12.6 Ο ερμητιανός χώρος των κυματοσυναρτήσεων και οι τελεστές της κβαντομηχανικής

12.7 Ο μαθηματικός φορμαλισμός της κβαντομηχανικής

Η κβαντομηχανική, που είναι η σύγχρονη φυσική του μικρόκοσμου, θεμελιώνεται με τα κβαντικά αξιώματα, τα οποία αναφέρονται σε ερμητιανούς διανυσματικούς χώρους και σε ερμητιανούς τελεστές (γραμμικές απεικονίσεις), κάποια από τα οποία δίνονται παρακάτω.

Παρατήρηση 12.1 *Η κατάσταση κάθε σωματιδίου περιγράφεται από μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη μιγαδική συνάρτηση $\psi(x, y, z, t)$ των συντεταγμένων του και του χρόνου, συνεχή με συνεχείς πρώτες παραγώγους, την* ***κυματοσυνάρτησή*** *του, η οποία περιέχει όλες τις πληροφορίες για την κατάσταση του. Το σύνολο των κυματοσυνάρτησεων είναι ερμητιανός διανυσματικός χώρος, στον οποίο το ερμητιανό γινόμενο δύο κυματοσυνάρτησεων $\psi_1(x, y, z, t)$ και $\psi_2(x, y, z, t)$ ορίζεται ως*

$$\langle \psi_1(x, y, z, t),\ \psi_2(x, y, z, t) \rangle = \iiint_{R^3} \overline{\psi_1(x, y, z, t)},\ \psi_2(x, y, z, t) dx dy dz, \tag{12.1}$$

R^3 όλος ο τρισδιάστατος χώρος.

Στα παραδείγματα του βιβλίου αυτού παρουσιάζουμε μόνον μονοδιάστατα κβαντικά συστήματα, στα οποία το ερμητιανό γινόμενο δύο κυματοσυνάρτησεων $\psi_1(x, t)$ και $\psi_2(x, t)$ ορίζεται ως

$$\langle \psi_1(x, t),\ \psi_2(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_1(x, t)},\ \psi_2(x, t) dx. \tag{12.2}$$

Παρατήρηση 12.2 *Τα κβαντικά αξιώματα μπορεί να συνοψιστούν στα εξής:*

- *Σε κάθε φυσικό μέγεθος Α αντιστοιχεί ένας* ***γραμμικός ερμιτιανός τελεστής*** *$\hat{A}$.*
- *Οι μόνες τιμές που προκύπτουν από την μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους Α είναι οι* ***ιδιοτιμές*** *a_n του αντίστοιχου τελεστή $\hat{A}$, .*
- *Η* ***πιθανότητα*** *σε μία μέτρηση του μεγέθους Α να προκύψει η ιδιοτιμή a_n για ένα σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση ψ είναι*

$$P_n = \frac{|< y_n, \psi >|^2}{< \psi, \psi >}, \tag{12.3}$$

όπου y_n η ιδιοσυνάρτηση του $\hat{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή a_n.

- *Η* ***μέση τιμή*** *$< A >$ ενός μεγέθους Α, για ένα σωμάτιο με κυματοσυνάρτηση ψ, μπορεί να υπολογισθεί:*

▼ *είτε από το αντίστοιχο αξίωμα της κβαντικής, σύμφωνα με το οποίο,*

$$< A >= \frac{\left\langle \psi, \widehat{A}\psi \right\rangle}{< \psi, \psi >} \tag{12.4}$$

▼ *είτε από τον ορισμό της μέσης τιμής, σύμφωνα με τον οποίο,*

$$< A >= \sum_k P_k a_k, \tag{12.5}$$

όπου P_k οι πιθανότητες των ιδιοτιμών a_k της (12.3).

Στα παραδείγματα της ενότητας αυτής συναντούμε συχνά τον τελεστή της ενέργειας, που λέγεται **τελεστής Hamilton** και συμβολίζεται με $\hat{H}$.

Παράδειγμα 12.1 *Ο τελεστής της συνιστώσας z της στροφορμής, σε ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων, ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο Oxy είναι*

$$\widehat{L}_z = -i\hbar\frac{d}{d\varphi}$$

όπου φ η πολική γωνία του σωματιδίου.
Να δειχθεί ότι οι ιδιοτιμές του $\widehat{L}_z$ και οι αντίστοιχες κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$a_n = n\hbar \quad \text{και} \quad Y_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi}, \quad n \in N \tag{12.6}$$

Λύση

Ονομάζοντας a και $\psi_a(\varphi)$ τις ιδιοτιμές και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του $\widehat{L}_z$,

$$\widehat{L}_z\psi_a(\varphi) = a\psi_a(\varphi) \;\Leftrightarrow\; -i\hbar\frac{d\psi_a(\varphi)}{d\varphi} = a\psi_a(\varphi).$$

Λύνοντας τη στοιχειώδη αυτή διαφορική αυτή εξίσωση (χωριζομένων μεταβλητών) παίρνουμε

$$\psi(\varphi) = Ae^{\frac{ai\varphi}{\hbar}}, \quad A \;\; \text{μιγαδική σταθερά.} \tag{i}$$

Λόγω του ορισμού της γωνίας φ των σφαιρικών συντεταγμένων τα σημεία $(r, \varphi+2\pi)$ και (r, φ) συμπίπτουν, οπότε κάθε συνάρτηση $\psi(\varphi)$, άρα και οι ιδιοσυναρτήσεις $\psi_a(\varphi)$, πρέπει να έχει την ίδια τιμή στα σημεία αυτά. Δηλαδή,

$$\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$$

ή

$$Ae^{\frac{ai(\varphi+2\pi)}{\hbar}} = Ae^{\frac{ai\varphi}{\hbar}} \;\Leftrightarrow\; e^{\frac{ai\varphi}{\hbar}}e^{\frac{ai2\pi}{\hbar}} = e^{\frac{ai\varphi}{\hbar}} \;\Leftrightarrow\; e^{\frac{ai2\pi}{\hbar}} = 1,$$

οπότε ($e^{i\theta} = 1$ αν και μόνον αν το θ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π)

$$\frac{a2\pi}{\hbar} = n2\pi \;\Leftrightarrow\; a = n\hbar, \quad n \in Z.$$

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις, όπως προκύπτουν από την (i) για $a = n\hbar$, είναι

$$\psi_n(\varphi) = Ae^{in\varphi}, \quad n \in Z.$$

Η σταθερά A προκύπτει από τη συνθήκη κανονικοποίησης

$$\langle\psi, \psi\rangle = 1,$$

όπου

$$\langle\psi, \psi\rangle = \int_0^{2\pi}\overline{\psi}(\varphi)\psi(\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi}\overline{A}e^{-in\varphi}Ae^{in\varphi}d\varphi = |A|^2\int_0^{2\pi}d\varphi = 2\pi|A|^2,$$

οπότε

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Αν και παράξενη, αυτή είναι η γλώσσα της Κβαντομηχανικής, που είναι η μοναδική θεωρία Φυσικής που ερμηνεύει τα φαινόμενα του μικρόκοσμου.

Παράδειγμα 12.2 *Να υπολογιστεί η πιθανότητα μία μέτρηση της συνιστώσας z της στροφορμής να δώσει $-2\hbar$ για ένα σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση*

$$\psi(\varphi) = A\sin^3 2\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad A \;\; \text{σταθερά,}$$

Λύση

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 12.1, η ιδιοσυνάρτηση του $\hat{L}_z$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $-2\hbar$ είναι

$$Y_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2i\varphi},$$

οπότε η πιθανότητα μία μέτρηση της συνιστώσας z της στροφορμής του σωματιδίου να δώσει $-2\hbar$ είναι

$$P = \frac{|\langle \psi(\varphi), Y_{-2}\rangle|^2}{\langle \psi(\varphi), \psi(\varphi)\rangle} \tag{i}$$

Ισχύει

$$\begin{aligned}
\langle \psi(\varphi), Y_{-2}\rangle &= \int_0^{2\pi} A\sin^3 2\varphi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2\hbar} d\varphi \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{2\pi} A\sin^3 2\varphi \cos(-2\varphi) d\varphi + i \int_0^{2\pi} A\sin^3 2\varphi \sin(-2\varphi) d\varphi \right\} \\
&= -\frac{3\pi}{4} \frac{A}{\sqrt{2\pi}} i \\
\langle \psi(\varphi), \psi(\varphi)\rangle &= \int_0^{2\pi} A^2 \sin^6 2\varphi d\varphi = A^2 \frac{5\pi}{8}
\end{aligned}$$

οπότε η (i) δίνει

$$P = \frac{\left| -\frac{3\pi}{4} \frac{A}{\sqrt{2\pi}} i \right|}{A^2 \frac{5\pi}{8}} = \frac{9}{20}$$

Παράδειγμα 12.3 *Να βρεθούν οι οι δυνατές τιμές της κινητικής ενέργειας ενός σωματιδίου*

$$K = \frac{L_z^2}{2I}$$

όπου L_z η συνιστώσα z της στροφορμής του και I η σταθερή ροπή της αδράνειάς του, και οι αντιστοιχες ιδιοσυναρτήσεις.

Λύση

Ο τελεστής (γραμμική απεικόνιση) της κινητικής ενέργειας είναι συνάρτηση του τελεστή της συνιστώσας z της στροφορμής L_z οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 9.8, οι ιδιοσυναρτήσεις της L_z (βλ. το Παράδειγμα 12.1)

$$Y_n(\varphi) = ce^{im\varphi}, m \in Z$$

είναι ιδιοσυναρτήσεις και του τελεστή K οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι

$$K_m = \frac{a_m^2}{2I}$$

όπου
$$a_m = mh, m \in Z$$

οι ιδιοτιμές της L_z (βλ. Παράδειγμα 12.1).

Επομένως, οι δυνατές τιμές της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου αυτού είναι

$$K = \frac{(mh)^2}{2I} = \frac{h^2}{2I} m, \quad m \in Z.$$

12.7.1 Ανάπτυγμα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων ερμητιανού τελεστή

Κάθε κυματοσυνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων ενός ερμητιανού τελεστή, οι οποίες αποτελούν μία βάση του ερμητιανού διανυσματικού χώρου των κυματοσυναρτήσεων.

Παρατήρηση 12.3 *Αν η κυματοσυνάρτηση ψ είναι εκφρασμένη ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων y_k του ερμητιανού τελεστή $\hat{A}$*

$$\psi = \sum_k C_k y_k$$

τότε η πιθανότητα σε μία μέτρηση του μεγέθους A να προκύψει η ιδιοτιμή a_n είναι

$$P_n = \frac{|C_n|^2}{\sum_k |C_k|^2}, \tag{12.7}$$

και η μέση τιμή του A

$$< A >= \frac{\sum_k \left(|C_k|^2 a_k\right)}{\sum_k |C_k|^2}. \tag{12.8}$$

Το ερμητιανό γινόμενο δύο κυματοσυναρτήσεων ψ_1 και ψ_2 με αναπτύγματα ως προς τις y_k

$$\psi_1 = \sum_k C_k y_k \quad \text{και} \quad \psi_2 = \sum_k D_k y_k$$

είναι

$$\langle \psi_1,\ \psi_2 \rangle = \sum_k \left(\overline{C}_k D_k\right).$$

Παράδειγμα 12.4 *Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο των κυματοσυναρτήσεων*

$$\psi_1(\varphi) = 7Y_{-1} - iY_1 + (1+i)Y_2$$
$$\psi_2(\varphi) = 8Y_0 + 2Y_1 - Y_2$$

όπου Y_m οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της συνιστώσας z της στροφορμής $\hat{L}_z$ για τις ιδιοτιμές $m\hbar$.

