Κεφάλαιο 8

Γραμμικές απεικονίσεις

Ἀσκηση 8.1

α) Ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση του R^2 είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

β) Ο πίνακας μετάβασης από τη συνήθη βάση στη βάση αυτή είναι

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο πίνακας της f ως προς τη βάση αυτή είναι

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

γ) Επειδή

$$|A| = -11 \neq 0$$

η f είναι 1-1.

Άσκηση 8.2

α) Ο πίνακας της f ως προς τη βάση αυτή είναι

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Αν A ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση του R^2, τότε ισχύει

$$A' = P^{-1}AP \;\Leftrightarrow\; A = PA'P^{-1} \qquad (i)$$

όπου P ο πίνακας μετάβασης από τη συνήθη βάση στη βάση B, ο οποίος έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων της ως προς τη συνήθη βάση,

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος του P είναι

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

οπότε η (i) δίνει

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -14 & -5 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 8.3

α) Ο πίνακας της f ως προς τη βάση $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ του R^2 είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Αν P ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ στη βάση $\vec{\epsilon}_1$ και $\vec{\epsilon}_2$,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$P = \left(P^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο πίνακας της f ως προς τη βάση $\vec{\epsilon}_1$ και $\vec{\epsilon}_2$ είναι

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα ο τύπος της f ως προς τη βάση $\vec{\epsilon}_1$ και $\vec{\epsilon}_2$ είναι

$$f(x_1', x_2') = \left(\frac{3}{2}x_1' + \frac{3}{2}x_2', -\frac{3}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_2'\right), \quad x_1', x_2' \in R.$$

β) Επειδή

$$|A| = 3 \neq 0$$

η f είναι 1-1.

Άσκηση 8.4

Η f δεν είναι γραμμική διότι αν $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in R$, τότε

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) &= \vec{v}_1 + (2,0,-1) + \vec{v}_2 + (2,0,-1) \\ &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + (4,0,-2) \end{aligned}$$

και

$$f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + (2,0,-1)$$

Επειδή,

$$f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) \neq f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2),$$

η f δεν είναι γραμμική.

Άσκηση 8.5

Ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ του R^3 είναι

$$B = P^{-1}AP$$

όπου P ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ στη συνήθη βάση.
Ο P^{-1} είναι ο πίνακας μετάβασης από την συνήθη βάση στη βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$, οπότε

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε, σύμφωνα με την (3.15),

$$P = \left(P^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση είναι

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος της f ως προς τη συνήθη βάση είναι

$$f(x_1', x_2', x_3') = \frac{1}{2}\left(7x_1' - 3x_2' + 3x_3', 3x_1' - 3x_2' + 5x_3', 6x_3'\right), \;\; x_1', x_2', x_3' \in R.$$

Άσκηση 8.6

α) Ο πίνακας της f ως προς τις συνήθεις βάσεις των R^3 και R^2 είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β) Ο πίνακας μετάβασης από τη συνηθισμένη του R^3 στη βάση $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ είναι

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης, ο πίνακας μετάβασης από τη συνηθισμένη βάση του R^2 στη βάση $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ είναι

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και ο αντίστροφος του είναι

$$Q^{-1} = \frac{1}{|Q|} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Έτσι, ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις αυτές είναι

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 8.7

α) Ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ του R^3 είναι

$$B = P^{-1}AP$$

όπου P ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ στη συνήθη βάση του R^3.
Ο P^{-1} είναι ο πίνακας μετάβασης από την συνηθισμένη βάση στην βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$, οπότε

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

οπότε, σύμφωνα με την την (3.15),

$$P = \left(P^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση είναι

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος της f ως προς τη συνήθη βάση είναι

$$f(x_1', x_2', x_3') = \left(x_1' - x_2', x_2' + x_3', 0\right), \quad x_1', x_2', x_3' \in R.$$

Ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση του R^3 είναι

$$\begin{aligned} A_{f^2} &= B^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος της f^2 ως προς τη συνήθη βάση του R^3 είναι

$$f^2(x_1', x_2', x_3') = \left(x_1' - 2x_2' - x_3', x_2' + x_3', 0\right), \quad x_1', x_2', x_3' \in R.$$

