Κεφάλαιο 1

Εκθετική συνάρτηση πίνακα και εφαρμογές της

Άσκηση 13.1 Να βρεθεί ο πίνακας e^A για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 + \frac{10\pi}{3}i & 2 + \frac{4\pi}{3}i \\ 1 + \frac{2\pi}{3}i & 3 + \frac{8\pi}{3}i \end{bmatrix}$$

α) Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$\det(A - \lambda I) = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{vmatrix} 4 + \frac{10\pi}{3}i - \lambda & 2 + \frac{4\pi}{3}i \\ 1 + \frac{2\pi}{3}i & 2 + \frac{8\pi}{3}i - \lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda_1 = 2 + 2\pi i \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 5 + 4\pi i$$

Με τον τρόπο της Ενότητας 9.1 προκύπτει ότι οι ιδιοχώροι των ιδιοτιμών αυτών είναι

$$\begin{aligned} V(2 + 4\pi i) &= \{(k, -k) : k \in R\} = \langle (1, -1) \rangle \\ V(5 + 5\pi i) &= \{(2k, k) : k \in R\} = \langle (2, 1) \rangle \end{aligned}$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 9.5, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος με πίνακα που τον διαγωνιοποιεί τον

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και ο όμοιος διαγώνιος πίνακάς του είναι ο

$$\Delta = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 + \frac{10\pi}{3}i & 2 + \frac{4\pi}{3}i \\ 1 + \frac{2\pi}{3}i & 2 + \frac{8\pi}{3}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2\pi i & 0 \\ 0 & 5 + 4\pi i \end{bmatrix}$$

Επομένως σύμφωνα με την Πρόταση 13.2,

$$e^{\Delta} = \begin{bmatrix} e^{2+2\pi i} & 0 \\ 0 & e^{5+4\pi i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^5 \end{bmatrix}$$

διότι

$$e^{2+2\pi i} = e^2 e^{2\pi i} = e^2 \cdot 1 = e^2$$

και

$$e^{5+4\pi i} = e^5 e^{4\pi i} = e^5 \cdot 1 = e^5$$

οπότε

$$\begin{aligned} e^A &= Pe^{\Delta}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^2 + 2e^5 & -2e^2 + 2e^5 \\ -e^2 + e^5 & 2e^2 + e^5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

β) Οι ιδιοτιμές του πίνακα A προκύπτουν από την εξίσωση

$$det\,(A-\lambda I)=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} 4\pi i-\lambda & 1 \\ -1 & -2+4\pi i-\lambda \end{vmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; \lambda=-1+4\pi i \quad \text{διπλή}$$

Με τον τρόπο της Ενότητας 9.1 προκύπτει ότι ιδιοχώρος της ιδιοτιμής αυτής είναι

$$V(\lambda)=\{(k,-k),\; k\in R\}=\langle(1,-1)\rangle$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 10.2, ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $\vec{u}_1$ προκύπτει από τη σχέση

$$(A-\lambda\mathbf{I})\vec{u}_1=\vec{v}_1=(1,-1)$$

ή θέτοντας $\vec{u}_1=(u_1,u_2)$

$$\begin{bmatrix} 4\pi i-(-1+4\pi i) & 1 \\ -1 & -2+4\pi i-(-1+4\pi i) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \;\text{ ή }\; \begin{bmatrix} u_1+u_2 \\ -u_1-u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{aligned} u_1+u_2&=1 \\ -u_1-u_2&=-1 \end{aligned}$$

οπότε

$$u_2=1-u_1$$

Έτσι, για $u_1=0$ προκύπτει το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{u}_1=(0,1)$$

Επομένως, ο πίνακας που μετατρέπει τον πίνακα A σε κανονική μορφή Jordan είναι ο

$$P=[\vec{v}_1\;\vec{u}_1]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 2.10, ο αντίστροφος του είναι

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 13.5, η κανονική μορφή Jordan του πίνακα e^A είναι

$$J\left(e^A\right)=J_1\left(e^{-1+4\pi i}\right)=\begin{bmatrix} e^{-1+4\pi i} & e^{-1+4\pi i} \\ 0 & e^{-1+4\pi i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}$$

