13.8 Τελεστής χρονικής εξέλιξης του σπιν ενός σωματιδίου

Από τα αξιώματα της κβαντικής (βλ. Ενότητα 12.5, στην ιστοσελίδα) και με τη βοήθεια της εκθετικής συνάρτησης πίνακα προκύπτει ότι:

Παρατήρηση 13.9 *Το διάνυσμα σπιν ενός σωματιδίου που κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0\hat{n}$ (στην κατεύθυνση $\hat{n}$) τη χρονική στιγμή t προκύπτει με τη βοήθεια του τελεστή χρονικής εξέλιξης*

$$\widehat{U}(t) = e^{-icB\widehat{\sigma}_n t}, \quad c \text{ σταθερά},$$

που ορίζεται (βλ. Ενότητα 12.8) ως συνάρτηση του τελεστή $\overline{\sigma}_n$ της προβολής του σπιν στην διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{n}$ (βλ. Παράδειγμα 12.20), ως εικόνα αυτού του αρχικού διανύσματος σπιν του σωματιδίου X_0

$$X(t) = \hat{U}(t)X_0 = e^{-icB\widehat{\sigma}_n t}X_0. \tag{13.1}$$

Εκφράζοντας την X_0 ως γραμμικό συνδυασμό

$$X_0 = kX_{n+} + mX_{n-}$$

των ιδιοδιανυσμάτων $X_{n\pm}$ του $\widehat{\sigma}_n$, η (13.1) γίνεται

$$X(t) = e^{-iaB\widehat{\sigma}_n t}\left(kX_{n+} + mX_{n-}\right) = ke^{-icBt}X_{n+} + me^{-icB(-1)t}X_{n-}$$

Παράδειγμα 13.55 *Ηλεκτρόνιο βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0\hat{z}_0$. Αν την χρονική στιγμή $t = 0$ το διάνυσμα σπιν του είναι*

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

να βρεθούν για κάθε χρονική στιγμή:
α) η μέση τιμή $\langle\hat{\sigma}_z\rangle$.
β) η πιθανότητα το σπιν του ηλεκτρονίου να βρεθεί παράλληλο με τον άξονα $+y$.

Λύση

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 13.9,

$$X(t) = e^{-icB_0\widehat{\sigma}_z t}X_0 \tag{i}$$

Το $e^{-icB_0\widehat{\sigma}_z t}X_0$ υπολογίζεται εύκολα αν εκφράσουμε την X_0 ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων του $\widehat{\sigma}_z$,

$$X_0 = aX_+ + \beta X_-$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή τις X_0, X_+, X_- παίρνουμε

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad a = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ετσι, η (i), λόγω και του ότι οι X_+, X_- είναι ιδιοδιανύσματα του $\widehat{\sigma}_z$ για τις ιδιοτιμές 1 και -1, γίνεται

$$\begin{aligned}
X(t) &= e^{-icB_0\widehat{\sigma}_z t}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}X_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}X_-\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0\widehat{\sigma}_z t}X_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0\widehat{\sigma}_z t}X_- \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0 1t}X_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0(-1)t}X_- \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0 t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{icB_0 t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{-icB_0 t} \\ e^{icB_0 t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(α) Η μέση τιμή του τελεστή $\hat{\sigma}_z$ την χρονική στιγμή t είναι

$$\langle\hat{\sigma}_z\rangle(t) = 2P_{z+}(t) - 1 \tag{iii}$$

όπου $P_{z+}(t)$, η πιθανότητα της ιδιοτιμής 1 την χρονική στιγμή τ, η οποία είναι ίση με το τετράγωνο του πάνω στοιχείου του διανύσματος σπιν, $X(t)$.

$$P_{z+}(t) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0t}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

οπότε η (iii) δίνει

$$\langle\hat{\sigma}_z\rangle(t) = \frac{1}{2}\hbar\left(2\frac{1}{2} - 1\right) = 0$$

β) Η πιθανότητα, P_{y+}, να βρεθεί το σπιν παράλληλο με τον ημιάξονα $+y$ είναι

$$P_{y+} = |\langle X(t), X_{y+}\rangle|^2 \qquad (iv)$$

όπου

$$X_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

το ιδιοδιάνυσμα του $\hat{\sigma}_y$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.

$$\langle X(t), X_{y+}\rangle = X^*(t)\,X_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{icB_0t} & e^{-icB_0t}\end{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[e^{icB_0t} + ie^{-icB_0t}\right].$$