β) Αν $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ ένα στοιχείο του πυρήνα της f,

$$f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow (-x_2, x_1 + 3x_2 + x_3, -x_1 - 3x_2 - x_3) = \vec{0},$$

οπότε προκύπτει το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} -x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0, \end{aligned}$$

του οποίου ο πίνακας είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

και

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

$$rankA = 3 - 2 = 1,$$

οπότε λύνουμε το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων ως προς το x_1, x_2, θέτοντας $k = x_3$:

$$\begin{aligned} -x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 &= -k \\ -x_1 - 3x_2 &= k, \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$(x_1, x_2, x_3) = (-k,\ 0,\ k).$$

Οι συντεταγμένες αυτές αναφέρονται στη βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$, οπότε ο πυρήνας της f είναι τα διανύσματα

$$\begin{aligned} \vec{v} &= -k\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2 + k\vec{\epsilon}_3 \\ &= -k(1,1,0) + k(0,0,1) \\ &= (-k,-k,k) \end{aligned}$$

Άρα (με συντεταγμένες ως προς τη βάση $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$)

$$ker(f) = \{(-k,-k,k) = k(-1,-1,1),\ k \in R\} = span(-1,-1,1).$$

Η διάσταση της εικόνας της f είναι

$$dim(im(f)) = 3 - dim(ker(f) = 3 - 1 = 2.$$

Ο τύπος της f ως προς την συνήθη βάση $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ είναι

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, 0)\,,\ \ x_1,x_2,x_3 \in R$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(-1,1,0) + x_3(0,1,0) \in R,$$

οπότε

$$im(f) = span\left[(1,0,0),(-1,1,0),(0,1,0)\right].$$

Τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα, διότι η ορίζουσα του πίνακά τους

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Το πρώτο και δεύτερο διάνυσμα προφανώς δεν είναι παράλληλα, οπότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως

$$im(f) = span\left[(1,0,0),(-1,1,0)\right].$$

γ) όχι αφού $|A| = 0$.

Άσκηση 8.8

Ο τύπος της f γράφεται ως

$$f(x,y,z) = x(1,1,1) + y(-1,0,1) + z(0,1,-1)$$

Η ορίζουσα του πίνακα P των διανυσμάτων

$$\vec{v}_1 = (1,1,1), \quad \vec{v}_2 = (-1,0,1) \quad \text{και} \quad \vec{v}_3 = (0,1,-1)$$

είναι

$$det(P) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

οπότε τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και $\vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν μια βάση του R^3. Επομένως,

$$dim\,(im(f)) = 3$$

και μία βάση της $im(f)$ είναι τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και $\vec{v}_3$.
β) Σύμφωνα με την εξίσωση διάστασης

$$dim\,(ker(f)) = 3 - dim\,(im(f)) = 3 - 3 = 0$$

γ) Λόγω του (β),

$$ker(f) = \vec{0}.$$

δ) Λόγω του (γ) η f είναι $1-1$.

Άσκηση 8.9

α) Η ορίζουσα του πίνακα Α του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 21 \neq 0,$$

οπότε, ο πυρήνας της f είναι

$$dim(ker(f)) = 3 - dim(im(f)) = 3 - 3 = 0.$$

Άρα

$$ker(f) = \vec{0}.$$

β) Επομένως, η f είναι 1-1.

Άσκηση 8.10

Ο τύπος της f γράφεται ως

$$f(x,y,z) = x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(-2,-1,1)$$

Ο πίνακας P των διανυσμάτων

$$\vec{v}_1 = (1,1,0),\ \ \vec{v}_2 = (1,0,1) \quad \text{και} \quad \vec{v}_3 = (-2,-1,1)$$

έχει ορίζουσα

$$det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

οπότε τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και $\vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν μια βάση του R^3. Επομένως,

$$dim\ im(f) = 3$$

και μία βάση της $im(f)$ είναι τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και $\vec{v}_3$.
β) Σύμφωνα με την εξίσωση διάστασης

$$dim\ ker(f) = 3 - dim\ im(f) = 3 - 3 = 0$$

γ) Λόγω του (β),

$$ker(f) = \vec{0},$$

οπότε η f είναι $1-1$.