διότι

$$e^{-1+4\pi i}=e^{-1}e^{4\pi i}=e^{-1}\cdot 1=e^{-1}$$

οπότε

$$e^A=PJ\left(e^{-1}\right)P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2e^{-1} & e^{-1} \\ -e^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

γ) Με τον τρόπο της Ενότητας 9.1 προκύπτει ότι ο πίνακας A έχει μία τριπλή ιδιοτιμή, την $\lambda=1$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 13.12

$$e^A=\sigma_2A^2+\sigma_1A+\sigma_0I \qquad (i)$$

όπου

$$\begin{aligned} e^1 &= \sigma_2\cdot 1^2+\sigma_1\cdot 1+\sigma_0 \\ e^1 &= 2\sigma_2+\sigma_1 \\ e^1 &= 2\sigma_2 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό ως προς $\sigma_2,\sigma_1,\sigma_0$, προκύπτει

$$\sigma_2=\frac{e}{2},\quad \sigma_1=0 \quad \text{και} \quad \sigma_0=\frac{e}{2}$$

οπότε η (i) δίνει

$$e^A=\frac{e}{2}A^2+0\cdot A+\frac{e}{2}I=\begin{bmatrix} e & e & e \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

δ) Σύμφωνα με το Παράδειγμα 13.6, οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_1=1$ (διπλή), και $\lambda_2=2$ (απλή), όπου στη διπλή ιδιοτιμή $\lambda_1=1$. Έτσι, σύμφωνα με την Πρόταση 13.12

$$e^A=\sigma_2A^2+\sigma_1A+\sigma_0I \qquad (i)$$

όπου τα $\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2$ υπολογίζονται από το σύστημα

$$\begin{aligned} e^1 &= \sigma_2 \cdot 1^2 + \sigma_1 \cdot 1 + \sigma_0 \\ e^1 &= 2\sigma_2 \cdot 1 + \sigma_1 \\ e^2 &= \sigma_2 \cdot 2^2 + \sigma_1 \cdot 2 + \sigma_0 \end{aligned}$$

του οποίου η λύση προκύπτει

$$\sigma_2 = e^2 - 2e, \ \sigma_1 = 5e - 2e^2 \ \text{ και } \ \sigma_0 = e^2 - 2e$$

οπότε η (i) γίνεται

$$e^A = (e^2 - 2e)A^2 + (5e - 2e^2)A + (e^2 - 2e)I = \begin{bmatrix} e & 2e^2 - 3e & e \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 - e & e \end{bmatrix}$$

Άσκηση 13.2 Να βρεθεί ο πίνακας e^{At} αν

$$A=\begin{bmatrix}5&1&2\\0&3&0\\2&1&5\end{bmatrix}$$

ΛΑΘΟΣ

Με τον γνωστό τρόπο προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1=3$ διπλή και $\lambda_2=7$ απλή οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα At είναι

$$\lambda_1'=3t \quad \text{διπλή}, \quad \lambda_2'=7t \quad \text{απλή}$$

Αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο

$$\Pi(\lambda)=\sigma_2\lambda^2+\sigma_1\lambda+\sigma_0$$

τότε

$$e^{At}=\sigma_2A^2t^2+\sigma_1At+\sigma_0I \tag{i}$$

όπου τα $\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2$ υπολογίζονται από το σύστημα

$$\begin{aligned}e^{7t}&=\Pi(7t)=\sigma_2(7t)^2+\sigma_1(7t)+\sigma_0\\ e^{3t}&=\Pi(3t)=\sigma_2(3t)^2+\sigma_1(3t)+\sigma_0\\ e^{3t}&=\Pi'(3t)=2\sigma_2(3t)+\sigma_1(3t)\end{aligned}$$

του οποίου η λύση προκύπτει

$$\begin{aligned}\sigma_2&=\frac{4e^{3t}t+3e^{3t}-3e^{7t}}{-96t^2}\\ \sigma_1&=\frac{-40e^{3t}t-6e^{3t}+6e^{7t}}{-96t}\\ \sigma_0&=\frac{84e^{3t}t-105e^{3t}+9e^{7t}}{-96}\end{aligned}$$

οπότε η (i) γίνεται

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\frac{1}{96}(60e^{3t}t+117e^{3t}-21e^{7t}) & \frac{1}{48}(36e^{3t}t+3e^{3t}-3e^{7t})\\ \frac{1}{96}(36e^{3t}t+3e^{3t}-3e^{7t}) & \frac{1}{96}(24e^{3t}t+114e^{3t}-18e^{7t})\end{bmatrix}$$

Άσκηση 13.3 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= 2y_2 \\ y_3' &= y_2 + y_3 \end{aligned}$$

α) Λύση στο Κ10 παραδ.2
Ο πίνακας του συστήματος αυτού είναι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$ προκύπτουν από την εξίσωση

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0 \qquad (i)$$

οπότε οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_1 = 1$ (διπλή), και $\lambda_2 = 2$ (απλή).
Για $\lambda_1 = 1$, από την

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad (ii)$$

προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} 0x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0, \end{aligned}$$

το οποίο ισοδυναμεί με $\quad x_2 = 0 \text{ και } x_3 = 0,$

οπότε τα αντίστοιχα της ιδιοτιμής αυτής ιδιοδιανύσματα είναι

$$(k, 0, 0), \; k \in R.$$

Θέτοντας $k = 1$ προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 0),$$

οπότε μία λύση του συστήματος αυτού είναι η

$$\mathbf{Y}_1 = \vec{v}_1 e^x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^x = \begin{bmatrix} e^x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.4, μία ακόμα γραμμικώς ανεξάρτητη της $\mathbf{Y}_1$ λύση είναι η

$$\mathbf{Y}_2 = (\vec{v}_1 x + \vec{u})e^x,$$

όπου το $\vec{u}$ προκύπτει από την

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\vec{u} = \vec{v}_1$$

ή, θέτοντας $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} u_2 + u_3 \\ u_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{matrix} u_2 + u_3 = 1 \\ u_2 = 0 \\ u_2 = 0 \end{matrix}$$

οπότε $\quad u_2 = 0 \;\text{ και }\; u_3 = 1.$

Έτσι (θέτοντας $u_1 = 0$), μία ακόμα, γραμμικώς ανεξάρτητη της πρώτης, λύση του συστήματος είναι η

$$\mathbf{Y}_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) e^x = \begin{bmatrix} xe^x \\ 0 \\ e^x \end{bmatrix},$$

Τα αντίστοιχα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 2$ ιδιοδιανύσματα (x, y, z) του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι λύσεις του συστήματος (θέτουμε $\lambda = 2$ στο (ii))

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 1 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 1 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \quad \text{ή} \quad \begin{array}{rcl} -x+y+z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ y-z & = & 0 \end{array}$$

Οι εξισώσεις αυτές δίνουν $\quad y = z \quad \text{και} \quad x = 2z,$

οπότε οι λύσεις του συστήματος αυτού, δηλαδή τα αντίστοιχα της $\lambda_2 = 2$ ιδιοδιανύσματα, είναι

$$(2k, k, k)\,,\ k \in R.$$

Θέτοντας $k = 1$ προκύπτει $\quad \vec{v}_3 = (2, 1, 1),$

οπότε μία λύση του συστήματος είναι η

$$\mathbf{Y}_3 = \vec{v}_3 e^{2x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x}.$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2, η γενική λύση του συστήματος αυτού είναι

$$\mathbf{Y} = c_1\mathbf{Y}_1 + c_2\mathbf{Y}_2 + c_3\mathbf{Y}_3 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^x + c_2 \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^x + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x} = \begin{bmatrix} c_1e^x + c_2xe^x + 2c_3e^{2x} \\ c_3e^{2x} \\ c_2e^x + c_3e^{2x} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 13.4 Να υπολογιστεί ο πίνακας e^A για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1+2k\pi i & -1 & 0 \\ 0 & -1+2k\pi i & -2 \\ 0 & 0 & -1+2k\pi i \end{bmatrix} \quad k \in Z$$

Με τον τρόπο της Ενότητας 9.1 προκύπτει ότι ο πίνακας A έχει μία τριπλή ιδιοτιμή, την $\lambda = -1 + 2k\pi i$ και αντίστοιχο ιδιοχώρο τον

$$V(-1) = \langle (1,0,0) \rangle$$

Επειδή η διάσταση του $V(\lambda)$ είναι 1 και η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ είναι 3:

- σύμφωνα με την Πρόταση 10.3 και την Παρατήρηση 10.4, στην ιδιοτιμή λ αντιστοιχεί ένα μπλοκ Jordan διάστασης 3 το

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1+2k\pi i & 1 & 0 \\ 0 & -1+2k\pi i & 1 \\ 0 & 0 & -1+2k\pi i \end{bmatrix}$$

- σύμφωνα με την Πρόταση 10.2, στην ιδιοτιμή λ αντιστοιχούν δύο γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ από τις σχέσεις

$$(A - \lambda I)\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1,0,0) \qquad (i)$$

$$(A - \lambda I)\vec{u}_2 = \vec{u}_1 \qquad (ii)$$

Θέτοντας $\vec{u}_1 = (x, y, z)$, από την (i) προκύπτει

$$\begin{bmatrix} -1+2k\pi i-(-1+2k\pi i) & -1 & 0 \\ 0 & -1+2k\pi i-(-1+2k\pi i) & -2 \\ 0 & 0 & -1+2k\pi i-(-1+2k\pi i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από το σύστημα αυτό προκύπτει

$$-y = 1 \quad \text{και} \quad -2z = 0) \Leftrightarrow y = 1 \quad \text{και} \quad z = 0$$

Για $x = 0$ προκύπτει ένα πρώτο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{u}_1 = (0,1,0)$$

Θέτοντας $\vec{u}_2 = (x, y, z)$, η (ii) γίνεται

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από το σύστημα αυτό προκύπτει

$$-y = 0 \quad \text{και} \quad -2z = 1 \Leftrightarrow y = 0 \quad \text{και} \quad z = -\frac{1}{2}$$

Για $x = 0$ προκύπτει ένα δεύτερο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{u}_2 = \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

Επομένως, ο πίνακας που μετατρέπει τον πίνακα A σε κανονική μορφή Jordan είναι ο ($\vec{v}_1$ ένα ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ)

$$P = [\vec{v}_1\ \vec{u}_1\ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 2.10, ο αντίστροφος του είναι

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ἐτσι σύμφωνα με την Πρόταση 13.5, η κανονική μορφή Jordan του πίνακα e^A είναι

$$\begin{aligned} J\left(e^A\right) &= J_1(-1+2k\pi i) = \begin{bmatrix} e^{-1+2k\pi i} & e^{-1+2k\pi i} & \frac{1}{2}e^{-1+2k\pi i} \\ 0 & e^{-1+2k\pi i} & e^{-1+2k\pi i} \\ 0 & 0 & e^{-1+2k\pi i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-1} & \frac{1}{2}e^{-1} \\ 0 & e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

διότι

$$e^{-1+2k\pi i} = e^{-1}e^{2k\pi i} = e^{-1} \cdot 1 = e^{-1}$$

οπότε

$$\begin{aligned} e^A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-1} & \frac{1}{2}e^{-1} \\ 0 & e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-1} & -e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & e^{-1} & -2e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άσκηση 13.5 Να βρεθούν 4 πίνακες μιγαδικών αριθμών X για τους οποίους ισχύει

$$X^2 = A \quad \text{όπου} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

και ποιός από αυτούς είναι η κύρια τετραγωνική ρίζα του A.

Με τον γνωστό τρόπο προκύπτει ότι ο πίνακας A έχει τις απλές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 4$ με αντίστοιχους ιδιοχώρους

$$V(\lambda_1) = \langle(1,1)\rangle \quad \text{και} \quad V(\lambda_2) = \langle(1,4)\rangle$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 9.5, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος με πίνακα που τον διαγωνιοποιεί τον

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

και ο όμοιος διαγώνιος πίνακάς του είναι ο

$$\Delta = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Έτσι, 4 πίνακες μιγαδικών αριθμών X για τους οποίους ισχύει $X^2 = A$ (τετραγωνικές ρίζες του πίνακα A) δίνονται από τους $2^2 = 4$ κλάδους της συνάρτησης $A^{\frac{1}{2}}$ της (iv).
Οι τετραγωνικές ρίζες της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 1$ είναι

$$t_1 = 1 \text{ και } t_2 = -1$$

και της $\lambda_2 = 4$

$$t_1 = 2 \text{ και } t_2 = -2$$

Έτσι, από την (vii) προκύπτουν οι παρακάτω 4 πίνακες $\Delta_{ij}\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ $\quad i,j = 1,2,3,4$:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad X_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Επομένως, από την (v) προκύπτει ότι η (ii) αληθεύει για τους πίνακες

$$X_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad X_4 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Η κύρια τετραγωνική ρίζα του A είναι η X_1 που προκύπτει από τις τετραγωνικές ρίζες 1 της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 1$ (έχει το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος) και 2 της $\lambda_2 = 4$ (έχει το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος).

Άσκηση 13.6 Να βρεθούν 2 πίνακες μιγαδικών αριθμών X για τους οποίους ισχύει

$$X^2 = A$$

και η κύρια τετραγωνική ρίζα του A

αν

$a)\ A = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 1 & 2i \end{bmatrix} \qquad \beta)\ A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

α) Με τον τρόπο της Ενότητας 9.1 προκύπτει ότι ο πίνακας A έχει μία διπλή ιδιοτιμή, την $\lambda = 2i$ με αντίστοιχο ιδιοχώρο τον

$$V(\lambda) = \langle (0,1) \rangle$$

Έτσι, βρίσκουμε σύμφωνα με την Πρόταση 10.2 ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $\vec{u}$ από τη σχέση

$$(A - \lambda \mathbf{I})\vec{u} = \vec{v}_1$$

ή θέτοντας $\vec{u} = (u_1, u_2)$

$$\begin{bmatrix} 2i-2i & 0 \\ 1 & 2i-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{array}{c} -0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{array}$$

Έτσι, για $u_2 = 0$ προκύπτει το ζητούμενο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{u} = (1, 0)$$

Άρα σύμφωνα με την Πρόταση 10.1,

$$P = [\vec{v}_1\ \vec{u}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ οπότε } P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2 λύσεις της εξίσωσης $X^2 = A$ δίνονται από τους κλάδους της συνάρτησης $f_i(A) = A^{\frac{1}{2}}$, οι οποίοι σύμφωνα με την Πρόταση 13.4 είναι

$$f_i(A) = PJ_i\left(A^{\frac{1}{2}}\right)P^{-1} \quad i = 0,1 \tag{i}$$

όπου σύμφωνα με το Παράδειγμα 13.37α για $n = 2$,

$$J_i\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = \begin{bmatrix} t_i & \dfrac{t_i}{n\lambda} \\ 0 & t_i \end{bmatrix} \quad i = 0,1 \tag{ii}$$

και t_i οι τετραγωνικές ρίζες της ιδιοτιμής $\lambda = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ οι οποίες είναι

$$t_k = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+k2\pi}{2}} \quad k = 0,1 \tag{iii}$$

δηλαδή οι (προκύπτουν από την (iii) για $k = 0,1$)

$$\begin{aligned} t_0 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i \\ t_1 &= \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -1 - i \end{aligned}$$

οπότε από την (ii) προκύπτουν οι παρακάτω 2 πίνακες $J_i\left(A^{\frac{1}{3}}\right)$ $i = 0,1$:

$$J_0\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = \begin{bmatrix} 1+i & \dfrac{1+i}{2\cdot 2i} \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$$

$$J_1\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = \begin{bmatrix} 1-i & \dfrac{1-i}{2\cdot 2i} \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} = -J_0\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$$

Επομένως, από την (i) προκύπτει ότι η $X^2 = A$ αληθεύει για τους πίνακες

$$\begin{aligned} X_0 &= PJ_0\left(A^{\frac{1}{2}}\right)P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & \dfrac{1+i}{4i} \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}i & 1+i \end{bmatrix} \\ X_1 &= PJ_1\left(A^{\frac{1}{2}}\right)P^{-1} = -X_0 = \begin{bmatrix} -1-i & 0 \\ -\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}i & -1-i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Η κύρια τετραγωνική ρίζα του A είναι η X_0 που προκύπτει από την τετραγωνική ρίζα $1+i$ του $2i$ (έχει το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος).

β) Με τον τρόπο της Ενότητας 9.1 προκύπτει ότι ο πίνακας A έχει μία διπλή ιδιοτιμή, την $\lambda = -4$ με αντίστοιχο ιδιοχώρο τον

$$V(\lambda) = \langle (1,2) \rangle$$

Έτσι, βρίσκουμε σύμφωνα με την Πρόταση 10.2 ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $\vec{u}$ από τη σχέση

$$(A - \lambda\mathbf{I})\vec{u} = \vec{v}_1$$

ή θέτοντας $\vec{u} = (u_1, u_2)$

$$\begin{bmatrix} -6-(-4) & 1 \\ -4 & -2-(-4) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} -2u_1+u_2 \\ -4u_1+2u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{matrix} -2u_1+u_2=1 \\ -4u_1+2u_2=2 \end{matrix}$$

οπότε

$$u_2 = 1 + 2u_1$$

Έτσι, για $u_1 = 0$ προκύπτει το ζητούμενο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{u} = (0,1)$$

Άρα σύμφωνα με την Πρόταση 10.1,

$$P = [\vec{v}_1\ \vec{u}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{οπότε} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2 λύσεις της εξίσωσης $X^2 = A$ δίνονται από τους κλάδους της συνάρτησης $f_i(A) = A^{\frac{1}{2}}$, οι οποίοι σύμφωνα με την Πρόταση 13.4 είναι

$$f_i(A) = PJ_i\left(A^{\frac{1}{2}}\right)P^{-1} \quad i = 0,1 \tag{iv}$$

όπου σύμφωνα με το Παράδειγμα 13.37α για $n = 2$ και $\lambda = -4$,

$$J_i\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = \begin{bmatrix} t_i & \dfrac{t_i}{2(-4)} \\ 0 & t_i \end{bmatrix} \quad i = 0,1 \tag{v}$$

και t_i οι μιγαδικές τετραγωνικές ρίζες της ιδιοτιμής $\lambda = -4$ οι οποίες είναι

$$t_0 = 2i \quad \text{και} \quad t_1 = -2i$$

οπότε από την (v) προκύπτουν οι παρακάτω 2 πίνακες $J_i\left(A^{\frac{1}{3}}\right)$ $i = 0,1$:

$$\begin{aligned} J_0\left(A^{\frac{1}{2}}\right) &= \begin{bmatrix} 2i & \dfrac{2i}{2(-4)} \\ 0 & 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & -\dfrac{i}{-4} \\ 0 & 2i \end{bmatrix} \\ J_1\left(A^{\frac{1}{2}}\right) &= \begin{bmatrix} -2i & \dfrac{i}{-4} \\ 0 & -2i \end{bmatrix} = -J_0\left(A^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

Επομένως, από την (iv) προκύπτει ότι η $X^2 = A$ αληθεύει για τους πίνακες

$$
\begin{aligned}
X_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i & -\frac{i}{-4} \\ 0 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}i & -\frac{1}{4}i \\ i & \frac{3}{2}i \end{bmatrix} \\
X_1 &= -Y_1 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}i & \frac{1}{4}i \\ -i & -\frac{3}{2}i \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Η κύρια τετραγωνική ρίζα του A είναι η X_0 που προκύπτει από την τετραγωνική ρίζα $2i$ του -4 (έχει θετικό φανταστικό μέρος).