Λύση

Επειδή οι $\psi_1(\varphi)$ και $\psi_2(\varphi)$ είναι εκφρασμένες ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή $\hat{L}_z$, οι οποίες συνιστούν μία ορθοκανονική βάση του ερμητιανού χώρου των μιγαδικών συναρτήσεων, το εσωτερικό γινόμενο $< f, g >$ είναι

$$\begin{aligned} < \psi_1,\ \psi_2 > &= \overline{7}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 8 + \overline{(-i)}\cdot 2 + \overline{(1+i)}\cdot(-1) \\ &= 2i + (1-i)(-1) = -1 + 3i \end{aligned}$$

Παράδειγμα 12.5 *Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου είναι*

$$\psi(\varphi) = A\{Y_1 + (1+2i)Y_{-3}\}$$

όπου Y_1 και Y_{-3} οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της συνιστώσας z της στροφορμής $\hat{L}_z$ για τις ιδιοτιμές $\hbar$ και $-3\hbar$ αντίστοιχα.
Να υπολογισθεί η σταθερή A ώστε η $\psi(\varphi)$ να είναι κανονικοποιημένη.

Λύση

Επειδή η $\psi(\varphi)$ είναι εκφρασμένη ως γραμμικός συνδυασμός ιδιοσυναρτήσεων του ερμιτιανού τελεστή $\hat{L}_z$, το $< \psi(\varphi), \psi(\varphi) >$, υπολογίζεται με την βοήθεια της Παρατήρησης 12.2,

$$< \psi(\varphi), \psi(\varphi) >= |A|^2 + |A(1+2i)|^2 = |A|^2(1 + |1+2i|^2) = 6|A|^2.$$

Για νάναι η $\psi(\varphi)$ κανονικοποιημένη πρέπει

$$< \psi(\varphi), \psi(\varphi) >= 1 \ \Leftrightarrow\ 6|A|^2 = 1 \ \Leftrightarrow\ |A| = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

οπότε η κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου είναι

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[Y_1 + (1+2i)Y_{-3}\right].$$

Παράδειγμα 12.6 *Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου είναι*

$$\psi(\varphi) = 2Y_{-1} - 3Y_0 - iY_2$$

όπου Y_m, $m \in Z$ οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της συνιστώσας της στροφορμής $\hat{L}_z$ για τις ιδιοτιμές mh. Να βρεθούν οι τιμές που προκύπτουν από μιά μέτρηση της συνιστώσας z της στροφορμής του σωματιδίου αυτού και οι αντίστοιχες πιθανότητες.

Λύση

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 12.3, οι μόνες τιμές που προκύπτουν από μιά μέτρηση της συνιστώσας z της στροφορμής του σωματιδίου είναι οι ιδιοτιμές $-\hbar$, 0, $2\hbar$ που αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις Y_{-1}, Y_0, Y_2 του $\hat{L}_z$ που περιέχονται στο ανάπτυγμα της $\psi(\varphi)$. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι

σ

$$\begin{aligned}
P_{-1} &= \frac{|2|^2}{|2|^2 + |-3|^2 + |-i|^2} = \frac{4}{14} \\
P_0 &= \frac{|-3|^2}{|3|^2 + |-3|^2 + |-i|^2} = \frac{9}{14} \\
P_2 &= \frac{|-i|^2}{|2|^2 + |-3|^2 + |-i|^2} = \frac{1}{14}
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 12.4 *Αν σε μία ιδιοτιμή a_k του τελεστή ενός φυσικού μεγέθους A αντιστοιχούν περισσότερες από μια ιδιοσυναρτήσεις $y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{k\mu_k}$ τότε ένα σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση ψ της οποίας το ανάπτυγμα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων του μεγέθους A είναι*

$$\psi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\mu_i} c_{ij} y_{ij} \qquad (i)$$

η πιθανότητα μιας ιδιοτιμής a_k είναι

$$P_k = \frac{\sum_{j=1}^{\mu_k} |c_{ij}|^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\mu_i} |c_{ij}|^2}$$

Στον αριθμητή έχουμε το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων των συντελεστών όλων των ιδιοσυναρτήσεων y_{kj} που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή y_k, ενώ στον παρονομαστή το άθροισμα περιλαμβάνει όλους του συντελεστές της (i).

Παράδειγμα 12.7 *Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου είναι*

$$\psi = 2Y_{-1} - Y_0 + (1-2i)Y_1 - (2+3i)Y_2$$

όπου Y_m οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $\hat{L}_z$ για τις ιδιοτιμές $m\hbar$.
Να βρεθεί η πιθανότητα να προκύψει η τιμή $c\hbar^2$ από μιά μέτρηση της ενέργειας του, αν ο τελεστής ενέργειας (τελεστής Hamilton) του σωματιδίου είναι

$$H = cL_z^2, \quad c \quad \text{μιγαδική σταθερά.}$$

Λύση

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.8, οι ενεργειακές ιδιοτιμές του σωματιδίου είναι

$$e_m = c(m\hbar)^2 = cm^2\hbar^2 \qquad (i)$$

και μία βάση του διανυσματικού υπόχωρου των ιδιοσυναρτήσεων του $\hat{H}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή ϵ_m αποτελείται από τις

$$Y_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad \text{και} \quad Y_{-m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\varphi}$$

Η ενεργειακή τιμή $c\hbar^2$ προκύπτει από την (i) για $m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$, οπότε δύο γραμμικά ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις για την ιδιοτιμή αυτή είναι οι Y_{-1} και Y_1. Επομένως, η πιθανότητα της ενεργειακής ιδιοτιμής $c\hbar^2$ είναι

$$P = \frac{|2|^2 + |1-2i|^2}{|2|^2 + |-1|^2 + |1-2i|^2 + |-(2+3i)|^2} = \frac{4+5}{4+1+5+13} = \frac{9}{23}$$

Παρατήρηση 12.5 *Ενα σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση $\psi(t)$ θα βρεθεί στην κατάσταση που περιγράφεται από την κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση ψ_a τις χρονικές στιγμές τ, για τις οποίες η αντίστοιχη πιθανότητα γίνεται μονάδα, δηλαδή*

$$\frac{|\langle \psi(t), \psi_a \rangle|^2}{\langle \psi(t), \psi(t) \rangle} = 1. \tag{12.9}$$

Παράδειγμα 12.8 *Να βρεθούν οι χρονικές στιγμές τις οποίες ένα σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση*

$$\psi(t) = A\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ict} Y_1(\varphi) + A\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{ict} Y_{-1}(\varphi)$$

θα βρεθεί στην κατάσταση που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi_a = \frac{1}{i\sqrt{2}} (Y_1 - Y_{-1}).$$

Λύση

Το σωματίδιο θα βρεθεί στην κατάσταση που περιγράφεται από την ψ_a, η οποία είναι κανονικοποιημένη, τις χρονικές στιγμές t, για τις οποίες

$$\frac{|\langle \psi(t), \psi_a \rangle|^2}{\langle \psi(t), \psi(t) \rangle} = 1 \tag{i}$$

Το ερμητιανό γινόμενο του αριθμητή και του παρονομαστή της (i) είναι

$$\begin{aligned}
\langle \psi(t), \psi_a \rangle &= \left\langle A\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-ict} Y_1(\varphi) + e^{ict} Y_{-1}(\varphi) \right), \frac{1}{i\sqrt{2}} (Y_1(\varphi) - Y_{-1}(\varphi)) \right\rangle \\
&= A\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{i\sqrt{2}} \left\langle e^{-ict} Y_1(\varphi) + e^{ict} Y_{-1}(\varphi),\ Y_1(\varphi) - Y_{-1}(\varphi) \right\rangle \\
&= A\frac{\sqrt{\pi}}{2i} \left(e^{ict} + e^{-ict}(-1) \right) = A\sqrt{\pi} \sin(ct) \\
\langle \psi(t), \psi(t) \rangle &= \left| A\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ict} \right|^2 + \left| A\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{ict} \right|^2 = 2 \left| A\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right|^2 \left| e^{-ict} \right|^2 = A^2 \pi
\end{aligned}$$

οπότε η (i) δίνει

$$\frac{\left| A\sqrt{\pi} \sin(ct) \right|^2}{A^2 \pi} = 1 \Leftrightarrow \sin^2(ct) = 1 \Leftrightarrow \sin(ct) = \pm 1$$

Επομένως, οι ζητούμενες χρονικές στιγμές είναι οι ρίζες της εξίσωση αυτής, δηλαδή

$$ct_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in N.$$

Παράδειγμα 12.9 *Οι ενεργειακές ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις ενός σωματιδίου μάζας m μέσα σε ένα απειρόβαθο πηγάδι εύρους L είναι*

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2 \quad \textit{και} \quad y_n = \begin{cases} 0 & x<0 \;\; \acute{\eta} \;\; x>L \\ A\sin\dfrac{n\pi x}{L} & 0<x<L \end{cases} \quad n\in N \qquad (i)$$

α) Να βρεθούν οι κανονικοποιημένες ενεργειακές ιδιοσυναρτήσεις.
β) Να υπολογιστεί για ένα σωματίδιο μέσα στο πηγάδι με κυματοσυνάρτηση

$$\psi_a(x) = C\sin^2\frac{\pi x}{L}, \quad C \;\; \textit{σταθερά}.$$

η πιθανότητα μία μέτρηση της ενέργειας του να δώσει

$$\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}.$$

ii) *Να υπολογιστεί για ένα σωματίδιο μέσα στο πηγάδι με κυματοσυνάρτηση*

$$\psi_\beta(x) = Cx(L-x), \quad C \;\; \textit{σταθερά}.$$

η μέση τιμή της ενέργειας του.

Λύση

α) Η σταθερά Α υπολογίζεται από την συνθήκη κανονικοποίησης των y_n

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overline{y}_n y_n dx = 1 \qquad (ii)$$

Επειδή $\qquad y_n(x) = 0,\; x<0 \;$ ή $\; x>L \quad$ και $\quad y_n(x) = A\sin\frac{n\pi x}{L},\; 0<x<L,$

το ολοκλήρωμα της (ii) είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overline{y}_n y_n dx = \int_0^L \overline{A}\sin\frac{n\pi x}{L}A\sin\frac{n\pi x}{L}dx = |A|^2\int_0^L \sin^2\frac{n\pi x}{L}dx = |A|^2\frac{L}{2},$$

οπότε η (i) δίνει

$$|A|^2\frac{L}{2} = 1 \;\Leftrightarrow\; |A| = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

Επομένως, οι κανονικοποιημένες ενεργειακές ιδιοσυναρτήσεις στην περίπτωση αυτή είναι

$$y_n = \begin{cases} 0, & x<0 \;\; \acute{\eta} \;\; x>L \\ \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\dfrac{n\pi x}{L}, & 0<x<L \end{cases} \quad n\in N$$

β) i) Η πιθανότητα μία μέτρηση της ενέργειας του σωματιδίου να δώσει (βλ. (i))

$$\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}1^2 = E_1,$$

είναι

$$P_1 = \frac{|\langle y_1,\psi_a\rangle|^2}{\langle\psi_a,\psi_a\rangle}, \qquad (i)$$

όπου

$$\begin{aligned}\langle y_1,\psi_a\rangle &= \int_0^L\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}C\sin^2\frac{\pi x}{L}dx = C\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{4L}{3\pi}\\ \langle\psi_a,\psi_a\rangle &= \int_0^L\overline{C}\sin^2\frac{\pi x}{L}C\sin^2\frac{\pi x}{L}dx = |C|^2\int_0^L\sin^4\frac{\pi x}{L}dx = |C|^2\frac{3L}{8}\end{aligned}$$

Έτσι, από την (i) προκύπτει ότι

$$P_2 = \frac{\left|C\sqrt{\dfrac{2}{L}}\dfrac{4L}{3\pi}\right|^2}{|C|^2\dfrac{3L}{8}} = \frac{256}{27\pi^2} = 0,961.$$

ii) Η μέση τιμή της ενέργειας του σωματιδίου είναι

$$< E >= \sum_{n=1}^{+\infty} P_n E_n, \qquad (ii)$$

όπου P_n οι πιθανότητες των ιδιοτιμών E_n, οι οποίες είναι

$$P_n = \frac{|\langle y_n, \psi\rangle|^2}{\langle \psi, \psi\rangle} \qquad (iii)$$

όπου

$$\langle y_n, \psi_\beta\rangle = \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{n\pi x}{L} Cx(L-x)dx = C\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{4L^3 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2}{\pi^3 n^3} - \frac{L^3 \sin\frac{\pi n}{2}}{\pi^2 n^2}$$

Επίσης,

$$\langle \psi, \psi\rangle = \int_0^L \overline{C}x(L-x)Cx(L-x)dx = |C|^2 \int_0^L x^2(L-x)^2 dx = |C|^2 \frac{L^5}{30}.$$

Έτσι, η (iii) δίνει

$$P_n = \frac{\left(C\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{4L^3 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2}{\pi^3 n^3} - \frac{L^3 \sin\frac{\pi n}{2}}{\pi^2 n^2}\right)^2}{|C|^2 \frac{L^5}{30}} = \frac{60}{\pi^3 n^3}\left[\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 - n\pi \sin\frac{\pi n}{2}\right],$$

οπότε από την (ii) προκύπτει ότι

$$< E >= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{60}{\pi^3 n^3}\left[\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 - n\pi \sin\frac{\pi n}{2}\right] \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2 = \frac{30\hbar^2}{mL^2} \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 - \sin\frac{\pi n}{2}\right].$$

12.7.2 Κβαντική θεωρία του σπιν

Το σπιν (spin, ιδιοπεριστροφή) είναι ένα βασικό χαρακτηριστικό στη μελέτη των σωματιδίων του μικρόκοσμου από την Κβαντομηχανική. Περιγράφουμε, αρχικά, την κβαντική θεωρία του σπιν φερμιονίων (π.χ. ηλεκτρονίου) και στο τέλος της ενότητας, δίνουμε συνοπτικά την κβαντική θεωρία μποζονίων (π.χ. φωτονίων).

