ x-y \\ 2x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x+2y-z &= 0 \\ x-y &= 0 \\ 2x-2y &= 0 \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει

$$y = x$$

και

$$z = x + 2y = x + 2x = 3x,$$

οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(3) &= \{(x,y,z) = (x,x,3x) = x(1,1,3), \quad x \in R\} \\ &= span(1,1,3) \end{aligned}$$

Επειδή ο πίνακας αυτός έχει 3 διακριτές ιδιοτιμές, είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Άσκηση 9.5

α) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι

$$\lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = 2$$

Για $\lambda_1 = 0$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-0 & 1 \\ 1 & 1-0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$x + y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -y$$

Επομένως, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(0) &= \{(x,y) = (-y,y) = y(-1,1), \;\; y \in R\} \\ &= span(-1,1) \end{aligned}$$

Για $\lambda_2 = 2$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-2 & 1 \\ 1 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$x - y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$$

Επομένως, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(0) &= \{(x,y) = (y,y) = y(1,1), \;\; y \in R\} \\ &= span(1,1) \end{aligned}$$

Επειδή ο πίνακας αυτός έχει 2 διακριτές ιδιοτιμές είναι διαγωνιοποιήσιμος.
β) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda - (1+\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$$

η μόνη πραγματική ιδιοτιμή είναι

$$\lambda_1 = -1$$

Επειδή όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου δεν είναι πραγματικές, ο πίνακας δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Άσκηση 9.7

α) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(1-\lambda)(\lambda^2+3\lambda+2) = 0$$

οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$$

και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι είναι

$$\begin{aligned} V(1) &= span(1,0,0) \\ V(-1) &= span(-1,1,-1) \\ V(-2) &= span(1,-1,2) \end{aligned}$$

β) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f^4 είναι ο A^4.
Ισχύει

$$A^4 = PD^4P^{-1} \tag{i}$$

όπου D ο αντίστοιχος του A διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ισχύει (βλ. Πρόταση 3.7)

$$D^4 = \begin{bmatrix} 1^4 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^4 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης P από τη συνήθη βάση στη βάση στην οποία ο A είναι διαγώνιος έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματά του

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

και ο αντίστροφός του είναι

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι, η (i) δίνει

$$\begin{aligned} A^4 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 15 & 15 \\ 0 & -14 & -15 \\ 0 & 30 & 31 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος της απεικόνισης f^4 ως προς την κανονική βάση του R^3 είναι

$$f^4(x,y,z) = (x + 15y + 15z, -14y - 15z, 30y + 31z)$$

Άσκηση 9.8

Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0 \quad \text{(διπλή)} \quad , \lambda_3 = 6$$

και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι των ιδιοτιμών $\lambda_1 = -2, \lambda_3 = 6$ είναι

$$\begin{aligned} V(-2) &= span(1, -1, 1, -1) \\ V(6) &= span(1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Για $\lambda_2 = 0$ παίρνουμε το σύστημα

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1-0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1-0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + 2y + z + 2w \\ 2x + y + 2z + w \\ x + 2y + z + 2w \\ 2x + y + 2z + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x + 2y + z + 2w &= 0 \\ 2x + y + 2z + w &= 0 \end{aligned}$$

Από τις δύο αυτές εξισώσεις βρίσκουμε τους 2 αγνώστους, x και y συναρτήσει των z και w, γράφοντας το σύστημα ως

$$\begin{aligned} x + 2y &= -z - 2w \\ 2x + y &= -2z - w \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση επί -2 και προσθέτοντας κατά μέλη με τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$-4y + y = 2z + 4w - 2z - w \Leftrightarrow -3y = 3w \Leftrightarrow y = -w$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$x = -2y - z - 2w = -2(-w) - z - 2w = -z$$

Επομένως, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(0) &= \{(x, y, z, w) = (-z, -w, -z, w) = z(-1, 0, 1, 0) + w(0, -1, 0, 1), \quad z, w \in R\} \\ &= span\{(-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

'ρα, $$dim(V(0)) = 2,$$

οπότε ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος και ο αντίστοιχος διαγώνιος πίνακας είναι ο

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης από τη συνηθισμένη βάση στη βάση στην οποία ο πίνακας της f είναι διαγώνιος είναι ο (έχει ως στήλες γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο τύπος της f στη βάση αυτή είναι (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 οι συντεταγμένες ως προς τη νέα βάση)

$$\begin{aligned} f(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) &= D\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 6x_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

’ρα,

$$f(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = (-2x_1, 0, 0, 6x_4)$$

Άσκηση 9.10

Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0$$

οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{και } \lambda_2 = 2 \quad (\text{διπλή})$$