Η (iv) λοιπόν δίνει

$$\begin{aligned}
P_{y+} &= \left|e^{icB_0t} + ie^{-icB_0t}\right|^2 = \left[e^{icB_0t} + ie^{-icB_0t}\right]\left[e^{-icB_0t} - ie^{icB_0t}\right] \\
&= \left(1 - ie^{2icB_0t} + ie^{-2icB_0t} + 1\right) = \left\{2 - i(e^{2icB_0t} - e^{-2icB_0t})\right\} \\
&= 2 - i(2i)\sin(2cB_0t) = 1 - \sin(2cB_0t)
\end{aligned}$$

Άσκηση 13.1 *Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο*

$$\vec{B} = B_0\hat{z}_0.$$

Αν τη στιγμή $t = 0$ το σπιν του είναι παράλληλο με τον ημιάξονα $+x$, να βρεθούν για κάθε χρονική στιγμή:
α) Οι μέσες τιμές $\langle\hat{\sigma}_x\rangle, \langle\hat{\sigma}_y\rangle, \langle\hat{\sigma}_z\rangle$.

β) Οι πιθανότητες το σπιν του να βρεθεί παράλληλο με τον:
$i)$ ημιάξονα $+y$, $ii)$ ημιάξονα $-z$, $iii)$ ημιάξονα $-x$.

Λύση

Επειδή το σπιν του ηλεκτρονίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι παράλληλο με τον άξονα $+x$, το αρχικό του διάνυσμα σπιν X_0 είναι το ιδιοδιάνυσμα του $\hat{\sigma}_x$ γιά την ιδιοτιμή 1,

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 13.3, το διάνυσμα σπιν του ηλεκτρονίου τη χρονική στιγμή t, $X(t)$, είναι

$$X(t) = e^{-icB_0\hat{\sigma}_z t}X_0 \qquad (ii)$$

Το $e^{-icB_0\hat{\sigma}_z t}X_0$ υπολογίζεται εύκολα αν γράψουμε την X_0 ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων του $\hat{\sigma}_z$,

$$X_0 = aX_+ + \beta X_-$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή τις X_0, X_+, X_- παίρνουμε

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix}$$

ή

$$a = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ετσι η (ii), λόγω και του ότι οι X_+, X_- είναι ιδιοδιανύσματα του $\hat{\sigma}_z$ γιά τις ιδιοτιμές 1 και -1, γινεται

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-icB_0\hat{\sigma}_z t}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}X_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}X_-\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0\hat{\sigma}_z t}X_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0\hat{\sigma}_z t}X_- \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0 1t}X_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0(-1)t}X_- = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0 t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{icB_0 t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{-icB_0 t} \\ e^{icB_0 t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

α) Η μέση τιμή του τελεστή $\hat{\sigma}_x$ είναι

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle = \langle X(t), \hat{\sigma}_x X(t)\rangle \qquad (iii)$$

Υπολογίζουμε το αποτέλεσμα της δράσης του $\hat{\sigma}_x$ στη $X(t)$

$$\hat{\sigma}_x X(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{-icB_0 t} \\ e^{icB_0 t} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{-icB_0 t} \\ e^{icB_0 t} \end{bmatrix}$$

οπότε η (iii) γίνεται

$$\begin{aligned} \langle\hat{\sigma}_x\rangle &= X^+(t)\hat{\sigma}_x X(t) = \langle\hat{\sigma}_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{icB_0 t} \quad e^{-icB_0 t}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{icB_0 t} \\ e^{-icB_0 t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{2icB_0 t} + e^{-2icB_0 t}\right] = \cos(2cB_0 t) \end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε και την ταυτότητα Euler $e^{2icB_0 t} + e^{-2icB_0 t} = 2\cos(2cB_0 t)$).
Η μέση τιμή του τελεστή $\hat{\sigma}_y$ είναι

$$\langle\hat{\sigma}_y\rangle = \langle X(t), \hat{\sigma}_y X(t)\rangle = X^+(t)\hat{\sigma}_y X(t) \qquad (iv)$$

$$\hat{\sigma}_y X(t) = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{-icB_0 t} \\ e^{icB_0 t} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -ie^{-icB_0 t} \\ ie^{-icB_0 t} \end{bmatrix}$$

οπότε η (iv) δίνει

$$\begin{aligned} \langle\hat{\sigma}_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{icB_0 t} \quad e^{-icB_0 t}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -ie^{-icB_0 t} \\ ie^{-icB_0 t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left[-ie^{2icB_0 t} + ie^{-2icB_0 t}\right] = -\frac{i}{2}2i\sin(2cB_0 t) = \sin(2cB_0 t) \end{aligned}$$