Σπιν-διανύματα φερμιονίων του C^2

*Η σπιν κατάσταση ενός **φερμιονίου** περιγράφεται από διάνυσμα (πίνακα στήλη 2×1) τριών μιγαδικών αριθμών και τα σχετικά με το σπιν φυσικά μεγέθη αντιστοιχούν σε τελεστές (γραμμικές απεικονίσεις) του δισδιάστατου ερμητιανού χώρου C^2, που περιγράφονται από πίνακες 2×2.*

Το διάνυσμα του σπιν (διάνυσμα σπιν) ενός **φερμιονίου** είναι ένα στοιχείο του ερμητιανού διανυσματικού χώρου C^2,

$$X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in C, \quad \text{με} \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

Τα σχετικά με το σπιν φυσικά μεγεθη περιγράφονται από γραμμικές απεικονίσεις του ερμητιανού διανυσματικού χώρου C^2, που παριστάνονται από πίνακες 2×2 μιγαδικών αριθμών, όπως οι παρακάτω τελεστές των συνιστωσών του σπιν, που λέγονται **τελεστές Pauli**:

$$\widehat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (12.10)$$

Παράδειγμα 12.10 *Να δειχθεί ότι οι τελεστές Pauli του ερμητιανού χώρου C^2 είναι ερμητιανοί.*

Λύση

Για κάθε $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, $u_1, u_2, v_1, v_2 \in C$ για τη γραμμική απεικόνιση $\hat{\sigma}_x$ με πίνακα τον σ_x ισχύει

$$\hat{\sigma}_x(\vec{u}) = \sigma_x \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$< \hat{\sigma}_x(\vec{u}), \vec{v} >= [\overline{u}_2 \quad \overline{u}_1] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \overline{u}_2 v_1 + \overline{u}_1 v_2.$$

Επίσης,

$$< \vec{u}, \hat{\sigma}_x(\vec{v}) >= [\overline{u}_1 \quad \overline{u}_2] \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \overline{u}_1 v_2 + \overline{u}_2 v_1,$$

οπότε

$$< \hat{\sigma}_x(\vec{u}), \vec{v} >=< \vec{u}, \hat{\sigma}_x(\vec{v}) >, \quad \text{για κάθε } \vec{u}, \vec{v} \in C^2.$$

Επομένως, ο τελεστής $\hat{\sigma}_x$ είναι ερμητιανός.
Επίσης,

$$\hat{\sigma}_y(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -iu_2 \\ iu_1 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$< \hat{\sigma}_y(\vec{u}), \vec{v} >= [i\overline{u}_2 \quad -i\overline{u}_1] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = i\overline{u}_2 v_1 - i\overline{u}_1 v_2.$$

Επίσης,

$$< \vec{u}, \hat{\sigma}_y(\vec{v}) >= [\overline{u}_1 \quad \overline{u}_2] \begin{bmatrix} -iv_2 \\ iv_1 \end{bmatrix} = -i\overline{u}_1 v_2 + \overline{u}_2 v_1,$$

οπότε

$$< \hat{\sigma}_y(\vec{u}), \vec{v} >=< \vec{u}, \hat{\sigma}_y(\vec{v}) >, \quad \text{για κάθε } \vec{u}, \vec{v} \in C^2.$$

Επομένως, ο τελεστής $\hat{\sigma}_y$ είναι ερμητιανός.
Όμοια προκύπτει ότι και ο τελεστής $\hat{\sigma}_z$ είναι ερμητιανός.

Παράδειγμα Ο τελεστής της ενέργειας ενός φερμιονίου που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$ (παράλληλο στον άξονα z) είναι

$$\widehat{H} = cB_0 \widehat{S}_z = cB_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad c \text{ σταθερά}.$$

Στην κβαντική θεωρία του σπιν χρησιμοποιούνται, επίσης, οι τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης,

$$\widehat{\sigma}_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{12.11}$$

Η εικόνα ενός διανύσματος σπιν X για έναν τελεστή σπιν $\overline{s}_i$, που συμβολίζεται με $\overline{s}_i X$, είναι το γινόμενο του αντίστοιχου πίνακα επί το διάνυσμα-στήλη X. Για παράδειγμα, η εικόνα του διανύσματος σπιν ενός φερμιονίου

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

για τους τελεστές $\widehat{\sigma}_x, \widehat{\sigma}_y$ και $\widehat{\sigma}_z$ είναι

$$\widehat{\sigma}_x X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\sigma}_y X = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -i\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\sigma}_z X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Θυμίζουμε ότι στον ερμητιανό διανυσματικό χώρο C^2.

Παρατήρηση 12.6 *Το συζυγές ανάστροφο του διανύσματος-στήλη*

$$X = \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix}$$

είναι το διάνυσμα-γραμμή

$$X^* = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{\beta} \end{bmatrix},$$

όπου $\overline{a}$, $\overline{\beta}$ *τα συζυγή μιγαδικά των* a, β.
Το ερμητιανό γινόμενο των διανυσμάτων σπιν

$$X_1 = \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} \quad \textit{και} \quad X_2 = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

είναι

$$\langle X_1, X_2 \rangle = X_1^* X_2 = \begin{bmatrix} \overline{a}_1 & \overline{\beta}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \overline{a}\gamma + \overline{\beta}\delta$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_z X_+ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = X_+ \\ \widehat{\sigma}_z X_- &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -X_- \end{aligned}$$

προκύπτει η επόμενη βασική παρατήρηση.

Παρατήρηση 12.7 *Τα διανύσματα σπιν*

$$X_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textit{και} \quad X_- = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του τελεστή $\widehat{\sigma}_z$ *για τις ιδιοτιμές 1 και -1 αντίστοιχα και αποτελούν μία βάση του ερμητιανού χώρου των διανυσμάτων σπιν.*

Κάθε διάνυσμα σπιν $X = \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix}$ γράφεται στη μορφή

$$X = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = aX_+ + \beta X_-,$$

οπότε από τα αξιώματα της κβαντικής προκύπτει:

Παρατήρηση 12.8 *Οι πιθανότητες* P_{z+}, P_{z-} *το σπιν να βρεθεί παράλληλο στον* $+z$ *ή στον* $-z$ *ημιάξονα είναι ίσες με τα τετράγωνα των μέτρων του πάνω και κάτω στοιχείου του διανύσματος σπιν του αντίστοιχα.*

Επειδή τα διανύσματα σπιν είναι πάντα κανονικοποιημένα

$$< X, X >= 1,$$

οπότε από τα αξιώματα της κβαντικής προκύπτει ότι:

Παρατήρηση 12.9 *Ο τελεστής* $\widehat{\sigma}_n$ *της προβολής του σπιν στην κατεύθυνση του μοναδαίου διανύσματος*

$$\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

είναι

$$\hat{n} = n_1 \hat{\sigma}_x + n_2 \hat{\sigma}_y + n_3 \hat{\sigma}_z,$$

όπου $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ *οι πίνακες Pauli (12.10).*

Παράδειγμα 12.11 *Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή*

$$\hat{\sigma}_n = n_x \widehat{\sigma}_x + n_y \widehat{\sigma}_y + n_z \widehat{\sigma}_z$$

της προβολής του σπιν στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος

$$\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$$

που σχηματίζει γωνίες φ *και* θ *με τους άξονες* x *και* z *αντίστοιχα.*

Λύση

Το μοναδιαίο διάνυσμα που σχηματίζει γωνίες φ και θ με τους άξονες x και z αντίστοιχα είναι

$$\vec{n} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k},$$

οπότε ο πίνακας του τελεστή $\hat{\sigma}_n$ είναι

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_n &= \vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\sigma}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\sigma}_y + \cos\theta\,\hat{\sigma}_z \\ &= \sin\theta\cos\varphi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \sin\theta\sin\varphi \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \cos\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές του τελεστή $\hat{\sigma}_n$ είναι 1 και -1 .

Αν
$$X_{n+} = \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix}$$

το ιδιοδιάνυσμα του τελεστή $\hat{\sigma}_n$ για την ιδιοτιμή 1, τότε

$$\hat{\sigma}_n X_{n+} = X_{n+}$$

ή
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix}$$

ή
$$\begin{bmatrix} a\cos\theta + \beta\sin\theta e^{-i\varphi} \\ a\sin\theta e^{i\varphi} - \beta\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix}$$

ή
$$\begin{aligned} a\cos\theta + \beta sin\theta e^{-i\varphi} &= a \\ a\sin\theta e^{i\varphi} - \beta cos\theta &= \beta \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό είναι αόριστο (όπως κάθε σύστημα εξισώσεων που προκύπτει από ένα πρόβλημα ιδιοτιμών) και ισοδυναμεί με μία από τις δύο εξισώσεις του. Η πρώτη από αυτές γράφεται στη μορφή

$$(1-\cos\theta)a = \beta\sin\theta e^{-i\varphi} \quad \text{ή} \quad a\sin\frac{\theta}{2} = \beta\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \qquad (i)$$

Εύκολα μπορεί να δει κανείς οτι η (i) ικανοποιείται για

$$a = \cos\frac{\theta}{2} \quad \text{και} \quad \beta = \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}.$$

και ότι
$$|a|^2 + |\beta|^2 = 1$$

οπότε
$$X_{n+} = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

Ομοια, βρίσκουμε ότι το ιδιοδιάνυσμα X_{n-} του $\hat{\sigma}_n$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1, είναι

$$X_{n-} = \begin{bmatrix} \sin\dfrac{\theta}{2} \\ -\cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 12.12 *Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα των τελεστών $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ των x και y συνιστωσών του σπιν.*

Λύση

Η συνιστώσα x του σπιν είναι η προβολή του σπιν κατά μήκος του μοναδιαίου διανύσματος που σχηματίζει γωνίες $\theta = \frac{\pi}{2}$ και $\varphi = 0$ με τους άξονες z και x αντίστοιχα. Αρα, σύμφωνα με το Παράδειγμα 12.12, τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή $\hat{\sigma}_x$ για τις ιδιοτιμές 1 και -1, X_{x+} και X_{x-} είναι ($\theta = \frac{\pi}{2}$ και $\varphi = 0$)

$$X_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad X_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Η συνιστώσα y του σπιν είναι η προβολή του σπιν κατά μήκος του μοναδιαίου διανύσματος που σχηματίζει γωνίες $\theta = \frac{\pi}{2}$ και $\varphi = \frac{\pi}{2}$ με τους z και x άξονα αντίστοιχα, οπότε τα ιδιοδιανύσματα του $\hat{\sigma}_y$ προκύπτουν από το Παράδειγμα 12.12 για $\theta = \frac{\pi}{2}$ και $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$X_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \qquad X_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 12.13 *Να βρεθεί η μέση τιμή της ενέργειας ενός ηλεκτρονίου με διάνυσμα σπιν*

$$X = \begin{bmatrix} -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0\hat{e}_y$, οπότε ο αντίστοιχος της ενέργειας τελεστής είναι

$$\widehat{H} = cB_0\widehat{\sigma}_y = cB_0\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad c \text{ σταθερά.}$$

Λύση

Η μέση τιμή της ενέργειας του ηλεκτρονίου είναι ($< X, X >= 1$)

$$\begin{aligned} < E > &= (X^*)^T\widehat{H}X = \begin{bmatrix} i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} cB_0 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} cB_0 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = cB_0 \begin{bmatrix} i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \\ &= cB_0\left[i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-i\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}cB_0 \end{aligned}$$

Παρατήρηση 12.10 *Η πιθανότητα το σπιν ενός σωματιδίου με διάνυσμα σπιν X να βρεθεί παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{n}$ είναι*

$$P_{n+} = |< X_{n+}, X >|^2 , \tag{12.12}$$

όπου X_{n+} το ιδιοδιάνυσμα του τελεστή $\hat{\sigma}_n$ για την ιδιοτιμή 1 και η πιθανότητα το σπιν να βρεθεί παράλληλο στην κατεύθυνση του διανύσματος $-\vec{n}$ είναι

$$P_{n-} = |< X_{n-}, X >|^2 , \tag{12.13}$$

όπου X_{n-} το ιδιοδιάνυσμα του τελεστή $\hat{\sigma}_n$ για την ιδιοτιμή -1 (βλ. Παράδειγμα 12.11).
Η μέση τιμή της προβολής του σπιν στην κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{n}$ είναι

$$\langle \hat{\sigma}_n \rangle =< X, \hat{\sigma}_n X > . \tag{12.14}$$

Επειδή οι ιδιοτιμές του $\widehat{\sigma}_n$ είναι ± 1, από τον ορισμό της μέσης τιμής προκύπτει ότι

$$\langle \hat{\sigma}_n \rangle = 2P_{n+} - 1. \tag{12.15}$$

Παράδειγμα 12.14 *α) Να υπολογισθούν οι μέσες τιμές των τελεστών $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ και $\hat{\sigma}_z$ για ένα σωματίδιο με διάνυσμα σπιν*

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

β) Να βρεθούν οι πιθανότητες το σπιν του ηλεκτρονίου να βρεθεί παράλληλο:
i) με τον ημιάξονα $-x$, $\quad ii$) με τον ημιάξονα $+y$.

Λύση

α) Η μέση τιμή του $\hat{\sigma}_x$ γιά ένα σωματίδιο με διάνυσμα σπιν X είναι

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \langle X, \hat{\sigma}_x X \rangle \tag{i}$$

Επειδή

$$\hat{\sigma}_x X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

η (i) δίνει

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \langle X, \hat{\sigma}_x X \rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Όμοια

$$\langle \hat{\sigma}_y \rangle = \langle X, \hat{\sigma}_y X \rangle \tag{ii}$$

$$\hat{\sigma}_y X = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i\sqrt{3} \\ i \end{bmatrix}$$

οπότε η (ii) δίνει

$$\langle \hat{\sigma}_y \rangle = \langle X, \hat{\sigma}_y X \rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i\sqrt{3} \\ i \end{bmatrix} = 0$$

Τελος, η $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ είναι

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle = 2\left|\frac{1}{2}\right|^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

β) i) Η πιθανότητα το σπιν του ηλεκτρονίου να βρεθεί παράλληλο με τον ημιάξονα $-x$ είναι ίση με

$$P_i = |< X_{x-}, X >|^2, \tag{i}$$

όπου X_{-x} το ιδιοδιάνυσμα του τελεστή $\widehat{\sigma}_x$ για την ιδιοτιμή -1.
Στο Παράδειγμα 12.12 δείχνουμε ότι

$$X_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

οπότε το ερμητιανό γινόμενο της (i) είναι

$$< X_{x-}, X >= X_{x-}^* X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \left[1^2 + (-1)^2\right] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

Έτσι, η (i) γίνεται

$$P_i = \left| < \frac{1}{4} > \right|^2 = \frac{1}{16}.$$

ii) Η πιθανότητα το σπιν του ηλεκτρονίου να βρεθεί παράλληλο με τον ημιάξονα $+y$ είναι ίση με

$$P_i = |< X_{y+}, X >|^2, \qquad (i)$$

όπου X_{y+} το ιδιοδιάνυσμα του τελεστή $\widehat{\sigma}_y$ για την ιδιοτιμή 1.
Στο Παράδειγμα 12.12 δείχνουμε ότι

$$X_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

οπότε το ερμητιανό γινόμενο της (i) είναι

$$< X_{y+}, X >= X^*_{y+} X \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \quad i] \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - i\sqrt{3}),$$

Έτσι, η (i) γίνεται

$$P_i = \left| \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - i\sqrt{3}) \right|^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 \left[1^2 + (\sqrt{3})^2 \right] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα 12.15 *Να βρεθούν:*
α) Οι πίνακες των τελεστών των τετραγώνων των συνιστωσών του σπιν, $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\sigma}_y^2$ *και* $\hat{\sigma}_z^2$.
β) Οι ιδιοτιμές τους.
γ) Η μέση τιμή τους για ένα σωμάτιο με διάνυσμα σπιν $X = \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix}$.

Λύση
α) Ο πίνακας του τελεστή $\hat{\sigma}_x^2$ ισούται με το τετράγωνο του πίνακα του $\hat{\sigma}_x$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Όμοια προκύπτει

$$\hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β) Επειδή οι μόνες ιδιοτιμές των $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ είναι οι $1, -1$, καθένας από τους τελεστές $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\sigma}_y^2$, $\hat{\sigma}_z^2$ έχει μόνον μία ιδιοτιμή την

$$(\pm 1)^2 = 1.$$

γ) Επειδή η μόνη ιδιοτιμή των τελεστών $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\sigma}_y^2$, $\hat{\sigma}_z^2$ είναι 1, η μέση τιμή τους για οποιοδήποτε διάνυσμα σπιν είναι

$$\left\langle \hat{\sigma}_x^2 \right\rangle = \left\langle \hat{\sigma}_y^2 \right\rangle = \left\langle \hat{\sigma}_z^2 \right\rangle = 1$$

Παράδειγμα 12.16 *Να βρεθούν οι δυνατές τιμές της ενέργειας ενός ηλεκτρονίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο*

$$\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$$

όπου ο τελεστής της ενέργειας του είναι

$$\widehat{H} = cB_0 \widehat{\sigma}_z = cB_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad c \text{ σταθερά.}$$

Λύση
Σύμφωνα με τα κβαντικά αξιώματα οι δυνατές τιμές της ενέργειας του ηλεκτρονίου είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή της ενέργειας $\widehat{H}$.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή $\widehat{H}$ είναι

$$P_H(\lambda) = (cB_0 - \lambda)(-cB_0 - \lambda),$$

οπότε οι δυνατές τιμές της ενέργειας του ηλεκτρονίου είναι (ιδιοτιμές του $\widehat{H}$)

$$\lambda = cB_0 \ \text{ και } \ \lambda = -cB_0.$$

Παράδειγμα 12.17 *Να βρεθούν οι δυνατές τιμές της ενέργειας ενός ηλεκτρονίου που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο* $\vec{B} = B_0\vec{x}_0$, *οπότε ο τελεστής ενέργειάς του είναι*

$$\widehat{H} = cB_0\widehat{\sigma}_x = cB_0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c \text{ σταθερά}$$

και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Λύση

Οι δυνατές τιμές της ενέργειας του ηλεκτρονίου είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή ενέργειας, οι οποίες είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\begin{aligned} |H - \lambda I| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & cB_0 \\ cB_0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (cB_0)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = cB_0 \text{ ή } \lambda = -cB_0 \end{aligned}$$

Το αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda_1 = cB_0$ ιδιοδιάνυσμα

$$X = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad u_1^2 + u_2^2 = 1$$

προκύπτει από το σύστημα

$$\begin{aligned} \hat{H}X = \lambda_1 X \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & cB_0 \\ cB_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = cB_0\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} cB_0u_2 \\ cB_0u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cB_0u_1 \\ cB_0u_2 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad cB_0u_1 = cB_0u_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2 \end{aligned}$$

οποτε, λόγω και του ότι $u_1^2 + u_2^2 = 1$,

$$u_1 = u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Όμοια, προκύπτει ότι το αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda_2 = -cB_0$ ιδιοδιάνυσμα είναι το

$$X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 12.18 *α) Να δειχθεί ότι:*

$$\widehat{\sigma}_+X_+ = \vec{0}, \quad \widehat{\sigma}_+X_- = X_+, \quad \widehat{\sigma}_-X_+ = X_-, \quad \widehat{\sigma}_-X_- = \vec{0},$$

όπου $\widehat{\sigma}_+$ *και* $\widehat{\sigma}_-$ *οι τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης*

$$\widehat{\sigma}_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$X_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X_- = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή $\widehat{\sigma}_z$ *για τις ιδιοτιμές* -1 *και* 1 *αντίστοιχα.*
β) Να δειχθεί ότι για τους τελεστές του σπιν ισχύει:

i)

$$\widehat{\sigma}_x^2 + \widehat{\sigma}_y^2 + \widehat{\sigma}_z^2 = 3I,$$

όπου I *η ταυτοτική απεικόνιση* ($IX = X$, *για κάθε* X).

ii)

$$\widehat{\sigma}_i\widehat{\sigma}_j + \widehat{\sigma}_j\widehat{\sigma}_i = \mathbf{0}, \quad i \neq j,$$

όπου $\mathbf{0}$ *η μηδενική απεικόνιση* ($\mathbf{0}X = \vec{0}$, *για κάθε* X).

Λύση

α) Οι εικόνες των διανυσμάτων X_+ και X_- για τους τελεστές $\widehat{\sigma}_+$ και $\widehat{\sigma}_-$ είναι

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_+ X_+ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\
\widehat{\sigma}_+ X_- &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = X_+ \\
\widehat{\sigma}_- X_+ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = X_- \\
\widehat{\sigma}_- X_- &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

β) i) Οι πίνακες $\widehat{\sigma}_x^2, \widehat{\sigma}_y^2, \widehat{\sigma}_z^2$ είναι

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_x^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\widehat{\sigma}_y^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\widehat{\sigma}_z^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

οπότε ο πίνακας του τελεστή $\widehat{\sigma}_x^2 + \widehat{\sigma}_y^2 + \widehat{\sigma}_z^2$ είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 3I,$$

όπου I ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας. Επομένως

$$\widehat{\sigma}_x^2 + \widehat{\sigma}_y^2 + \widehat{\sigma}_z^2 = 3I,$$

όπου I η ταυτοτική απεικόνιση ($IX = X$, για κάθε X).
ii) Θα δείξουμε τη σχέση για $i = 1$ και $j = 2$.
Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $\widehat{\sigma}_x\widehat{\sigma}_y + \widehat{\sigma}_y\widehat{\sigma}_x$ είναι

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_x\widehat{\sigma}_y + \widehat{\sigma}_y\widehat{\sigma}_x &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

οπότε
$$\widehat{\sigma}_x\widehat{\sigma}_y + \widehat{\sigma}_y\widehat{\sigma}_x = \mathbf{0},$$
όπου $\mathbf{0}$ η μηδενική απεικόνιση.
Όμοια γίνεται η απόδειξη και για τις άλλες περιπτώσεις.

Παράδειγμα 12.19 *α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή*

$$\hat{A} = \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y$$

β) Το διάνυσμα σπιν ενός σωματιδίου είναι το ιδιοδιάνυσμα του τελεστή $\hat{A}$ που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του. Να υπολογιστεί η πιθανότητα το σπίν του σωματιδίου να βρεθεί παράλληλο με τον:
i) ημιάξονα $+z$, ii) ημιάξονα $+x$;

Λύση
Αντικαθιστώντας τους πίνακες των τελεστών $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$ βρίσκουμε τον πίνακα του τελεστή $\hat{A}$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{bmatrix}$$

Ονομάζοντας a τις ιδιοτιμές και

$$X_a = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad |x|^2 + |y|^2 = 1$$

τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή $\hat{A}$, ισχύει

$$AX_a = aX_a \tag{i}$$

ή
$$AX_a = \begin{bmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-i)y \\ (1+i)x \end{bmatrix}$$

οπότε η (i) γίνεται

$$\begin{bmatrix} (1-i)y \\ (1+i)x \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Απο τη σχέση αυτή προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} (1-i)y &= ax \\ (1+i)x &= ay \end{aligned}$$

το οποίο έχει μη-μηδενικές λύσεις αν

$$\begin{vmatrix} a & -(1-i) \\ -(1+i) & a \end{vmatrix} = 0$$

ή
$$a^2 - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad a_1 = \sqrt{2}, a_2 = -\sqrt{2}$$

Αντικαθιστώντας την ιδιοτιμή $a_1 = \sqrt{2}$ παρατηρούμε ότι το σύστημα ισοδυναμεί με την εξίσωση

$$x = \frac{(1-i)y}{\sqrt{2}}.$$

Από την σχέση αυτή και την συνθήκη $|x|^2 + |y|^2 = 1$ παίρνουμε

$$\left|\frac{(1-i)y}{\sqrt{2}}\right|^2 + y^2 = 1 \quad \text{ή} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

και
$$x = \frac{(1-i)}{2}$$

οπότε το αντίστοιχη της $a_1 = \sqrt{2}$ ιδιοδιάνυσμα είναι

$$X_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{(1-i)}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία βρίσκουμε ότι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή a_2 είναι

$$X_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{(1-i)}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

β) i) Η πιθανότητα P_+ να βρεθεί το σπιν του σωματιδίου παράλληλο με τον $+z-$άξονα είναι ίση με απο το τετράγωνο του μέτρου του "πάνω" στοιχείου του διανύσματος σπιν, οπότε

$$P_+ = \left|\frac{(1-i)}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

ii) Η πιθανότητα P_{x+} να βρεθεί το σπιν παράλληλο με τον άξονα $+x$ είναι

$$P_{x+} = |\langle X_{x+}, X\rangle|^2 \tag{v}$$

οπου
$$X_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

το ιδιοδιάνυσμα του $\hat{\sigma}_x$ για την ιδιοτιμή 1 και

$$X_{A+} = X \equiv X_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{(1-i)}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

το διάνυσμα σπιν του σωματιδίου.

$$\langle X_{x+}, X\rangle = X^*_{x+}X = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \qquad 1] \begin{bmatrix} \dfrac{(1-i)}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(1-i)}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(1+\sqrt{2}-i)}{2}\right)$$

Ετσι η (v) δίνει

$$P_{x+} = |\langle X_{x+}, X\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(1+\sqrt{2}-i)}{2}\right)\right|^2 = \frac{(2+\sqrt{2})}{4}$$

Παρατήρηση 12.11 *Σε πολλές περιπτώσεις οι υπολογισμοί γίνονται πολύ εύκολα αν εκφράσουμε τους τελεστές $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ συναρτήσει των τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης, με την βοήθεια των σχέσεων:*

$$\hat{\sigma}_x = \frac{\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-}{2}, \quad \hat{\sigma}_y = \frac{\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-}{2i},$$

οι οποίες προκύπτουν εύκολα από τις (12.11).

Παράδειγμα 12.20 *Θεωρούμε ηλεκτρόνιο του οποίου το σπιν του ηλεκτρονίου είναι παράλληλο με τον αρνητικό ημιάξονα $-z$, δηλαδή το διάνυσμα σπιν είναι το ιδιοδιάνυσμα X_- του τελεστή $\hat{\sigma}_z$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1. Να βρεθούν οι μέσες τιμές των προβολών του σπιν κατά μήκος των αξόνων x και y (μέσες τιμές των τελεστών $\widehat{\sigma}_x$ και $\widehat{\sigma}_y$) καθώς και των τετραγώνων των προβολών αυτών.*

Λύση

Επειδή το διάνυσμα σπιν του ηλεκτρονίου είναι το ιδιοδιάνυσμα X_- του τελεστή $\hat{\sigma}_z$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1, η μέση τιμή της συνιστώσας x του σπιν του είναι

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle = \langle X_-, \hat{\sigma}_x X_-\rangle. \qquad (i)$$

Εκφράζουμε τον τελεστή $\hat{\sigma}_x$ συναρτήσει των τελεστών $\hat{\sigma}_+$, $\hat{\sigma}_-$

$$\hat{\sigma}_x = \frac{\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-}{2}$$

οπότε η (i) γίνεται

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle = \left\langle X_-, \frac{\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-}{2} X_-\right\rangle = \frac{1}{2}\{\langle X_-, \hat{\sigma}_+ X_-\rangle + \langle X_-, \hat{\sigma}_- X_-\rangle\} \qquad (ii)$$

Επειδή $$\hat{\sigma}_+ X_- = X_+, \quad \hat{\sigma}_- X_- = 0$$

και λόγω της ορθογωνιότητας των X_+, X_- η (ii) γίνεται

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle = \langle X_-, X_+\rangle = \langle X_-, X_+\rangle = 0$$

Επειδή $$\hat{\sigma}_y = \frac{\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-}{2i}$$

η μέση τιμή της συνιστώσας y του σπιν του σωματιδίου είναι

$$\begin{aligned} \langle\hat{\sigma}_y\rangle &= \left\langle X_-, \frac{\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-}{2i} X_-\right\rangle = \frac{1}{2i}\{\langle X_-, \hat{\sigma}_+ X_-\rangle - \langle X_-, \hat{\sigma}_- X_-\rangle\} \\ &= \frac{1}{2i}\langle X_-, X_+\rangle = 0 \end{aligned}$$

Επειδή η μόνη ιδιοτιμή των τελεστών $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\sigma}_y^2$, $\hat{\sigma}_z^2$ είναι 1, η μέση τιμή τους σε οποιαδήποτε περίπτωση είναι

$$\left\langle\hat{\sigma}_x^2\right\rangle = \left\langle\hat{\sigma}_y^2\right\rangle = \left\langle\hat{\sigma}_z^2\right\rangle = 1.$$

Διανύματα σπιν μποζονίων του C^3

*Η κατάσταση του σπιν ενός **μποζονίου** περιγράφεται από ένα διάνυσμα (πίνακα στήλη 3×1) τριών μιγαδικών αριθμών και τα σχετικά με το σπιν φυσικά μεγέθη αντιστοιχούν σε τελεστές (γραμμικές απεικονίσεις) του τρισδιάστατου ερμητιανού χώρου C^3, που περιγράφονται από πίνακες 3×3.*

Οι τελεστές των συνιστωσών του spin ενός μποζονίου είναι

$$S_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, S_y = \frac{1}{\sqrt{2}i}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{12.16}$$

Οι τελεστές πολλών φυσικών μεγεθών για ένα μποζόνιο εκφράζονται συναρτήσει αυτών των τελεστών. Για παράδειγμα ο τελεστής της ενέργειας ενός μποζονίου που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0\hat{e}_z$ (παράλληλο στον άξονα z) είναι

$$\widehat{H} = cB_0\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad c \text{ σταθερά.}$$

Παράδειγμα 12.21 *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδοσυναρτήσεις των τελεστών S_x, S_y και S_z του spin ενός μποζονίου*

Λύση

Οι ιδιοτιμές του S_x προκύπτουν από την εξίσωση

$$|S_x - \lambda I| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{\lambda}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda\left(-\lambda^2 + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ ή } \pm 1$$

’ρα οι ιδιοτιμές του S_x είναι

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 0 \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 1$$

Για $\lambda_1 = -1$, οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $X_{-1,x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$ προκύπτουν από το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος είναι

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \quad \text{και} \quad x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2$$

οπότε

$$X_{-1,x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Για $\lambda_1 = 0$, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$x_2 = 0 \quad \text{και} \quad x_3 = -x_1$$

οπότε η κανονικοποιημένη ιδιοσυνάρτηση είναι

$$X_{0,x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Για $\lambda_1 = 1$, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} -x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \quad \text{και} \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2$$

οπότε η κανονικοποιημένη ιδιοσυνάρτηση είναι

$$X_{1,x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του S_y προκύπτουν από την εξίσωση

$$\begin{aligned} |S_y - \lambda I| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\lambda & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\lambda\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{\lambda}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\lambda\left(\lambda^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \pm 1 \end{aligned}$$

’ρα οι ιδιοτιμές του S_y είναι

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0 \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 1$$

Για $\lambda_1 = -1$, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}x_2 &= 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}x_1 + x_2 - \frac{i}{\sqrt{2}}x_3 &= 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$x_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}x_2 \quad \text{και} \quad x_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}}x_2$$

οπότε η κανονικοποιημένη ιδιοσυνάρτηση είναι

$$X_{-1,y} = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

Για $\lambda_1 = 0$, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} -\frac{i}{\sqrt{2}}x_2 &= 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}x_3 &= 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$x_2 = 0 \quad \text{και} \quad x_1 = x_3$$

οπότε η κανονικοποιημένη ιδιοσυνάρτηση είναι

$$X_{0,y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Για $\lambda_1 = 1$, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} -x_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}x_2 &= 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}x_1 - x_2 - \frac{i}{\sqrt{2}}x_3 &= 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$x_1 = 0, x_2 = 0 \quad \text{και} \quad x_3 = 0$$

οπότε η κανονικοποιημένη ιδιοσυνάρτηση είναι

$$X_{1,y} = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

Όμοια, οι ιδιοτιμές του S_z προκύπτουν από την εξίσωση

$$|S_y - \lambda I| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ ή } \pm 1$$

'ρα, οι ιδιοτιμές του S_x είναι

$$\lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = 0 \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 1$$

Για $\lambda_1 = -1$, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = 0$$

οπότε η ιδιοσυνάρτηση αυτή είναι

$$X_{-1,z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Όμοια για $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_1 = 1$ προκύπτουν οι ιδιοσυναρτήσεις

$$X_{0,z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X_{1,z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 12.22 *Να δειχθεί ότι για τους συντελεστές αναβίβασης και καταβίβασης του spin ενός μποζονίου*

$$S_+ = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{και} \quad S_- = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ισχύει:

$$S_+ X_{-1} = \sqrt{2}\, X_0, \quad S_+ X_0 = \sqrt{2}\, X_1 \;\; \textit{και} \;\; S_+ X_1 = 0$$
$$S_- X_{-1} = 0, \quad S_- X_0 = \sqrt{2}\, X_{-1} \;\; \textit{και} \;\; S_- X_1 = \sqrt{2}\, s X_0$$

όπου X_{-1}, X_0 και X_1 οι ιδιοσυναρτήσεις του S_z για τις ιδιοτιμές $-1, 0$ και 1 αντίστοιχα (βλ. Παράδειγμα 12.21).

Λύση

$$S_+X_{-1} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2}X_0$$

$$S_+X_0 = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2}X_1$$

$$S_+X_1 = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$S_-X_{-1} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$S_-X_0 = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2}X_{-1}$$

$$S_-X_1 = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2}X_0$$

12.8 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 12.1 *Να βρεθει η μέση τιμή των μετρήσεων της συνιστώσας z της στροφορμής $\hat{L}_z$ γιά ένα σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση*

$$y = 2Y_{-1} - Y_0 + (1-2i)Y_1 - (2+3i)Y_2,$$

όπου Y_m οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $\hat{L}_z$ για τις ιδιοτιμές $m\hbar$.

Λύση

Η μέση τιμή των μετρήσεων της συνιστώσας z της στροφορμής για το σωματίδιο αυτό είναι

$$< \hat{L}_z >= \frac{|2|^2(-\hbar) + |-1|^2 0 + |(1-2i)|^2\hbar + |-(2+3i)|^2 2\hbar}{|2|^2 + |-1|^2 + |(1-2i)|^2 + |-(2+3i)|^2} = \frac{27}{23}\hbar$$

Άσκηση 12.2 *Να βρεθει η μέση τιμή της ενέργειας γιά ένα σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση*

$$\psi = 2Y_{-1} - Y_0 + (1-2i)Y_1 - (2+3i)Y_2,$$

όπου Y_m οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $\hat{L}_z$ για τις ιδιοτιμές $m\hbar$, αν ο τελεστής Hamilton του σωματιδίου είναι

$$\hat{H} = c\hat{L}_z^2, \quad c \quad \textit{σταθερά}.$$

Λύση

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.8, οι Y_n είναι ιδιοσυναρτήσεις και του τελεστή $\hat{H}$ για τις ιδιοτιμές

$$\epsilon_n = cn^2\hbar^2$$

Επομένως η μέση τιμή της ενέργειας του σωματίδιου είναι

$$\begin{aligned} <E> &= \frac{|2|^2 c(-1)^2\hbar^2 + |-1|^2 c0\hbar^2 + |(1-2i)|^2 c\hbar^2 + |-(2+3i)|^2 c2^2\hbar^2}{|2|^2 + |-1|^2 + |(1-2i)|^2 + |-(2+3i)|^2} \\ &= \frac{61}{23} c\hbar^2 \end{aligned}$$

Άσκηση 12.3 *Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου είναι*

$$\psi(\varphi) = A\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad A \quad \textit{σταθερά}.$$

Να υπολογιστεί η σταθερά A ώστε η $\psi(\varphi)$ να είναι κανονικοποιημένη.

Λύση

Η σταθερά C προκύπτει από την συνθήκη κανονικοποίησης της $\psi(\varphi)$

$$\langle \psi(\varphi), \psi(\varphi) \rangle = 1 \qquad (i)$$

Για να υπολογίσουμε το ερμητιανό γινόμενο $\langle \psi(\varphi), \psi(\varphi) \rangle$ εκφράζουμε την $\psi(\varphi)$ ως γραμμικό συνδυασμό ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή $\widehat{L}_z$,

$$Y_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad m \in Z$$

Επειδή

$$\psi(\varphi) = A\cos\varphi = A\,\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad (ii)$$

η $\psi(\varphi)$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των Y_1 και Y_{-1}.

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi} \;\Leftrightarrow\; e^{i\varphi} = \sqrt{2\pi}\, Y_1 \\ Y_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} \;\Leftrightarrow\; e^{-i\varphi} = \sqrt{2\pi}\, Y_{-1}, \end{aligned}$$

οπότε η (ii) γίνεται

$$\psi(\varphi) = \frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\,(Y_1 + Y_{-1})$$

Επομένως,

$$\langle \psi(\varphi), \psi(\varphi) \rangle = \left|\frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\right|^2 = \pi A^2.$$

Άσκηση 12.4 *Να υπολογιστούν οι πιθανότητες μιά μέτρηση της συνιστώσας z της στροφορμής για ένα σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση*

$$\psi(\varphi) = A\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad A \quad \textit{σταθερά}.$$

να δώσει: i) 0, ii) $\hbar$, iii) $3\hbar$.

Λύση

Η $\psi(\varphi)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή $\widehat{L}_z$,

$$\psi(\varphi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}A\,(Y_1 + Y_{-1})$$

Στο ανάπτυγμα αυτό της κυματοσυνάρτησης του σωματιδίου σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων του $\widehat{L}_z$ δεν εμφανίζονται οι ιδιοσυναρτήσεις $Y_0(\varphi)$ και $Y_3(\varphi)$ οπότε οι πιθανότητες R_0 και R_3 των ιδιοτιμών 0 και $3\hbar$ είναι μηδέν, ενώ η πιθανότητα της ιδιοτιμής $\hbar$ είναι

$$P_1 = \frac{\left|\sqrt{\frac{\pi}{2}}A\right|^2}{\left|\sqrt{\frac{\pi}{2}}A\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{\pi}{2}}A\right|^2} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 12.5 *Να βρεθεί η μέση τιμή της συνιστώσας z της στροφορμής για ένα σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση*

$$\psi(\varphi) = A\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad A \quad \textit{σταθερά.}$$

Λύση

Ισχύει

$$< \hat{L}_z >= \frac{\langle \psi, \hat{L}_z \psi \rangle}{< \psi, \psi >}.$$

Το εσωτερικό γινόμενο του παρονομαστή είναι

$$\langle \psi, \psi \rangle = \int_0^{2\pi} A^2 \cos^2\varphi \, d\varphi = \pi A^2$$

ενώ το εσωτερικό γινόμενο του αριθμητή είναι

$$\begin{aligned}\langle \psi, \hat{L}_z \psi \rangle &= \int_0^{2\pi} A\cos\varphi \left(-i\hbar \frac{d}{d\varphi}\right) A\cos\varphi \, d\varphi = -i\hbar A^2 \int_0^{2\pi} A cos\varphi \,(-\sin\varphi)\, d\varphi \\ &= \frac{i\hbar A^2}{2} \int_0^{2\pi} sin 2\varphi d\varphi = 0\end{aligned}$$

Επομένως
$$\langle \hat{L}_z \rangle = 0.$$

Β΄ λύση

Η μέση τιμή $\langle \hat{L}_z \rangle$ βρίσκεται εύκολα αν εκφράσουμε την $\psi(\varphi)$ ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή $\widehat{L}_z$. Η $\psi(\varphi)$ γράφεται στη μορφή

$$\psi(\varphi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A\,(Y_1 + Y_{-1}),$$

οπότε οι μόνες τιμές που προκύπτουν από μία μέτρηση της συνιστώσας z της στροφορμής για το σωμάτιο αυτό είναι $\hbar$ και $-\hbar$. Επομένως αν ονομάσουμε P_1 και P_{-1} τις πιθανότητες των ιδιοτιμών $\hbar$ και $-\hbar$

$$P_1 + P_{-1} = 1$$

και
$$\langle \hat{L}_z \rangle = P_1 \hbar + P_{-1}\,(-\hbar).$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 12.3,

$$P_1 = \frac{\left|\sqrt{\frac{\pi}{2}} A\right|^2}{\left|\sqrt{\frac{\pi}{2}} A\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{\pi}{2}} A\right|^2} = \frac{1}{2}$$

Επίσης,
$$P_1 + P_{-1} = 1 \;\Leftrightarrow\; P_{-1} = 1 - P_1 = \frac{1}{2}$$

Επομένως,
$$\langle \hat{L}_z \rangle = P_1 \hbar + P_2\,(-\hbar) = \frac{1}{2}\hbar - \frac{1}{2}\hbar = 0$$

Άσκηση 12.6 *Η κυματοσυνάρτηση ενός σωμάτιου είναι*

$$\psi(\varphi) = 2\cos\varphi + \cos 2\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad A \quad \textit{σταθερά.}$$

Για το σωματίδιο αυτό να βρεθούν:
α) η πιθανότητα μια μέτρηση της συνιστώσας z της στροφορμής L_z να δώσει: $i)\,\hbar$, $\quad ii)\,2\hbar$, $\quad iii)\,3\hbar$ και $iv)\,0$.
β) η μέση τιμή των μετρήσεων: $i)$ της L_z, $ii)$ του τετραγώνου της στροφορμής L_z^2.

Λύση

Εκφράζουμε την κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου $\psi(\varphi)$ ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή $\widehat{L}_z$,

$$Y_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad m \in Z.$$

Λόγω της μορφής του, ο πρώτος όρος της ψ γράφεται

$$2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \qquad (i)$$

οπότε μπορεί να εκφραστεί ως γραμικός συνδυασμός των $Y_1(\varphi)$ και $Y_{-1}(\varphi)$.

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\varphi} \Leftrightarrow e^{i\varphi} = \sigma 2\pi Y_1$$
$$Y_{-1} = \frac{1}{\sigma 2\pi}e^{-i\varphi} \Leftrightarrow e^{-i\varphi} = \sigma 2\pi Y_{-1}$$

Ετσι η (i) δίνει

$$2\cos\varphi = \left(\sqrt{2\pi}Y_1 + \sqrt{2\pi}Y_{-1}\right) \qquad (ii)$$

Επειδή

$$\cos 2\varphi = \frac{e^{i2\varphi} + e^{-2i\varphi}}{2} \qquad (iii)$$

ο δεύτερος όρος μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των $Y_2(\varphi)$ και $Y_{-2}(\varphi)$.

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2i\varphi} \Leftrightarrow e^{2i\varphi} = \sqrt{2\pi}Y_2$$
$$Y_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2i\varphi} \Leftrightarrow e^{-2i\varphi} = \sqrt{2\pi}Y_{-2}$$

οπότε η (iii) γίνεται

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\pi}Y_2 + \sqrt{2\pi}Y_{-2}\right) \qquad (iv)$$

Λόγω των (ii) και (iv) η ψ γράφεται ως

$$\psi = \sqrt{2\pi}\, Y_1 + \sqrt{2\pi}\, Y_{-1} + \sqrt{\frac{\varphi}{2}}\, Y_2 + \sqrt{\frac{\varphi}{2}}\, Y_{-2} \qquad 0$$

Στο ανάπτυγμα (v) της ψ δεν εμφανίζονται οι ιδιοσυναρτήσεις $Y_0(\varphi)$ και $Y_3(\varphi)$ οπότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 12.3, οι πιθανότητες των ιδιοτιμών 0 και $3\hbar$ είναι μηδέν.
Σύμφωνα με την Παρατήρηση 12.3, η πιθανότητα της ιδιοτιμής $\hbar$ είναι

$$P_1 = \frac{\left|\sqrt{2\pi}\right|^2}{\left|\sqrt{2\pi}\right|^2 + \left|\sqrt{2\pi}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{\varphi}{2}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{\varphi}{2}}\right|^2} = \frac{2}{5},$$

ενώ η πιθανότητα της ιδιοτιμή $2\hbar$ είναι

$$P_2 = \frac{\left|\sqrt{\frac{\varphi}{2}}\right|^2}{\left|\sqrt{2\pi}\right|^2 + \left|\sqrt{2\pi}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{\varphi}{2}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{\varphi}{2}}\right|^2} = \frac{1}{10}$$

β) Η μέση τιμή $\langle \hat{L}_z \rangle$ μπορεί να υπολογιστεί πιο εύκολα από την σχέση

$$\langle \hat{L}_z \rangle = \sum_m (P_m m\hbar)$$

όπου P_m οι πιθανότητες των ιδιοτιμών $m\hbar$ του L_z. Λόγω της (v), οι μόνες ιδιοτιμές με μη μηδενικές πιθανότητες γιά το σωμάτιο αυτό είναι $\hbar$, $-\hbar$, $2\hbar$ και $-2\hbar$, οπότε

$$\langle \hat{L}_z \rangle = P_1\hbar + P_{-1}(-\hbar) + P_2 2\hbar + P_{-2}(-2\hbar) \qquad (vi)$$

Οι πιθανότητες P_1 και P_2 των ιδιοτιμών $\hbar$ και $2\hbar$ βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα ενώ με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε και τις πιθανότητες των ιδιοτιμών $-\hbar$ και $-2\hbar$

$$P_{-1} = \frac{2}{5} \quad \text{και} \quad P_{-2} = \frac{1}{10}$$

Ετσι η (vi) γίνεται

$$\langle \hat{L}_z \rangle = \frac{2}{5}\hbar + \frac{2}{5}(-\hbar) + \frac{1}{10}2\hbar + \frac{1}{10}(-2\hbar) = 0$$

$ii)$ Σύμφωνα με την Πρόταση 9.8, οι Y_m είναι ιδιοσυναρτήσεις και του τελεστή του τετραγώνου της συνιστώσας z της στροφορμής, L_z^2, για τις ιδιοτιμές $m^2\hbar^2$ οπότε η (v) αποτελεί το ανάπτυγμα της κυματοσυνάρτησης του σωματιδίου σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων του L_z^2. Στην (v) όμως εμφανίζονται μόνον οι

Y_1 και Y_{-1} που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\hbar^2$ του L_z^2 και οι Y_2 και Y_{-2} που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $(2\hbar)^2 = 4\hbar^2$. Επομένως οι μόνες τιμές που προκύπτουν από μιά μέτρηση του τετραγώνου της συνιστώσας z της στροφορμής γιά το σωματίδιο αυτό είναι $\hbar^2$ και $4\hbar^2$, οπότε

$$\langle \hat{L}_z^2 \rangle = P_a \hbar^2 + P_\beta 4\hbar^2$$

όπου P_a και P_β οι πιθανότητες των ιδιοτιμών $\hbar^2$ και $4\hbar^2$.
Λόγω της (v),

$$P_a = \frac{\left|\sqrt{2\pi}\right|^2 + \left|\sqrt{2\pi}\right|^2}{\left|\sqrt{2\pi}\right|^2 + \left|\sqrt{2\pi}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{\varphi}{2}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{\varphi}{2}}\right|^2} = \frac{4}{5}$$

$$P_\beta = \frac{\left|\sqrt{\frac{\varphi}{2}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{\varphi}{2}}\right|^2}{\left|\sqrt{2\pi}\right|^2 + \left|\sqrt{2\pi}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{\varphi}{2}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{\varphi}{2}}\right|^2} = \frac{1}{5}$$

οπότε

$$\langle L_z^2 \rangle = P_a \hbar^2 + P_\beta 4\hbar^2 = \frac{4}{5}\hbar^2 + \frac{1}{5}4\hbar^2 = \frac{8}{5}\hbar^2.$$

Άσκηση 12.7 *Η κυματοσυνάρτησή ενός σωματιδίου είναι*

$$\psi(\varphi) = A cos^2\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad A \quad \textit{σταθερά}$$

Για το σωματίδιο αυτό να βρεθούν:
α) Η πιθανότητα μια μέτρηση της συνιστώσας z της στροφορμής να δώσει:
$i)$ $\hbar$, $ii)$ $2\hbar$, $iii)$ $3\hbar$ και $iv)$ 0.
β) Η μέση τιμή των μετρήσεων της συνιστώσας z της στροφορμής.

Λύση
Η κυματοσυνάρτησή του σωμάτιου αυτού γράφεται ως

$$\psi(\varphi) = A cos^2\varphi = A\,\frac{1 + cos2\varphi}{2} = \frac{A}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(e^{i2\varphi} + e^{-i2\varphi}\right)\right), \tag{i}$$

οπότε μπορεί να εκφραστεί ως γραμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων $Y_0(\varphi)$, $Y_2(\varphi)$ και $Y_{-2}(\varphi)$ του τελεστή $\hat{L}_z$.

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2i\varphi} \;\Leftrightarrow\; e^{2i\varphi} = \sqrt{2\pi}\, Y_2$$

$$Y_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2i\varphi} \;\Leftrightarrow\; e^{-2i\varphi} = \sqrt{2\pi}\, Y_{-2}$$

$$Y_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \;\Leftrightarrow\; 1 = \sqrt{2\pi}\, Y_0$$

Ετσι η (i) γίνεται

$$\psi(\varphi) = \frac{A}{2}\left\{\sqrt{2\pi}Y_0 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\pi}Y_2 + \sqrt{2\pi}Y_{-2}\right)\right\} = \frac{A}{2}\sqrt{2\pi}\left(Y_0 + \frac{1}{2}\,Y_2 + \frac{1}{2}\,Y_{-2}\right)$$

Στο ανάπτυγμα αυτό της $\psi(\varphi)$ δεν εμφανίζονται οι $Y_1(\varphi)$ και $Y_3(\varphi)$ οπότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 12.3, οι πιθανότητες των ιδιοτιμών $\hbar$ και $3\hbar$ είναι μηδέν, ενώ οι πιθανότητες των ιδιοτιμών 0, $2\hbar$ είναι

$$P_0 = \frac{\left|\frac{A}{2}\sqrt{2\pi}\right|^2 |1|^2}{\left|\frac{A}{2}\sqrt{2\pi}\right|^2 \left(|1|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2\right)} = \frac{2}{3}$$

$$P_2 = \frac{\left|\frac{1}{2}\right|^2}{\left|\frac{A}{2}\sqrt{2\pi}\right|^2 \left|\frac{1}{2}\right|^2 \left(|1|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2\right)} = \frac{1}{6}$$

β) Οι μόνες δυνατές τιμές της συνιστώσας z της στροφορμής γιά το σωμάτιο αυτό είναι 0, $2\hbar$ και $-2\hbar$ οπότε

$$P_0 + P_{-2} + R_2 = 1$$

και

$$\langle L_z \rangle = P_0 0 + P_2 2\hbar + P_{-2}\left(-2\hbar\right) \qquad (ii)$$

Τις πιθανότητες P_0 και P_2 τις έχουμε ήδη βρει, οπότε

$$P_{-2} = 1 - P_0 - R_2 = \frac{1}{6}$$

Επομένως,

$$\langle L_z \rangle = \frac{1}{6} 2\hbar + \frac{1}{6}\left(-2\hbar\right) = 0$$

Άσκηση 12.8 *Το διάνυσμα σπιν ενός ηλεκτρονίου είναι*

$$X = A\begin{bmatrix} (1-i)e^{-ia} \\ (1+i)e^{ia} \end{bmatrix}, \quad A,\ a \text{ πραγματικές σταθερές.}$$

(α) Να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή της σταθεράς A.
(β) Να βρεθούν οι μέσες τιμές των τελεστών $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$, $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\sigma}_y^2$, $\hat{\sigma}_z^2$ για το ηλεκτρόνιο αυτό συναρτήσει της σταθεράς a.

Λύση

(α) Το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων των δύο στοιχείων οποιουσδήποτε διανύσματος σπιν είναι μονάδα, οπότε

$$\left|A[(1-i)e^{-ia} + (1+i)e^{ia}]\right|^2 + \left|A[(1+i)e^{-ia} + (1-i)e^{ia}]\right|^2 = 1$$

ή

$$A^2\left[\left|(1-i)e^{-ia} + (1+i)e^{ia}\right|^2 + \left|(1+i)e^{-ia} + (1-i)e^{ia}\right|^2\right] = 1 \qquad (i)$$

Υπολογίζουμε το τετράγωνο του μέτρου του κάθε όρου

$$\begin{aligned}
\left|(1-i)e^{-ia} + (1+i)e^{ia}\right|^2 &= \left[(1-i)e^{-ia} + (1+i)e^{ia}\right]\left[(1-i)e^{-ia} + (1+i)e^{ia}\right]^* \\
&= \left[(1-i)e^{-ia} + (1+i)e^{ia}\right]\left[(1+i)e^{ia} + (1-i)e^{-ia}\right] \\
&= (1-i)(1+i) + (1-i)^2 e^{-2ia} + (1+i)^2 e^{2ia} + (1+i)(1-i) \\
&= 2 - 2ie^{-2ia} + 2ie^{2ia} + 2 \\
&= 4 + 2i(e^{2ia} - e^{-2ia}) \\
&= 4 + 2i2i\sin 2a = 4 - 4\sin 2a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|(1+i)e^{-ia} + (1-i)e^{ia}\right|^2 &= \left[(1+i)e^{-ia} + (1-i)e^{ia}\right]\left[(1-i)e^{ia} + (1+i)e^{-ia}\right] \\
&= (1+i)(1-i) + (1+i)^2 e^{-2ia} + (1-i)^2 e^{2ia} + (1-i)(1+i) \\
&= 4 + 2ie^{-2ia} - 2ie^{2ia} + 2 = 4 - 2i(e^{2ia} - e^{-2ia}) = 4 + 4\sin 2a
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα αυτά στην (i) παίρνουμε

$$A^2(4+4) = 1 \quad \text{ή} \quad A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(β)

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \langle X, \hat{\sigma}_x X \rangle = X^+ \hat{\sigma}_x X \qquad (ii)$$

Επειδή

$$\hat{\sigma}_x X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1-i)e^{-ia} + (1+i)e^{ia} \\ (1+i)e^{-ia} + (1-i)e^{ia} \end{bmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1+i)e^{-ia} + (1-i)e^{ia} \\ (1-i)e^{-ia} + (1+i)e^{ia} \end{bmatrix}$$

η (ii) γίνεται

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\sigma}_x \rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \big((1+i)e^{ia} + (1-i)e^{-ia} \quad (1-i)e^{ia} \\
&+ (1+i)e^{-ia} \big) \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1-i)e^{-ia} + (1+i)e^{ia} \\ (1+i)e^{-ia} + (1-i)e^{ia} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{8} \big\{ \big[(1+i)e^{ia} + (1-i)e^{-ia} \big] \big[(1+i)e^{-ia} + (1-i)e^{ia} \big] \\
&+ \big[(1-i)e^{ia} + (1+i)e^{-ia} \big] \big[(1-i)e^{-ia} + (1+i)e^{ia} \big] \big\} \\
&= \frac{1}{8} \big\{ (1+i)^2 + (1+i)(1-i)e^{2ia} + (1-i)(1+i)e^{-2ia} + (1-i)^2 \\
&+ (1-i)^2 + +(1-i)(1+i)e^{2ia} + (1+i)(1-i)e^{-2ia} + (1+i)^2 \big] \\
&= \frac{1}{8} \big\{ 4i - 4i + 4e^{2ia} + 4e^{-2ia} \big\} = \frac{1}{2} \big(e^{2ia} + e^{-2ia} \big) \\
&= \frac{1}{2} 2\cos 2a = \cos 2a
\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε την μέση τιμή της συνιστώσας y του σπιν

$$\langle \hat{\sigma}_y \rangle = \langle X, \hat{\sigma}_y X \rangle = X^{+} \hat{\sigma}_y X \qquad (iii)$$

Επειδή

$$\hat{\sigma}_y X = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1-i)e^{-ia} + (1+i)e^{ia} \\ (1+i)e^{-ia} + (1-i)e^{ia} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1-i)e^{-ia} + (-1-i)e^{ia} \\ (1+i)e^{-ia} + (-1+i)e^{ia} \end{bmatrix}$$

η (iii) γίνεται

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\sigma}_y \rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \big[(1+i)e^{ia} + (1-i)e^{-ia} \quad (1-i)e^{ia} \\
&+ (1+i)e^{-ia} \big] \frac{1}{2\sqrt{2}} \big[\ (1-i)e^{-ia} - (1+i)e^{ia} (1+i)e^{-ia} + (-1+i)e^{ia} \ \big] \\
&= \frac{1}{8} \{ [(1+i)e^{ia} + (1-i)e^{-ia}][(1-i)e^{-ia} - (1+i)e^{ia}] \\
&+ \big[(1-i)e^{ia} + (1+i)e^{-ia} \big] \big[(1-i)e^{ia} + (1+i)e^{-ia} \big] \\
&\quad \big[(1+i)e^{-ia} - (-1+i)e^{ia} \big] \big\} \\
&= \frac{1}{8} \big\{ (1+i)(1-i) - (1+i)^2 e^{2ia} + (1-i)^2 e^{-2ia} - (1+i)(1-i) \\
&+ (1-i)(1+i) + (1-i)(-1+i)e^{2ia} + (1+i)^2 e^{-2ia} + (1+i)(-1+i) \big\} \\
&= \frac{1}{8} \big(2 - 2ie^{2ia} - 2ie^{-2ia} - 2 + 2 + 2ie^{2ia} + 2ie^{-2ia} - 2 \big) = 0
\end{aligned}$$

Ισχύει

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle = \left| A(1-i)e^{-ia} \right|^2 - 1 = 2 \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} (1-i)e^{-ia} \right|^2 - 1 = 2 \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} 2 \right|^2 - 1 = 0.$$