Άσκηση 8.11

α) Αν $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ ένα στοιχείο του πυρήνα της f,

$$f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 + x_3) = \vec{0}.$$

Ο πίνακας του ομογενούς αυτού συστήματος είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επειδή

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

και υπάρχει 2×2 μη μηδενική ορίζουσα του πίνακα A, π.χ η

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 1 \cdot 1 = -2,$$

$$rank(A) = 2,$$

οπότε μπορούμε να βρούμε τους δύο αγνώστους συναρτήσει του τρίτου.
Η παραπάνω μη μηδενική 2×2 ορίζουσα αντιστοιχεί στους αγνώστους x_1 και x_2 και στην πρώτη και δεύτερη εξίσωση του συστήματος, οπότε βρίσκουμε τους x_1 και x_2 συναρτήσει του x_3 λύνοντας το σύστημα της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης αφού μεταφέρουμε τους όρους που περιέχουν x_3 στα δεύτερα μέλη των εξισώσεων

$$x_1 + x_2 = x_3$$

$$x_1 - x_2 = -x_3,$$

από το οποίο προκύπτει (προσθέτοντας κατά μέλη)

$$x_1 = 0 \quad \text{και} \quad x_2 = x_3.$$

ή, θέτοντας $k = x_3$,

$$\{(x_1, x_2, x_3) = (0, k, k), \quad k \in R\},$$

οπότε ο πυρήνας της f είναι

$$\begin{aligned} ker(f) &= \{(0, k, k),\ k \in R\} = \{k(0, 1, 1),\ k \in R\} \\ &= span(0, 1, 1). \end{aligned}$$

β) Από τη λύση του (α) προκύπτει ότι ο πυρήνας της f είναι διανυσματικός υποχώρος διάστασης ένα, οπότε, σύμφωνα με την εξίσωση διάστασης, η διάσταση της εικόνας της f είναι

$$dim(Im(f)) = 3 - dim(ker(f)) = 3 - 1 = 2.$$

γ) Επειδή

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 1, 2) + x_2(1, -1, -1), \quad x_1, x_2 \in R\},$$

$$im(f) = span\left[(1, 1, 2), (1, -1, -1)\right].$$

Τα διανύσματα $(1, 1, 2), (1, -1, -1)$ είναι μη παράλληλα, άρα και γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε η εικόνα της f είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3 διάστασης δύο.
δ) Επειδή

$$dim(ker(f)) = 1 \neq 0,$$

η f δεν είναι 1-1.

Άσκηση 8.12

Ο τύπος της f γράφεται ως

$$f(x,y,z,w) = x(1,1,0) + y(-1,2,3) + z(1,-1,-2) + w(1,1,0)$$

Ο πίνακας P

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

των διανυσμάτων

$$\vec{v}_1 = (1,1,0),\ \ \vec{v}_2 = (-1,2,3), v_3 = (1,-1,2) \quad \text{και} \quad \vec{v}_4 = (1,1,0)$$

έχει βαθμό 2

$$rank(P) = 2$$

αφού όλες οι 3×3 υποορίζουσές του είναι μηδενικές και υπάρχει μη μηδενική ορίζουσα 2×2, π.χ η

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Επομένως,

$$dim\,(im(f)) = 2$$

και μία βάση της εικόνας $im(f)$ είναι τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = (1,1,0) \text{ και } \vec{v}_2 = (-1,2,3)$$

που αντιστοιχούν σε μη μηδενική υποορίζουσα 2×2.
β) Σύμφωνα με την εξίσωση διάστασης

$$dim\,(ker(f)) + dim\,(im(f)) = 4$$

οπότε

$$dim\,(ker(f)) = 4 - 2 = 2$$

γ) Για να βρούμε μία βάση του πυρήνα της f λύνουμε το σύστημα

$$f(x,y,z,w) = 0$$

το οποίο είναι

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 0 \\ x + 2y - z + w &= 0 \\ 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Επειδή ο βαθμός του πίνακα του συστήματος αυτού είναι 2, μπορούμε να βρούμε τους δύο αγνώστους συναρτήσει των άλλων 2, δηλαδή των z και w από τις δύο πρώτες εξισώσεις (αντιστοιχούν σε μη μηδενική υποορίζουσα 2×2),

$$\begin{aligned} x - y &= -z - w \\ x + 2y &= z - w \end{aligned}$$

αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$2y - (-y) = z - w - (-z - w) \ \Leftrightarrow\ 3y = 2z \ \Leftrightarrow\ y = \frac{2z}{3}$$

οπότε η πρώτη δίνει

$$x = y - z - w = \frac{2z}{3} - z - w = -\frac{z}{3} - w$$

'ρα,

$$\begin{aligned} ker(f) &= \left\{\left(-\frac{z}{3} - w, \frac{2z}{3}, z, w\right), \ \ z, w \in R\right\} \\ &= \left\{z\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right) + w(-1,0,0,1) \ \ z, w \in R\right\} \\ &= span\left\{\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right), \ (-1,0,0,1)\right\} \end{aligned}$$

’ρα, μία βάση του πυρήνα της f είναι τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right) \quad \text{και} \quad \vec{v}_2 = (-1,0,0,1)$$

δ) Η f δεν είναι $1-1$ αφού

$$dim\,(ker(f)) \neq 0$$

Άσκηση 8.13

α) Ο πίνακας της f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Επειδή $|A| = 0$ και όλες οι 2×2 μη μηδενικές υποορίζουσές του είναι μηδέν,

$$rank A = 1,$$

οπότε, η μηδενικότητα της f είναι

$$null(f) = 3 - 1 = 2.$$

β) Η διάσταση της εικόνας της f είναι

$$im(f) = 3 - null(f) = 3 - 2 = 1.$$

γ) Επειδή

$$null(f) = 2 \neq 0,$$

η f δεν είναι 1-1.

Ἀσκηση 8.14

Ο πίνακας της f ως προς τη βάση

$$B = \{\vec{v}_1 = (-1,1), \vec{v}_2 = (0,-1)\}$$

του R^2 και τη συνηθισμένη βάση του R^3 είναι

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης από τη συνήθη βάση στη βάση του R^2 είναι

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

για τον οποίο

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ισχύει

$$A' = AP$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με τον P^{-1} παίρνουμε

$$A = A'P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

’ρα, ο τύπος της f στις συνήθεις βάσεις των R^2 και R^3 είναι (x, y οι συντεταγμένες ως προς τη συνήθη βάση του R^2)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+y \\ -x \\ -2x-y \end{bmatrix} \\ &= (-x+y, -x, -2x-y), \quad x, y \in R \end{aligned}$$

Άσκηση 8.16

α) Ο τύπος της T γράφεται

$$T(x,y,z) = x(2,1,0,-1) + y(-1,-1,2,1) + z(5,7,6,1), \quad x,y,z \in R$$

Ο βαθμός του πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

των διανυσμάτων του R^4

$$\vec{v}_1 = (2,1,0,-1), \quad \vec{v}_2 = (-1,-1,2,1) \quad \text{και} \quad \vec{v}_3 = (5,7,6,1)$$

είναι

$$rank(P) = 3$$

αφού η υποορίζουσα των 3 πρώτων γραμμών του πίνακα P είναι

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$$

Επομένως, τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και $\vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα και

$$f(x,y,z) = span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$$

οπότε

$$dim\,(ker(f)) = 3 - 3 = 0$$

’ρα, ο πυρήνας της f είναι το $\vec{0}$.

β) Αφού $dim\,(ker(f)) = 0$, η f είναι $1-1$.

Άσκηση 8.17

Επειδή

$$T(1,1,1) = T(1,1,-1) = (0,0,0),$$

$$dim(ker(T)) = 2$$

και μια βάση του πυρήνα της T είναι τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = (1,1,1), \vec{v}_2 = (1,1,-1).$$

Τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = (1,1,1), \vec{v}_2 = (1,1,-1) \text{ και } \vec{v}_3(-1,0,1)$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι η ορίζουσα του πίνακα τους είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

οπότε ο πίνακας της T είναι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Έτσι ο τύπος της T είναι

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_3, 0, -2x_3)$$

οπότε

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_3(1,0,-1) = span(1,0,-1).$$

Άρα

$$im(f) = span(1,0,-1).$$

Επειδή

$$dim(ker(f)) + dim(im(f)) = 2 + 1 = 3 = dim(R^3),$$

το θεώρημα διάστασης ισχύει στην περίπτωση αυτή.

Άσκηση 8.19

Ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση $\mathcal{B}$ του R^3 είναι

$$[f_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 8.8, ($[f_{\mathcal{B}}]$ ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση $\mathcal{B}$)

$$[f_{\mathcal{C}}] = [{}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}}]^{-1}[f_{\mathcal{B}}][{}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}}] \tag{i}$$

όπου $[{}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}}]$ ο πίνακας μετάβασης από τη συνήθη βάση $\mathcal{B}$ του R^3 στην $\mathcal{C}$ (έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{C}$)

$$[{}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Με τον γνωστό τρόπο βρίσκουμε τον αντίστροφο του πίνακα $[{}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}}]$,

$$[{}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}}]^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

οπότε η (i) δίνει

$$[f_{\mathcal{C}}] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο τύπος της f ως προς τη βάση $\mathcal{C}$ του R^3 είναι (y_1, y_2, y_3 συντεταγμένες ως προς τη βάση $\mathcal{C}$)

$$[f(y_1, y_2, y_3)]_{\mathcal{C}} = (2y_1, -y_2, -y_3)$$

Άσκηση 8.22

α) Οι συντεταγμένες των εικόνων των στοιχείων της βάσης $\mathcal{B} = \left\{x, x^2, x^3\right\}$ του U

$$\begin{aligned} f(x) &= (x)' = 1 \\ f(x^2) &= (x^2)' = 2x \\ f(x^3) &= (x^3)' = 3x^2 \end{aligned}$$

ως προς τη βάση $\mathcal{C} = \left\{1, x, x^2\right\rangle$ του V είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= (1,0,0) \\ f(x^2) &= (0,2,0) \\ f(x^3) &= (0,0,3) \end{aligned}$$

οπότε ο πίνακας της f ως προς τη βάση $\mathcal{E}$ του Π_2 και τη βάση $\mathcal{B}$ του V είναι

$$[{}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{E}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο τύπος της γραμμικής απεικόνισης f ως προς τις βάσεις αυτές είναι (a_1, a_2, a_3 οι συντεταγμένες ενός πολυωνύμου $p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ του U ως προς τη βάση $\mathcal{B}$)

$$[f(a_1,a_2,a_3)]_{\mathcal{C}} = [{}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}]\,[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \end{bmatrix}$$

ή

$$f(p(x)) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

β) Επειδή η ορίζουσα του πίνακα της f είναι (αφού ο πίνακας αυτός είναι διαγώνιος)

$$|[{}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}]| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \neq 0$$

σύμφωνα με τις Προτάσεις 8.11 και 8.13

$$\dim(\ker(f)) = \dim(U) - \operatorname{rank}\left([{}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{E}}]\right) = 3 - 3 = 0$$

οπότε

$$\ker(f) = \{\vec{0}\}$$

Έτσι σύμφωνα με την Πρόταση 8.12, η f είναι 1-1, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 8.16 η f είναι ισομορφισμός.

Λύση Άσκησης 8.24

Η T δεν είναι 1-1, διότι

$$\text{υπάρχουν } p_1(x) = 1 \in \Pi \;\text{ και }\; p_2(x) = 2 \in \Pi \;\text{ με }\; T(p_1(x)) = p_1'(x) = T(p_2(x)) = p_2'(x) = 0$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.10, δεν είναι ισομορφισμός

Άσκηση 8.27

α) Ο τύπος της T είναι

$$T(x, y, z, w) = (x - 2y + z + kw, kx - y + w, x + 3y + (k + 1)z + w). \quad (i)$$

Επομένως, επειδή $T(1, 0, 2, -1) = (2, 0, 4)$,

$$(2, 0, 4) = (1 - 2 \cdot 0 + 2 + k(-1), k \cdot 1 - 0 - 1, 1 + 3 \cdot 0 + (k + 1)2 - 1),$$

οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} 3 - k &= 2 \\ k - 1 &= 0 \\ 2k + 2 &= 4 \end{aligned}$$