Η μέση τιμή του $\hat{\sigma}_z$ είναι

$$\langle\hat{\sigma}_z\rangle = 2P_{z+} - 1 \qquad (v)$$

όπου P_{z+} η πιθανότητα της ιδιοτιμής 1, η οποία είναι ίση με το τετράγωνο του πάνω στοιχείου του διανύσματος σπιν, $X(t)$,

$$P_{z+} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0 t}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

οπότε η (v) δίνει

$$\langle\hat{\sigma}_z\rangle = 2\frac{1}{2} - 1 = 0$$

β) i) Η πιθανότητα το σπιν να βρεθεί παράλληλο με τον άξονα $+y$ είναι

$$P_{y+} = |\langle X(t), X_{y+}\rangle|^2 \qquad (vi)$$

όπου
$$X_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

το ιδιοδιάνυσμα του $\hat{\sigma}_y$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.

$$\begin{aligned} \langle X(t), X_{y+}\rangle &= X^+(t)\,X_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{icB_0 t} \quad e^{-icB_0 t}\right]\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{icB_0 t} + ie^{-icB_0 t}\right] \end{aligned}$$

Η (vi) λοιπόν δίνει

$$
\begin{aligned}
P_{y+} &= \left|\frac{1}{2}\left[e^{icB_0t} + ie^{-icB_0t}\right]\right|^2 = \frac{1}{4}\left[e^{icB_0t} + ie^{-icB_0t}\right]\left[e^{-icB_0t} - ie^{icB_0t}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - ie^{2icB_0t} + ie^{-2icB_0t} + 1\right) = \frac{1}{4}\left\{2 - i(e^{2icB_0t} - e^{-2icB_0t})\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{2 - i(2i)\sin(2cB_0t)\right\} = \frac{1}{2}\left(1 - \sin(2cB_0t)\right)
\end{aligned}
$$

$ii)$ Η πιθανότητα το σπιν να βρεθεί παράλληλο με τον άξονα $+z$ είναι ίση με το τετράγωνο του μέτρου του πάνω στοιχείου του διανύσματος σπιν του,

$$P_{z+} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{icB_0t}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

(iii) Η πιθανότητα P_{x-} το σπιν να βρεθεί παράλληλο στον αρνητικό ημιάξονα $-x$ είναι

$$P_{x-} = |\langle X(t), X_{x-}\rangle|^2$$

όπου

$$X_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

το ιδιοδιάνυσμα του $\hat{\sigma}_x$ για την ιδιοτιμή 1.

$$
\begin{aligned}
\langle X(t), X_{x-}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{icB_0t} \quad e^{-icB_0t}\right]\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{icB_0t} - e^{-icB_0t}\right] = \cos(cB_0t),
\end{aligned}
$$

οπότε

$$P_{x-} = \cos^2(cB_0t).$$

Άσκηση 13.2 *Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σπιν ενός ηλεκτρονίου, το οποίο κινείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο*

$$\vec{B} = B_0\hat{x}_0, \quad B_0 \quad \text{σταθερή},$$

είναι παράλληλο με τον ημιάξονα $+z$.
Να βρεθούν:
α) η μέση τιμή του τελεστή σ_x για το ηλεκτρόνιο αυτό μετά από χρόνο t,
β) η πιθανότητα το σπίν του ηλεκτρονίου να βρεθεί παράλληλο στον θετικό ημιάξονα $+y$.

Λύση

α) Το διάνυσμα σπιν του ηλεκτρονίου τη στιγμή $t = 0$, $X(0)$, είναι το ιδιοδιάνυσμα, X_+, του τελεστή $\hat{\sigma}_z$ για την ιδιοτιμή 1,

$$X_0 \equiv X_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η $X(t)$ βρίσκεται με τη βοήθεια του τελεστή χρονικής εξέλιξης $\hat{U}(t)$ (βλ. Παρατήρηση 12.16),

$$X(t) = \hat{U}(t)X(0) = e^{-icB_0\hat{\sigma}_x t}X(0) \qquad (ii)$$

Το αποτέλεσμα της δράσης του τελεστή $e^{-icB_0\hat{\sigma}_x t}$ στη $X(0)$ υπολογίζεται, αν την εκφράσουμε ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων του $\hat{\sigma}_x$,

$$X_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Θέτοντας

$$X_0 = aX_{x+} + \beta X_{x-}$$

προκύπτει

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(a+\beta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(a-\beta) \end{bmatrix}$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+\beta)$$

ή

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a-\beta)$$

Η λύση του συστήματος αυτού είναι

$$a = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ετσι η (ii) γίνεται

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-icB_0\hat{\sigma}_x t}X(0) = e^{-icB_0\hat{\sigma}_x t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X_{x+} + \frac{1}{\sqrt{2}}X_{x-}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0\hat{\sigma}_x t}X_{x+} + e^{-icB_0\hat{\sigma}_x t}X_{x-} \end{aligned}$$

Οι X_{x+}, X_{x+}, ως ιδιοδιανύσματα του τελεστή $\hat{\sigma}_x$ γιά τις ιδιοτιμές 1 και -1, είναι ιδιοδιανύσματα και του τελεστή $e^{-icB_0\hat{\sigma}_x t}$ για τις ιδιοτιμές

$$e^{-icB_0 1t} \text{ και } e^{-icB_0(-1)t}$$

αντίστοιχα, οπότε

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0 t1}X_{n+} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0 t(-1)}X_{n-} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0 t}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{icB_0 t}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-icB_0 t} + e^{icB_0 t} \\ e^{-icB_0 t} - e^{icB_0 t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos(cB_0 t) \\ -2i\sin(cB_0 t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(cB_0 t) \\ -i\sin(cB_0 t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Η μέση τιμή του τελεστή σ_x είναι

$$\begin{aligned} \langle\hat{\sigma}_x\rangle &= \langle X(t), \hat{\sigma}_x X(t)\rangle = X^+(t)\;\hat{\sigma}_x\;X(t) \\ &= (\cos(cB_0 t) \quad i\sin(cB_0 t))\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(cB_0 t) \\ -i\sin(cB_0 t) \end{bmatrix} \\ &= (\cos(cB_0 t) \quad i\sin(cB_0 t))\begin{bmatrix} -i\sin(cB_0 t) \\ \cos(cB_0 t) \end{bmatrix} \\ &= -i\cos(cB_0 t)\,\sin(cB_0 t) + i\sin(cB_0 t)\,\cos(cB_0 t) \end{aligned}$$

Αρα

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle = 0$$

β) Η πιθανότητα το σπιν του ηλεκτρονίου να βρεθεί παράλληλο στον θετικό ημιάξονα $+y$ είναι

$$P_{y+} = |\langle X(t), X_{y+}\rangle|^2 \qquad (iii)$$

όπου $X_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ το ιδιοδιάνυσμα του $\hat{\sigma}_y$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.

$$\langle X(t), X_{y+}\rangle = [\cos(aB_0 t) \qquad i\sin(aB_0 t)]\;\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos a(B_0 t) - \sin(aB_0 t)),$$

οπότε η (iii) δίνει

$$P_{y+} = \frac{1}{2}\left(\cos(aB_0 t) - \sin(aB_0 t)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sin(2aB_0 t)\right).$$

Παράδειγμα 13.56 *Ενα ηλεκτρόνιο βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο*

$$\vec{B} = B_0\widehat{z}_0, \quad B_0 \text{ σταθερή}$$

και τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σπιν του είναι παράλληλο με τον ημιάξονα $+y$.
α) Να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο το σπιν θα βρεθεί για πρώτη φορά παράλληλο με τον άξονα $+x$.

Λύση

Τη χρονική στιγμή t, την οποία το σπιν θα βρεθεί παράλληλο με τον ημιάξονα $+x$ η πιθανότητα της ιδιοτιμής 1 του τελεστή $\hat{\sigma}_x$ θα είναι μονάδα, οπότε

$$|\langle X(t), X_{x+}\rangle|^2 = 1, \qquad (i)$$

όπου X_{x+} το ιδιοδιάνυσμα του $\hat{\sigma}_x$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 και $X(t)$ το διάνυσμα σπιν του ηλεκτρονίου τη στιγμή t.