Για $\lambda_1 = 1$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5-1 & 6 & -6 \\ -1 & 4-1 & 2 \\ 3 & -6 & -4-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4x-6y-6z \\ -x+3y+2z \\ 3x-6y-5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} 4x - 6y - 6z &= 0 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x - 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής

$$\begin{aligned} V(1) &= \{(x,y,z) = y(-3,1,-3), \quad y \in R\} \\ &= span(-3,1,-3) \end{aligned}$$

Για $\lambda_2 = 2$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5-2 & -6 & -6 \\ -1 & 4-2 & 2 \\ 3 & -6 & -4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x-6y-6z \\ -x+2y+2z \\ 3x-6y-6z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Από τις 3 αυτές εξισώσεις, που είναι ισοδύναμες, προκύπτει ότι

$$-x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 2z$$

οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(2) &= \{(x,y,z) = (2y+2z, y, z) = y(2,1,0) + z(2,0,1), \quad y, z \in R\} \\ &= span\{(2,1,0),(2,0,1)\} \end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές της γραμμικής απεικόνισης $g = f^2 - 2f + 3$ είναι

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2 \\ \beta_2 &= 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3 \end{aligned}$$

Επειδή για την διπλή ιδιοτιμή ισχύει

$$dim(V(2)) = 2$$

η γραμμική απεικόνιση f είναι διαγωνιοποιήσιμη, οπότε τα ιδιοδιανύσματατης της g είναι οι παραπάνω ιδιοχώροι, δηλαδή

$$\begin{aligned} V(\beta_1) &= span(-3, 1, -3) \\ V(\beta_2) &= span\{(2, 1, 0), (2, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Άσκηση 9.14

Ο πίνακας της f έχει ως στήλες τις εικόνες των διανυσμάτων της βάσης

$$A = [f(\vec{e}_1)\ \ f(\vec{e}_2)\ \ f(\vec{e}_3)] = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Στο Παράδειγμα 9.3 δείχνουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα αυτού είναι

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{(διπλή)} \quad \lambda_2 = 9 \quad \text{(απλή)}$$

και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι είναι

$$\begin{aligned} V(1) &= span(0,0,1) \\ V(9) &= span(-32,20,47) \end{aligned}$$

β) Επειδή η διάσταση του ιδιοχώρου της διπλής ιδιοτιμής $\lambda_1 = 1$ είναι

$$dim\,(V(1)) = 1,$$

η f δεν είναι διαγωνιοποιήσιμη.

Άσκηση 9.18

Οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

προκύπτουν από την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; -(\lambda-3)^2(\lambda-1) = 0$$

οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 3 \quad (\text{διπλή}).$$

Για $\lambda_1 = 1$ προκύπτει ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής είναι

$$V(1) = \{k(-2,1,-1),\;\; k \in R\} = span(-2,1,-1).$$

Για $\lambda_2 = 3$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-3 & 2 & -2 \\ 1 & 2-3 & -1 \\ -1 & -1 & 4-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2x+2y+2z \\ x-y-z \\ -x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές ισοδυναμούν με την

$$x - y - z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = x - y,$$

οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned} V(3) &= \{(x,y,z) = (x,y,x-y) = x(1,0,1) + y(0,1,-1),\;\; x,y \in R\} \\ &= span\{(1,0,1),(0,1,-1)\}. \end{aligned}$$

Επομένως, ο πίνακας A διαγωνιοποιείται, και ο πίνακας μετάβασης στη βάση στην οποία ο A γίνεται διαγώνιος είναι

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ο αντίστοιχος διαγώνιος πίνακας είναι ο

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

και ισχύει

$$D = P^{-1}AP$$

β) Σύμφωνα με το Παράδειγμα 9.10γ

$$A^7 = PD^7P^{-1}$$

όπου (βλ. Πρόταση 3.7)

$$D^7 = \begin{bmatrix} 1^7 & 0 & 0 \\ 0 & 3^7 & 0 \\ 0 & 0 & 3^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2187 & 0 \\ 0 & 0 & 2187 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

οπότε από την (i) προκύπτει

$$\begin{aligned} A^7 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2187 & 0 \\ 0 & 0 & 2187 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2186 & 2186 \\ 1093 & 1094 & -1093 \\ -1093 & 1093 & 2187 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άσκηση 9.21

α) Με τον γνωστό τρόπο προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = 4$ (απλές) και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι

$$\begin{aligned} V(\lambda_1) &= \{(k,0,k),\ k \in R\} \\ V(\lambda_2) &= \{(0,k,0),\ k \in R\} \\ V(\lambda_3) &= \{(-k,0,k),\ k \in R\} \end{aligned}$$

Επειδή ο A έχει 3 διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι διαγωνιοποιήσιμος, οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \lambda_1^3 - 2\lambda_1^2 + 3\lambda_1 - 2 = 0^3 - 2\cdot 0^2 + 3\cdot 0 - 2 = -2 \\ \beta_2 &= \lambda_2^3 - 2\lambda_2^2 + 3\lambda_2 - 2 = 2^3 - 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - 2 = 4 \\ \beta_3 &= \lambda_3^3 - 2\lambda_3^2 + 3\lambda_3 - 2 = 4^3 - 2\cdot 4^2 + 3\cdot 4 - 2 = 42 \end{aligned}$$