το οποίο έχει λύση

$$k = 1.$$

Έτσι, από την (i) προκύπτει ότι ο τύπος της T είναι

$$T(x, y, z, w) = (x - 2y + z + w, x - y + w, x + 3y + 2z + w).$$

β) Ο τύπος της T γράφεται

$$\begin{aligned} T(x, y, z, w) &= x(1, 1, 1) + y(-2, -1, 3) + z(1, 0, 2) + w(1, 1, 1) \\ &= span\left[(1, 1, 1), (-2, -1, 3), (1, 0, 2), (1, 1, 1)\right] \end{aligned}$$

Τα τέσσερα αυτά διανύσματα του R^3 είναι προφανώς γραμμικώς εξαρτημένα ενώ τα τρία πρώτα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού η ορίζουσα του πίνακά τους είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Άρα

$$im(T) = R^3.$$

Αν $\vec{u} = (x, y, z, w) \in R^4$ ένα στοιχείο του πυρήνα της T,

$$T(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow (x - 2y + z + w, x - y + w, x + 3y + 2z + w) = \vec{0}.$$

Προκύπτει λοιπόν το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} x - 2y + z + w &= 0 \\ x - y + w &= 0 \\ x + 3y + 2z + w &= 0 \end{aligned}$$

του οποίου ο πίνακας είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή η υποορίζουσα των 3 πρώτων στηλών του A είναι μη μηδενική,

$$rank(A) = 3,$$

οπότε βρίσκουμε τους τρεις αγνώστους x, y, z συναρτήσει του w λύνοντας το σύστημα ($w = k$)

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= -k \\ x - y &= -k \\ x + 3y + 2z &= -k, \end{aligned}$$

οπότε προκύπτει

$$(x, y, z, w) = (-k, 0, 0, k), \quad k \in R\},$$

Άρα, ο πυρήνας της T είναι

$$\begin{aligned} ker(T) &= \{(-k,0,0,k),\ k \in R\} = \{k(-1,0,0,1),\ k \in R\} \\ &= span(-1,0,0,1). \end{aligned}$$

Επειδή

$$dim(ker(T)) + dim(im(T)) = 1 + 3 = 4 = dim(R^4),$$

το θεώρημα διάστασης ισχύει στην περίπτωση αυτή.

Άσκηση 8.29

α) Αν το συμμετρικό ως προς το άξονα x_1 ενός σημείου $A(x_1, x_2, x_3)$ του R^3 είναι το $A'(x_1', x_2', x_3')$, τότε

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= -x_2 \\ x_3' &= -x_3 \end{aligned}$$

ή, σε μορφή πινάκων,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

οπότε ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

β) $i)$ Επειδή

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \Leftrightarrow x_3 = 2x_1 - x_2 - 2,$$

τα σημεία του επιπέδου π έχουν συντεταγμένες ($k = x_1, m = x_2$)

$$(x_1, x_2, x_3) = (k, m, 2k - m - 2), \quad k, m \in R,$$

οπότε οι εικόνες τους (x_1', x_2', x_3') είναι

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \\ 2k - m - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -m \\ -2k + m + 2 \end{bmatrix}.$$

Επομένως το συμμετρικό, ως προς τον άξονα x_1, του επιπέδου π είναι τα σημεία

$$(x_1', x_2', x_3') = (k, -m, -2k + m + 2), \quad k, m \in R.$$

Απαλείφοντας τα k, m από τις σχέσεις

$$x_1' = k, \ x_2' = -m, \ x_3' = -2k + m + 2$$

προκύπτει

$$k = x_1', \ m = -x_2', \ x_3' = -2x_1' + (-x_2') + 2$$

ή

$$x_3' = 2 - 2x_1' - x_2'$$

οπότε το συμμετρικό, ως προς τον άξονα x_1, του επιπέδου π είναι το επίπεδο

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

$ii)$ Οι συντεταγμένες των εικόνων μέσω της f των σημείων

$$P(1 + t, 2, -t)$$

της ϵ είναι

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 = 1 + t \\ x_2' &= -x_2 = -2 \\ x_3' &= -x_3 = -(-t) = t \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις της εικόνας ϵ' της ϵ μέσω της f. Επομένως το συμμετρικό, ως προς τον άξονα x_1, της ευθείας ϵ είναι η ευθεία ϵ' με διανυσματική εξίσωση

$$\epsilon' : \vec{x}(t) = (1 + t, -2, t), \quad t \in R.$$