Επειδή η μόνη ιδιοτιμή των τελεστών $\langle \hat{\sigma}_x^2 \rangle$, $\langle \hat{\sigma}_y^2 \rangle$, $\langle \hat{\sigma}_z^2 \rangle$ είναι 1 (βλ. Παράδειγμα 12.15), η μέση τιμή τους σε οποιαδήποτε περίπτωση είναι

$$\langle \hat{\sigma}_x^2 \rangle = \langle \hat{\sigma}_y^2 \rangle = \langle \hat{\sigma}_z^2 \rangle = 1.$$

Άσκηση 12.9 *Το σπιν ενός ηλεκτρονίου είναι παράλληλο με τον ημιάξονα $+y$. Ποιά η πιθανότητα το σπιν να βρεθεί παράλληλο:*
α) προς το θετικό ημιάξονα $+x$,
β) προς τον αρνητικό ημιάξονα $+z$;

Λύση

Επειδή το σπιν είναι παράλληλο με τον ημιάξονα $+y$, το διάνυσμα σπιν του ηλεκτρονίου, X, είναι ιδιοδιάνυσμα του $\hat{\sigma}_y$ γιά την ιδιοτιμή 1

$$X \equiv X_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

α) Έτσι, η πιθανότητα P_{x+} να βρεθεί το σπιν παράλληλο στον ημιάξονα $+x$ είναι

$$P_{x+} = |\langle X, X_{x+}\rangle|^2, \qquad (i)$$

όπου
$$X_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

το ιδιοδιάνυσμα του $\hat{\sigma}_x$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.

$$\langle X, X_{x+}\rangle = X^{+}X_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1+i)$$

οπότε η (i) δίνει

$$P_{x+} = |\langle X, X_{x+}\rangle|^2 = |1+i|^2 = \frac{1}{2}|(1+i)|^2 = 1$$

β) Η πιθανότητα P_{z-} να βρεθεί το σπιν ενός σωματιδίου παράλληλο στον αρνητικό ημιάξονα $-z$ είναι ίση με το τετράγωνο του μέτρου του "κάτω στοιχείου" του διανύσματος σπιν του, οπότε στην περίπτωση αυτή

$$P_{z-} = \left| i\frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 12.10 *Το σπιν ενός σωματιδίου βρίσκεται στο επίπεδο xy παράλληλο στη διχοτόμο της γωνίας xOy στη κατεύθυνση των θετικών x, y. Ποιά η πιθανότητα σε μιά μέτρηση το σπιν να βρεθεί παράλληλο:*
α) προς το θετικό ημιαξονα $+x$
β) προς τον αρνητικό ημιάξονα $-y$;

Λύση

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n}$ στην διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας $x\hat{O}y$ προς τα θετικά x, y σχηματίζει γωνίες $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ με τους άξονες x και z αντίστοιχα, οπότε

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}.$$

Επειδή το σπιν του σωματιδίου είναι παράλληλο με το $\vec{n}$, το διάνυσμα σπιν του, X, είναι ιδιοδιάνυσμα του τελεστή $\hat{\sigma}_n$ γιά την ιδιοτιμή 1, οπότε, σύμφωνα με το Παράδειγμα 12.11 για $\varphi = \frac{\pi}{4}$ και $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$X = X_{n+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$$

Η πιθανότητα P_{x+} να βρεθεί το σπιν παράλληλο στον άξονα $+x$ είναι

$$P_{x+} = |\langle X, X_{x+}\rangle|^2 \qquad (i)$$

όπου
$$X_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

το ιδιοδιάνυσμα του $\hat{\sigma}_x$ για την ιδιοτιμή 1.

$$\langle X, X_{x+}\rangle = X^{*}X_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$

οπότε η (i) δίνει

$$\begin{aligned}R_{x+} &= \left|1-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right|^2 = \frac{1}{2}\left|(1-e^{-i\frac{\pi}{4}})\right|^2\\ &= \frac{1}{2}\left(1-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(1-e^{-i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{\pi}{4}}+1\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2-2\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

β) Η πιθανότητα να βρούμε το σπιν παράλληλο στον y–άξονα, είναι

$$R_{y-} = |\langle X, X_{y-}\rangle|^2 \qquad (ii)$$

όπου
$$X_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$$

το ιδιοδιάνυσμα του $\hat{\sigma}_y$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1.

$$\langle X, X_{y-}\rangle = X^* X_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & e^{i\frac{\pi}{4}}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(1-ie^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$

οπότε από την (ii) προκύπτει

$$\begin{aligned}R_{y-} &= \left|\frac{1}{2}\left(1-ie^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\left(1-ie^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right|^2\\ &= \frac{1}{4}\left(1-ie^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(1+e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4}\left(1+e^{i\frac{\pi}{4}}-ie^{-i\frac{\pi}{4}}+1\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(2+i2i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(2-2\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

Άσκηση 12.11 *Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου είναι*

$$\psi = 2\sin\varphi + \cos 2\varphi - 2isin3\varphi$$

και ο τελεστής της ενέργειας (τελεστής Hamilton) του σωματιδίου είναι

$$\hat{H} = cL_z^2.$$

Να βρεθούν οι δυνατές τιμές της ενέργειας του σωματιδίου και οι αντίστοιχες πιθανότητες.

Λύση

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.8 και επειδή $\hat{H} = c\hat{L}_z^2$, οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $\hat{L}_z$,

$$Y_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}, \quad m \in Z$$

είναι ιδιοσυναρτήσεις και του τελεστή $\hat{H}$ για τις ιδιοτιμές

$$E_m = c(m\hbar)^2 = cm^2\hbar^2, \quad m \in N$$

Για να βρούμε τις πιθανότητες των ιδιοτιμών αυτών γράφουμε την ψ ως γραμμικό συνδυασμό των Y_m εκφράζοντας κάθε όρο της συναρτήσει των Y_m.

Λόγω της μορφής του, ο πρώτος όρος της ψ , $\sin\varphi$, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\varphi}, \quad Y_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\varphi}$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη παίρνουμε

$$Y_1 - Y_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}2i\sin\varphi$$

ή
$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i}\left(Y_1 - Y_{-1}\right) \qquad (i)$$

Όμοια,
$$\cos 2\varphi = A\frac{e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}}{2} = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2}\,(Y_2+Y_{-2}) \qquad (ii)$$
και
$$\sin 3\varphi = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i}\,(Y_3-Y_{-3}). \qquad (iii)$$
Λόγω των $(i)-(iii)$, η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου γίνεται

$$\begin{aligned}\psi(\varphi) &= 2\frac{\sqrt{2\pi}}{2i}\,(Y_1-Y_{-1}) + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\,(Y_2+Y_{-2}) - 2i\frac{\sqrt{2\pi}}{2i}\,(Y_3-Y_{-3})\\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{i}Y_1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{i}Y_{-1} + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}Y_2 + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}Y_{-2} - \sqrt{2\pi}Y_3 + \sqrt{2\pi}Y_{-3}\end{aligned}$$

Επειδή στο ανάπτυγμα αυτό της $\psi(\varphi)$ εμφανίζονται μόνον οι ιδιοσυναρτήσεις
$$Y_m(\varphi),\quad m=\pm1,\pm2,\pm3,$$
οι δυνατές τιμές της ενέργειας του σωματιδίου είναι
$$E_1 = c(\pm\hbar)^2 = c\hbar^2,\quad E_2 = c(\pm2\hbar)^2 = 4c\hbar^2 \quad \text{και} \quad E_3 = c(\pm3\hbar)^2 = 9c\hbar^2.$$
Στην ιδιοτιμή E_1 αντιστοιχούν οι γραμμικά ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις Y_1 και Y_{-1}, οπότε η πιθανότητα της είναι (βλ. Παρατήρηση 12.3)
$$P_1 = \frac{\left|\frac{\sqrt{2\pi}}{i}\right|^2 + \left|-\frac{\sqrt{2\pi}}{i}\right|^2}{\left|\frac{\sqrt{2\pi}}{i}\right|^2 + \left|-\frac{\sqrt{2\pi}}{i}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right|^2 + \left|-\sqrt{2\pi}\right|^2 + \left|\sqrt{2\pi}\right|^2} = \frac{4}{9}$$
Στην ιδιοτιμή E_2 αντιστοιχούν οι γραμμικά ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις Y_2 και Y_{-2}, οπότε η πιθανότητα της είναι
$$P_2 = \frac{\left|\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right|^2 + \left|-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right|^2}{\left|\frac{\sqrt{2\pi}}{i}\right|^2 + \left|-\frac{\sqrt{2\pi}}{i}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right|^2 + \left|-\sqrt{2\pi}\right|^2 + \left|\sqrt{2\pi}\right|^2} = \frac{1}{9}$$
Επειδή οι μόνες ιδιοτιμές με μη μηδενικές πιθανότητες είναι οι E_1, E_2 και E_3,
$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$
ή
$$P_3 = 1 - P_1 - P_2 = 1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

Άσκηση 12.12 *Να βρεθούν οι δυνατές τιμές της ενέργειας ενός ηλεκτρονίου που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0\hat{e}_2$, οπότε ο τελεστής ενέργειας του είναι*
$$\widehat{H} = cB_0\sigma_2 = cB_0\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0\end{bmatrix},\quad c \text{ σταθερά}$$
και οι αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις (ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του $\widehat{H}$).

Λύση

Οι δυνατές τιμές της ενέργειας του ηλεκτρονίου είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή ενέργειας, οι οποίες είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης
$$\begin{aligned}|H-\lambda I| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -icB_0 \\ icB_0 & -\lambda\end{vmatrix} = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - (cB_0)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = cB_0 \text{ ή } \lambda_2 = -cB_0\end{aligned}$$
Για $\lambda_1 = cB_0$, το σύστημα

$$|(H-\lambda_1 I)\begin{bmatrix} z-1 & z_2 \end{bmatrix} = 0$$

δίνει

$$-cB_0 z_1 - icB_0 z_2 = 0 \quad \text{και} \quad icB_0 z_1 - cB_0 z_2 = 0.$$

Οι εξισώσεις αυτές ισοδυναμούν με την

$$z_2 = iz_1,$$

οπότε ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι

$$V(cB_0) = \{(z_1, iz_1\} = \{z_1(1,i),\ z_1 \in C\} = span(1,i).$$

Όμοια προκύπτει ότι ο αντίστοιχος της ιδιοτιμής $\lambda_2 = -cB_0$ ιδιοχώρος είναι

$$V(-cB_0) = \{(z_1, -iz_1\} = \{z_1(1,-i),\ z_1 \in C\} = span(1,-i).$$

12.9 Ασκήσεις

12.1 *Οι τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης $\hat{\sigma}_+$ και $\hat{\sigma}_-$ ορίζονται ως*

$$\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y \quad \text{και} \quad \hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y,$$

όπου $\hat{\sigma}_x$ και $\hat{\sigma}_y$ οι τελεστές Pauli των συνιστωσών του σπιν κατα τους άξονες x και y.
Αν οι πίνακες των $\hat{\sigma}_+$ και $\hat{\sigma}_-$ είναι

$$\widehat{\sigma}_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και}\ \widehat{\sigma}_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

α) Να δειχθεί ότι

$$\hat{\sigma}_x = \frac{\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-}{2}, \quad \hat{\sigma}_y = \frac{\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-}{2i}$$

β) Να βρεθούν οι πίνακες των τελεστών $\hat{\sigma}_x$ και $\hat{\sigma}_y$ και οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα τους.

12.2 *α) Οι πίνακες των συνιστωσών του σπιν για ένα σωματίδιο με σπιν $\frac{3}{2}$ είναι*

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad S_y = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad S_z = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

β) Να δειχθεί ότι για τους τελεστές αναβίβασης και μεταβίβασης

$$S_+ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad S_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

ισχύει

$$\begin{aligned} S_+ X_{\lambda_1} &= cX_{\lambda_2} \\ S_- X_{\lambda_3} &= cX_{\lambda_4} \end{aligned}$$

όπου

$$\lambda_2 = \lambda_1 + 1 \quad \text{και} \quad \lambda_4 = \lambda_3 - 1$$

και c σταθερά η οποία να βρεθεί.