Το διάνυσμα σπιν του ηλεκτρονίου τη στιγμή t βρίσκεται με τη βοήθεια του τελεστή χρονικής εξέλιξης (βλ. Παρατήρηση 12.16)

$$X(t) = \hat{U}(t)X_0 = e^{-icB_0\hat{\sigma}_z t}X_0, \quad c \text{ σταθερά} \qquad (ii)$$

Το διάνυσμα σπιν του ηλεκτρονίου τη στιγμή $t = 0$, ως ιδιοδιάνυσμα του τελεστή $\hat{\sigma}_y$ γιά την ιδιοτιμή 1, είναι

$$X_0 = X_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε το $e^{-icB_0\hat{\sigma}_z t}X_0$ εκφράζουμε τη X_0 ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων, X_+, X_-, του τελεστή $\hat{\sigma}_z$,

$$X_0 = aX_+ + \beta X_-$$

όπου α, β είναι μιγαδικές σταθερές οι οποίες υπολογίζονται αντικαθιστώντας στη τελευταία σχέση τις εκφράσεις των X_0, X_+, X_-,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix}$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

οπότε η (ii), λόγω και του ότι X_+, X_-, ως ιδιοδιανύσματα του τελεστή $\hat{\sigma}_z$, για τις ιδιοτιμές 1 και -1 είναι ιδιοδιανύσματα και του τελεστή $e^{-icB_0\hat{\sigma}_z t}$ για τις ιδιοτιμές

$$e^{-icB_0 1t} \quad \text{και} \quad e^{-icB_0(-1)t}$$

αντίστοιχα, δίνει

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-icB_0\hat{\sigma}_z t}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}X_+ + \frac{i}{\sqrt{2}}X_-\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0\hat{\sigma}_z t}X_+ + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-icB_0\hat{\sigma}_z t}X_- \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0 1t}X_+ + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-icB_0(-1)t}X_- \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-icB_0 t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{icB_0 t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{-icB_0 t} \\ e^{icB_0 t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \langle X(t), X_{x+}\rangle &= X(t)^* X_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{icB_0 t} & -ie^{-icB_0 t} \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{icB_0 t} - ie^{-icB_0 t}\right] \end{aligned}$$

οπότε η (i) γίνεται

$$\left|\frac{1}{2}\left[e^{icB_0 t} - ie^{-icB_0 t}\right]\right|^2 = 1 \qquad (iii)$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}\left[e^{icB_0 t} - ie^{-icB_0 t}\right]\right|^2 &= \frac{1}{4}\left[e^{icB_0 t} - ie^{-icB_0 t}\right]\left[e^{icB_0 t} - ie^{-icB_0 t}\right]^* \\ &= \frac{1}{4}\left[1 + ie^{2icB_0 t} - ie^{-2icB_0 t} + 1\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[2 + i(e^{2icB_0 t} - e^{-2icB_0 t})\right] = \frac{1}{4}\{2 - 2\sin(2cB_0 t)\} \end{aligned}$$

(Χρησιμοποιήσαμε και την ταυτότητα Euler). Ετσι η (iii) γίνεται

$$1 - \sin(2cB_0t) = 2 \quad \text{ή} \quad \sin(2cB_0t) = -1$$

Η ζητούμενη χρονική στιγμή, t_1, την οποία το σπιν του ηλεκτρονίου θα βρεθεί παράλληλο με τον άξονα $+x$, είναι η μικρότερη θετική ρίζα της τριγωνομετρικής αυτής εξίσωσης.

Παράδειγμα 13.57 *Το διάνυσμα σπιν ενός ηλεκτρονίου είναι*

$$e^{i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_x}X_+$$

όπου X_+ το ιδιοδιάνυσμα του τελεστή της προβολής z του σπιν για την ιδιοτιμή 1.
Να βρεθούν οι μέσες τιμές των τελεστών:
α) $\widehat{\sigma}_y$, β) $\widehat{\sigma}_z$,

Λύση

α) Η μέση τιμή της συνιστώσας y του τελεστή $\widehat{\sigma}_y$, για ένα σωμάτιο με διάνυσμα σπιν X είναι

$$\langle\hat{\sigma}_y\rangle = \langle X, \hat{\sigma}_y X\rangle$$

Το διάνυσμα σπιν του ηλεκτρονίου είναι

$$X = e^{i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_x}X_+ = e^{i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_x}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Γιά να βρούμε το αποτέλεσμα της δράσης του τελεστή $e^{i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_x}$ στην X_+, την εκφράζουμε ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων του $\hat{\sigma}_x$

$$X_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Θέτουμε λοιπόν
$$X_+ = aX_{x+} + \beta X_{x-}$$

οπότε
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} a+\beta \\ a-\beta \end{bmatrix}$$

ή
$$\begin{aligned} \frac{a+\beta}{\sqrt{2}} &= 1 \\ \frac{a-\beta}{\sqrt{2}} &= 0 \end{aligned} \quad \text{ή} \quad a = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Αρα
$$X_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}X_{x+} + \frac{1}{\sqrt{2}}X_{x-}$$