και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\begin{aligned} V(\beta_1) &= \{(k,0,k),\ k \in R\} = span(1,0,1) \\ V(\beta_2) &= \{(0,k,0),\ k \in R\} = span(0,1,0) \\ V(\beta_3) &= \{(-k,0,k),\ k \in R\} = span(-1,0,1) \end{aligned}$$

Άσκηση 9.22

Οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

προκύπτουν από την εξίσωση

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I| = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad (\text{διπλή}) \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 2 \quad (\text{απλή})
\end{aligned}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ x+y+z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Από το σύστημα αυτό προκύπτει

$$z = 0 \quad \text{και} \quad y = -x$$

οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned}
V(1) \quad & = \quad \{(x,y,z) = (x,-x,0) = x(1,-1,0), \quad x \in R\} \\
& = \quad span(1,-1,0)
\end{aligned}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 0$, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -x \\ x+z \\ x-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Από το σύστημα αυτό προκύπτει

$$z = 0 \quad \text{και} \quad x = 0,$$

οπότε ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$\begin{aligned}
V(2) \quad & = \quad \{(x,y,z) = (0,y,0) = y(0,1,0), \quad y \in R\} \\
& = \quad span(0,1,0)
\end{aligned}$$

Γράφουμε το $\vec{v} = (0,1,1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων του A

$$\vec{v} = k\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 \;\Leftrightarrow\; (0,1,0) = k(1,-1,0) + \lambda(0,1,0) \;\Leftrightarrow\; (0,1,1) = (k,-k+\lambda,0)$$

που είναι προφανώς αδύνατο, οπότε το διάνυσμα $\vec{v}$ δε μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων του A.

Άσκηση 9.26 Να βρεθεί μία γραμμική απεικόνιση $f : R^3 \to R^3$ με ιδιοτιμές
$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1 \text{ και } \lambda_3 = 2.$$

Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f έχει ρίζες $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = 2$, είναι το
$$P(\lambda) = (\lambda - (-2))(\lambda - 2)(\lambda - 1)$$
δηλαδή το
$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4.$$
Άρα σύμφωνα με την Άσκηση 9.11, ο πίνακας της f είναι ο
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -(-4) & -(-1) \end{bmatrix}$$
Επομένως, μία γραμμική απεικόνιση με ιδιοτιμές $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = 2$ είναι η
$$f : R^3 \to R^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, -4x_1 + 4x_2 + x_3)$$

Άσκηση 9.27

Σύμφωνα με την Άσκηση 9.11, ο πίνακας της f είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως, μία γραμμική απεικόνιση με αυτό το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι η

$$f : R^3 \to R^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_2)$$

Επειδή

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2(1,0,1) + x_3(0,1,0)$$

και τα διανύσματα $(1,0,1)$ και $(0,1,0)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού ο βαθμός του πίνακά τους είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2,$$

μία βάση της εικόνας της f είναι η

$$\{(1,0,1),\ (0,1,0)\}.$$

Ἀσκηση 9.30

Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f έχει ρίζες $\lambda_1 = 1$ (διπλή), $\lambda_2 = 0$ και $\lambda_3 = -2$, είναι το

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \lambda(\lambda - (-2))$$

δηλαδή το

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 2\lambda.$$

Άρα σύμφωνα με την Άσκηση 9.11, ο πίνακας της f είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -(-3) & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως, μία γραμμική απεικόνιση με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ (διπλή), $\lambda_2 = 0$ και $\lambda_3 = -2$ είναι η

$$f : R^4 \to R^4, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_4, -2x_2 + 3x_3)$$

Άσκηση 9.31

Αν η λ_1 είναι ιδιοτιμή του πίνακα A και $\vec{v}_1$ ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1. \qquad (i)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (i) επί τον συμπληρωματικό $adj(A)$ του A προκύπτει

$$adj(A)(A\vec{v}_1) = adj(A)(\lambda_1\vec{v}_1)$$

ή

$$(adj(A)A)\vec{v}_1 = \lambda_1(adj(A)\vec{v}_1). \qquad (ii)$$

Επειδή

$$adj(A)A = |A|A^{-1}A = |A|I,$$

όπου I ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας, οπότε η (ii) δίνει

ή

$$|A|I\vec{v}_1 = \lambda_1(adj(A)\vec{v}_1)$$

ή ($\lambda_1 \neq 0$)

$$adj(A)\vec{v}_1 = \frac{|A|}{\lambda_1}\vec{v}_1$$

Επομένως, η $\frac{|A|}{\lambda_1}$ είναι ιδιοτιμή του συμπληρωματικού του $adj(A)$ του A και το $\vec{v}_1$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτή.