Κεφάλαιο 2

Πίνακες

̀Ασκηση 2.1

α) Παρατηρούμε ότι

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

και

$$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$A^2 = 2A.$$

β) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A = 2A \cdot A = 2A^2 = 2 \cdot 2A = 2^2 A \\ A^4 &= A^3 A = 2^2 A \cdot A = 2^2 A^2 = 2^2 \cdot 2A = 2^3 A \end{aligned}$$

Μετά από κάποιες πράξεις

$$A^{10} = A^9 A = 2^8 AA = 2^8 A^2 = 2^8 \cdot 2A = 2^9 A.$$

Άσκηση 2.2

Για τον πίνακα A ισχύει

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+2-3 & 2+4-6 & 3+6-9 \\ 1+2-3 & 2+4-6 & 3+6-9 \\ -1-2+3 & -2-4+6 & -3-6+9 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 2.3

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (I-A)^2 &= I^2 - IA - AI + A^2 = I^2 - A - A + A^2 \\ &= I^2 - 2A + A^2 \end{aligned} \qquad (i)$$

όμως $A^2 = A$, οπότε η (i) γίνεται

$$I^2 - 2A + A = I - A$$

Άσκηση 2.4

Ισχύει

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

οπότε η (i) γίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+m & 2k \\ 0 & 3k+m \end{bmatrix}$$

Έτσι, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} k+m &= 1 \\ 2k &= 8 \\ 3k+m &= 9 \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$k = 4 \quad \text{και} \quad m = -3$$

οπότε

$$A^2 = 4A - 3I.$$

Άσκηση 2.5

Για τον πίνακα A ισχύει

$$A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$A^2 - 5A + 7I = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Ἀσκηση 2.6

α) Έχουμε

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

όπου

$$a_{11} = -2, a_{12} = 6, a_{13} = 3$$

και

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 10 = 26, \\ A_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7, \\ A_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 12 = -16. \end{aligned}$$

’ρα

$$|A| = -2 \cdot 26 + 6 \cdot 7 - 3 \cdot 16 = -58.$$

β) Έχουμε

$$|B| = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} = axy.$$

Άσκηση 2.7

α) Ο πολλαπλασιασμός AB δίνει

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Επίσης, ο πολλαπλασιασμός BA δίνει

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$AB = -BA$$

β)

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Από το ερώτημα (α), $AB = -BA$, οπότε

$$A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 - BA + BA + B^2 = A^2 + B^2$$

Επομένως,

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2$$

Άσκηση 2.8

Παρατηρούμε ότι

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3x & 0 \\ 0 & 3x \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B^2 = \begin{bmatrix} -6y & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$$

οπότε, από τη σχέση

$$A^2 + B^2 = 0 \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} 3x & 0 \\ 0 & 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6y & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix} = 0$$

προκύπτει,

$$3x - 6y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2y \tag{i}$$

Επίσης,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} xy & 0 \\ 0 & -18 \end{bmatrix}$$

οπότε, από τη σχέση

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -18 \end{bmatrix}$$

προκύπτει,

$$xy = 8$$

η οποία λόγω και της (i) γίνεται

$$2y^2 = 8 \;\Leftrightarrow\; y = 2 \text{ ή } y = -2$$

οπότε, οι τιμές των $x, y \in R$ είναι

$$(x = 4 \text{ και } y = 2) \text{ ή } (x = -4 \text{ και } y = -2)$$

Άσκηση 2.9

Βρίσκουμε αρχικά τον πίνακα A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με A^{-1} και από δεξιά με A

$$A^{-1}AXA^{-1}A = A^{-1}BA,$$

οπότε

$$X = A^{-1}BA.$$

Επομένως,

$$X = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.10

Ο πίνακας X είναι 2×2, οπότε

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

και η

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

γίνεται

$$\begin{bmatrix} x_{11} + x_{21} - x_{12} & x_{12} + x_{22} + x_{11} \\ x_{11} + x_{21} - x_{22} & x_{12} + x_{22} + x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

από όπου προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} - x_{12} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{11} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} - x_{22} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{21} &= -1 \end{aligned}$$

το οποίο γράφεται

$$AX = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$|A| = 5$$

οπότε, το σύστημα έχει λύση

$$X = A^{-1}B \tag{i}$$

όπου
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,2 & -0,4 \\ -0,6 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & -0,4 & 0,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,2 & -0,6 & 0,2 \end{bmatrix}$$

και
$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

η (i) δίνει
$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,2 & -0,4 \\ -0,6 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & -0,4 & 0,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,2 & -0,6 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4 \\ -0,2 \\ -0,6 \\ -0,2 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$x_{11} = 1,4, \ x_{12} = -0,2, \ x_{21} = -0,6 \ \text{ και } \ x_{22} = -0,2$$

και

$$X = \begin{bmatrix} 1,4 & -0,2 \\ -0,6 & -0,2 \end{bmatrix}$$

Ἀσκηση 2.11

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^3 &= A^2A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{i}$$

Για $n = 1$ η (i) δίνει

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

που ισχύει εξ' υποθέσεως.
Έστω ότι η (i) ισχύει για $n = k$, δηλαδή ότι

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{ii}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$ δηλαδή ότι

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & (k+1)a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{iii}$$

Λόγω της (ii)

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^kA \\ &= \begin{bmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & a+ka \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & (k+1)a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα η (iii) ισχύει.
Επομένως η (i) ισχύει για κάθε ακέραιο n.

Άσκηση 2.14 Να βρεθούν οι πίνακες X και Y αν

$$X + 3Y = A \quad \text{και} \quad X - 2Y = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο εξισώσεις προκύπτει

$$5Y = A - B$$

Δηλαδή

$$Y = \frac{1}{5}(A - B).$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με 2 και τη δεύτερη εξίσωση με 3 και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$5X = 2A + 3B.$$

Δηλαδή

$$X = \frac{1}{5}(2A + 3B)$$

Οι πίνακες $A - B$ και $2A + 3B$ είναι

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -5 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad 2A + 3B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 21 \\ -9 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 21 \\ -9 & 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 4 \\ 1 & 1 & \frac{21}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{6}{5} & \frac{13}{5} \end{bmatrix}$$

και

$$Y = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -5 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.15

Λύση

$$f(A) = A^2 + 3A + I_3 \qquad (i)$$

και

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \\ 10 & -4 & 16 \end{bmatrix}$$

οπότε η (i) δίνει ($I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ο 3×3 μοναδιαίος)

$$\begin{aligned} f(A) &= \begin{bmatrix} 7 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \\ 10 & -4 & 16 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7+3\cdot 1+1 & -2 & 8+3\cdot 2 \\ 1+3\cdot 2 & 2+3\cdot 1+1 & 3(-1) \\ 10+3\cdot 3 & -4+3(-1) & 16+3\cdot 3+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & -2 & 14 \\ 7 & 6 & -3 \\ 19 & -7 & 26 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ἀσκηση 3.16

Υπολογίζουμε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A κάνοντας στοιχειώδεις πράξεις.
Αρχικά, αλλάζουμε αμοιβαία την πρώτη με τη δεύτερη γραμμή, οπότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. Ἐτσι, παίρνουμε

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή επί -1 και προσθέτοντας τη στη τρίτη, τέταρτη και πέμπτη γραμμή, η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει, οπότε

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την δεύτερη γραμμή επί -1 και προσθέτοντας τη στην τρίτη, τέταρτη και πέμπτη γραμμή, προκύπτει

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Αλλάζοντας την τρίτη με την τέταρτη γραμμή, η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την τρίτη γραμμή επί -2 και προσθέτοντας την στην τέταρτη, και πολλαπλασιάζοντας την τρίτη επί -1 και προσθέτοντας τη στην πέμπτη γραμμή δεν αλλάζει η τιμή της ορίζουσας

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Τέλος, πολλαπλασιάζοντας την τέταρτη γραμμή επί $-\frac{1}{3}$ και προσθέτοντας τη στην πέμπτη γραμμή, προκύπτει

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix}$$

Η ορίζουσα αυτή είναι κάτω τριγωνική, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.1 είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου της,

$$|A| = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 3 \left(-\frac{4}{3}\right) = 4 \neq 0$$

οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.9 ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 2.17

α) Θα δείξουμε την (ii) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

- Για $n = 1$ η (ii) γίνεται $B = P^{-1}AP$ και ισχύει λόγω της (i).
- Υποθέτουμε ότι ισχύει η (ii) για $k = n$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $k = n + 1$, δηλαδή ότι

$$B^{n+1} = P^{-1}A^{n+1}P. \tag{iv}$$

Λόγω της (ii), που υποθέτουμε ότι ισχύει, της (i) και της προσεταιριστικής ιδιότητας

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= BB^n \\ &= (P^{-1}AP)(P^{-1}A^nP) \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A^nP \\ &= P^{-1}AIA^nP \\ &= P^{-1}AA^nP \\ &= P^{-1}A^{n+1}P \end{aligned}$$

οπότε η (iv) ισχύει.
Επομένως η (ii) ισχύει για κάθε $k = 2, 3, \cdots$.
β) Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς πινάκων διαδοχικά στο δεύτερο μέλος της (iii)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} & \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= K \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ είναι

$$\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

οπότε

$$K = P^{-1}AP,$$

όπου

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, λόγω της (ii) και του (α),

$$K^8 = P^{-1}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)^8 P \tag{v}$$

Ισχύει

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)^8 = \begin{bmatrix} 3^8 & 0 \\ 0 & (-1)^8 \end{bmatrix},$$

οπότε η (v) δίνει

$$
\begin{aligned}
K^8 &= P^{-1}\left(\begin{bmatrix} 3^8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)P \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3^8}{2} & \frac{3^8}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3^8}{2}+\frac{1}{2} & \frac{3^8}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{3^8}{2}-\frac{1}{2} & \frac{3^8}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2.18

α) Χρησιμοποιούμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.
Για $n = 1$ η (i) γίνεται

$$I + A = I + (2^1 - 1)A \Leftrightarrow I + A = I + A\ ,$$

οπότε είναι αληθής.
Υποθέτουμε ότι ισχύει η (i) και θα δείξουμε ότι ισχύει για $n + 1$, δηλαδή ότι

$$(I + A)^{n+1} = I + (2^{n+1} - 1)A. \tag{ii}$$

Λόγω της (i) και του ότι $A^2 = A$,

$$\begin{aligned}
(I + A)^{n+1} &= (I + A)^n (I + A)\\
&= (I + (2^n - 1)A)(I + A)\\
&= I + A + (2^n - 1)A + (2^n - 1)A^2\\
&= I + A + (2^n - 1)A + (2^n - 1)A\\
&= I + [1 + 2(2^n - 1)]A\\
&= I + \left(2^{n+1} - 1)\right)A
\end{aligned}$$

οπότε η (ii) ισχύει.
Επομένως η (i) ισχύει για κάθε $n \in N^*$.
β) Ο B γράφεται

$$B = I + A\ ,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

οπότε σύμφωνα με την (i)

$$\begin{aligned}
B^6 &= (I + A)^6\\
&= I + (2^6 - 1)A\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (2^6 - 1)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 64 & 63 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Άσκηση 2.19

Οι πίνακες X, Y είναι 2×1, οπότε

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} [1 \;\; 2] + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} [2 \;\; 1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & 2x_1 \\ x_2 & 2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y_1 & y_1 \\ 2y_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2y_1 & 2x_1 + y_1 \\ x_2 + 2y_2 & 2x_2 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Εξισώνοντας τα στοιχεία των πινάκων, προκύπτουν τα συστήματα

$$\begin{aligned} x_1 + 2y_1 &= 1 \\ 2x_1 + y_1 &= 2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x_2 + 2y_2 &= -1 \\ 2x_2 + y_2 &= 3 \end{aligned}$$

τα οποία δίνουν

$$x_1 = 1, \; y_1 = 0, \; x_2 = \frac{7}{3} \;\text{ και }\; y_2 = -\frac{5}{3}$$

οπότε οι πίνακες X, Y είναι

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.20

Θεωρούμε τους 2×2 πίνακες X, Y

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \text{ και ; } Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

οπότε

$$X^2 = \begin{bmatrix} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} & x_{11}x_{12} + x_{12}x_{22} \\ x_{21}x_{11} + x_{22}x_{21} & x_{21}x_{12} + x_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$Y^2 = \begin{bmatrix} y_{11}^2 + y_{12}y_{21} & y_{11}y_{12} + y_{12}y_{22} \\ y_{21}y_{11} + y_{22}y_{21} & y_{21}y_{12} + y_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Από τις σχέσεις

$$X + Y = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } X^2 - Y^2 = \begin{bmatrix} 22 & 8 \\ 16 & 6 \end{bmatrix}$$

προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{matrix} x_{11} + y_{11} = 8 \\ x_{12} + y_{12} = 3 \\ x_{21} + y_{21} = 6 \\ x_{22} + y_{22} = 2 \end{matrix} \quad \text{και} \quad \begin{matrix} y_{11} = 8 - x_{11} \\ y_{12} = 3 - x_{12} \\ y_{21} = 6 - x_{21} \\ y_{22} = 2 - x_{22} \end{matrix} \qquad (i)$$

και

$$\begin{aligned} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} - y_{11}^2 - y_{12}y_{21} &= 22 \\ x_{11}x_{12} + x_{12}x_{22} - y_{11}y_{12} - y_{12}y_{22} &= 8 \\ x_{21}x_{11} + x_{22}x_{21} - y_{21}y_{11} - y_{22}y_{21} &= 16 \\ x_{21}x_{12} + x_{22}^2 - y_{21}y_{12} - y_{22}^2 &= 6 \end{aligned} \qquad (ii)$$

Μετά από αντικατάσταση των (i) στις (ii) προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} 3x_{21} + 6x_{12} + 16x_{11} &= 104 \\ 3x_{11} + 10x_{12} + 3x_{22} &= 38 \\ 6x_{11} + 10x_{21} + 6x_{22} &= 76 \\ 3x_{21} + 6x_{12} + 4x_{22} &= 28 \end{aligned}$$

το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$AX = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 10 & 16 \\ 0 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 104 \\ 38 \\ 76 \\ 28 \end{bmatrix}$$

και η ορίζουσα του A είναι

$$|A| = -800 \neq 0$$

και

$$|A_1| = -4000, \quad |A_2| = -1600 \quad |A_3| = -3200 \quad \text{και} \quad |A_4| = -800$$

οπότε

$$\begin{aligned}
x_{11} &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-4000}{-800} = 5 \\
x_{12} &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-1600}{-800} = 2 \\
x_{21} &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-3200}{-800} = 3 \\
x_{22} &= \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{-800}{-800} = 1
\end{aligned}$$

Με αντικατάσταση των $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ στις (i) προκύπτουν

$$y_{11} = 3, \quad y_{12} = 1, \quad y_{21} = 3, \quad y_{22} = 1,$$

οπότε,

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.21

α) Έχει λάθος στην εκφώνηση του βιβλίου.
Ο ανάστροφος του πίνακα $A + A^T$ είναι

$$\left(A + A^T\right)^T = A^T + \left(A^T\right)^T = A^T + A,$$

οπότε ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός.

$$\left(A - A^T\right)^T = A^T - \left(A^T\right)^T = A^T - A = -\left(A - A^T\right),$$

οπότε ο πίνακας $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός.
β) Είναι φανερό ότι για κάθε πίνακα A ισχύει

$$\frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^T = A,$$

όπου, σύμφωνα με το (α), πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός και ο $A - A^T$ αντισυμμετρικός, οπότε κάθε τετραγωνικός πίνακας A γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

α) Παρατηρούμε ότι

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{bmatrix} = -a^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -a^2 I$$

όπου I ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας, οπότε

$$A^4 = \left(A^2\right)^2 = \left(-a^2 I\right)^2 = a^4 I^2 = a^4 I = \beta I, \text{ όπου } \beta \text{ σταθερά.}$$

β) Αν ο n είναι άρτιος, $n = 2k$, οπότε

$$A^n = A^{2k} = \left(A^2\right)^k = \left(-a^2 I\right)^k = (-1)^k a^{2k} I^k = (-1)^k a^{2k} I,$$

οπότε

$$A^n = (-1)^{\frac{n}{2}} a^n I, \quad n \text{ άρτιος.}$$

Αν ο n είναι περιττός, $n = 2k+1$, οπότε

$$A^n = A^{2k+1} = \left(A^2\right)^k A = \left(-a^2 I\right)^k A = (-1)^k a^{2k} I^k A = (-1)^k a^{2k} A,$$

οπότε

$$A^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^{n-1} A, \quad n \text{ περιττός.}$$

Άσκηση 2.23

α) Χρησιμοποιούμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2A \\ &= \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

Επομένως η (i) ισχύει για $n = 1$.
Υποθέτουμε ότι ισχύει η (i) και θα δείξουμε ότι ισχύει η

$$A^{(n+1)+2} = A^{n+1}\ .$$

ή

$$A^{n+3} = A^{n+1}\ . \qquad (ii)$$

Λόγω της (i),

$$\begin{aligned} A^{n+3} &= A^{n+2}A \\ &= A^nA \\ &= A^{n+1}, \end{aligned}$$

οπότε η (ii) ισχύει.
Άρα, η (i) ισχύει για κάθε $n \in N^*$.

Άσκηση 2.24

α) Η μεγαλύτερη διάσταση ορίζουσα του πίνακα είναι 3 και μια 3×3 ορίζουσα της είναι η

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

οπότε
$$rank(A) = 3.$$

β) Η ορίζουσα του τετραγωνικού αυτού πίνακα είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Επίσης, υπάρχει 2×2 υποπίνακας με μη μηδενική ορίζουσα, την

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = 2$$

γ) Η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα είναι

$$|A| = -4\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

και μία 2×2 ορίζουσα είναι μη μηδενική

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

οπότε
$$rank(A) = 2.$$

δ) Η μεγαλύτερη διάσταση ορίζουσας είναι 3, όμως όλοι οι 3×3 υποπίνακες του A έχουν ορίζουσα μηδέν. Επίσης, υπάρχει 2×2 υποπίνακας με ορίζουσα μη μηδενική.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

οπότε
$$rank(A) = 2.$$

ε) Η μεγαλύτερη διάσταση ορίζουσας είναι 3, όμως όλοι οι 3×3 υποπίνακες του A έχουν ορίζουσα μηδέν. Επίσης, υπάρχει 2×2 υποπίνακας με ορίζουσα μη μηδενική.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

οπότε
$$rank(A) = 2.$$

στ) Η μεγαλύτερη διάσταση ορίζουσας είναι 3 και μια 3×3 ορίζουσα της είναι η

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

οπότε
$$rank(A) = 3$$

ζ) Η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

οπότε
$$rank(A) = 3$$

η) Η 3×3 ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα είναι $|A| = 0$, όμως υπάρχει 2×2 ορίζουσα η

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = 2$$

Άσκηση 2.25

α) Κάνοντας τον πολλαπλασιασμό

$$
\begin{aligned}
AA^T &= \begin{bmatrix} a & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & a & -\delta & \gamma \\ -\gamma & \delta & a & -\beta \\ -\delta & -\gamma & \beta & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & a & \delta & -\gamma \\ \gamma & -\delta & a & \beta \\ \delta & \gamma & -\beta & a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \end{bmatrix} \\
&= (a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= (a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)I
\end{aligned}
$$

οπότε

$$k = a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2.$$

β) Λόγω του (α)

$$|AA^T| = |kI|$$

ή

$$|A||A^T| = k|I|$$

ή

$$|A||A| = k \cdot 1$$

ή

$$|A|^2 = k$$

ή

$$|A| = \sqrt{k}$$

ή

$$|A| = \sqrt{a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}.$$

Άσκηση 2.26

α) Η ορίζουσα του A υπολογίζεται ότι είναι $|A| = 2 \neq 0$, οπότε ο αντίστροφος του είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

β) Η ορίζουσα του A είναι

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

Οι ορίζουσες των 2×2 υποπινάκων είναι

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \qquad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

οπότε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

γ) Η ορίζουσα του A είναι $|A| = -1$ και οι ορίζουσες των 2×2 υποπινάκων είναι

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3 \quad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3 \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

οπότε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

δ) Η ορίζουσα του A είναι $|A| = 1$ και οι ορίζουσες των 2×2 υποπινάκων είναι

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

οπότε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ε) Η ορίζουσα του Α είναι $|A| = -138$, οπότε ο αντίστροφος είναι

$$A^{-1} = -\frac{1}{138}\begin{bmatrix} -58 & -39 & 50 & 23 \\ 46 & 69 & -92 & -23 \\ 118 & 27 & -116 & -23 \\ -18 & -24 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,42 & 0,28 & -0,36 & -0,17 \\ -0,33 & -0,5 & 0,67 & 0,17 \\ -0,86 & -0,2 & 0,84 & 0,17 \\ 0,13 & 0,17 & -0,04 & 0 \end{bmatrix}$$

στ) Όμοια ($|A| = 1$), προκύπτει ότι ο αντίστροφος του πίνακα Α είναι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.27

α) Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα A αναπτύσσοντάς την ως προς τα στοιχεία της τελευταίας στήλης της.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(A) = 4.$$

β) Ο βαθμός του πίνακα B είναι 2, διότι $|B| = 0$, δεν υπάρχει 3×3 υποπίνακας του B με μη μηδενική ορίζουσα και

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

γ) Ο βαθμός του πίνακα Γ είναι 2, διότι $|\Gamma| = 0$, οι ορίζουσες όλων των 3×3 υποπινάκων του Γ είναι μηδέν και υπάρχει μη μηδενική ορίζουσα 2×2, π.χ η

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

δ) Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα Δ προκύπτει ότι είναι μηδέν. Επίσης υπάρχει μη μηδενική ορίζουσα 3×3 του Δ, οπότε

$$rank(\Delta) = 3.$$

ε) Ο βαθμός του πίνακα E είναι 2, διότι $|E| = 0$, οι ορίζουσες όλων των 3×3 υποπινάκων του E είναι μηδέν και υπάρχει μη μηδενική ορίζουσα 2×2, π.χ η

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$