οπότε
$$X = e^{i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_x t}X_+ = e^{i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_x t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X_{x+} + \frac{1}{\sqrt{2}}X_{x-}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_x t}X_{x+} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_x t}X_{x-}$$

Οι X_{x+} και X_{x-}, ως ιδιοδιανύσματα του $\hat{\sigma}_x$ για τις ιδιοτιμές +1, −1, είναι, σύμφωνα με την Πρόταση 9.8, ιδιοδιανύσματα και του τελεστή $e^{i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_x t}$ για τις ιδιοτιμές

$$e^{i\frac{\pi}{4}1t} \text{ και } e^{i\frac{\pi}{4}(-1)t},$$

οπότε

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}1}X_{x+} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}(-1)}X_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos\dfrac{\pi}{4} \\ 2i\sin\dfrac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα της δράσης του τελεστή $\hat{\sigma}_y$ στην X είναι,

$$\hat{\sigma}_y X = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = -X$$

οπότε το διάνυσμα σπιν του ηλεκτρονίου είναι ιδιοδιάνυσμα του τελεστή $\hat{\sigma}_y$ για την ιδιοτιμή -1. Επομένως, η μέση τιμή $\langle\hat{\sigma}_y\rangle$ για το ηλεκτρόνιο αυτό είναι η ιδιοτιμή -1,

$$\langle\hat{\sigma}_y\rangle = -1$$

β) Η μέση τιμή του σ_z ενός σωματιδίου είναι

$$\langle\hat{\sigma}_z\rangle = 2|a|^2 - 1$$

όπου α το πάνω στοιχείο του διανύσματος σπιν του. Επομένως,

$$\langle\hat{\sigma}_z\rangle = 2\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 - 1 = 0.$$

Παράδειγμα 13.58 *Ενα ηλεκτρόνιο βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο*

$$\vec{B} = B_0\widehat{y}_0, \quad B \text{ σταθερή}$$

Αν τη στιγμή $t = 0$ το σπιν του ηλεκτρονίου είναι παράλληλο με τον ημιάξονα $+x$, τότε να βρεθεί η μέση τιμή του τελεστή σ_z μετα από χρόνο t.

Λύση

Το διάνυσμα σπιν του ηλεκτρονίου τη στιγμή $t = 0$, X_0 είναι ιδιοδιάνυσμα του τελεστή $\hat{\sigma}_x$ γιά την ιδιοτιμή 1, οπότε

$$X_0 = X_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 12.15, το διάνυσμα σπιν του ηλεκτρονίου οποιαδήποτε χρονική στιγμή t είναι

$$X(t) = \hat{U}(t)X_0 = e^{-icB_0\hat{\sigma}_z t}X_0 \qquad (i)$$

Εκφράζοντας την X_0 ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων,

$$X_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad X_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

του $\hat{\sigma}_y$,

$$X_0 = aX_{y+} + \beta X_{y-}$$

ή

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \beta\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+\beta) \\ (a-\beta)i \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{aligned} a + \beta &= 1 \\ (a-\beta)i &= 1 \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος αυτού είναι

$$a = \frac{1-i}{2}, \quad \beta = \frac{1+i}{2}$$

Ετσι η (i), λόγω και του ότι οι X_{y+}, X_{y-} είναι ιδιοδιανύσματα του τελεστή $e^{-icB_0\hat{\sigma}_y t}$ για τις ιδιοτιμές

$$e^{-icB_0 1t} \quad \text{και} \quad e^{-icB_0(-1)t}$$

αντίστοιχα, γίνεται

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-icB_0\hat{\sigma}_y t}\left(\frac{1-i}{2}\,X_{y+} + \frac{1+i}{2}\,X_{y-}\right) \\ &= \frac{1-i}{2}\,e^{-icB_0\hat{\sigma}_y t}\,X_{y+} + \frac{1-i}{2}\,e^{-icB_0\hat{\sigma}_y t}X_{y-} \\ &= \frac{1-i}{2}e^{-icB_0 t1}X_{y+} + \frac{1+i}{2}e^{-icB_0 t(-1)}X_{y+} \\ &= \frac{1-i}{2}e^{-icB_0 t}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \frac{1+i}{2}e^{icB_0 t}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} (1-i)e^{-icB_0 t} + (1+i)e^{icB_0 t} \\ (1+i)e^{-icB_0 t} + (1-i)e^{icB_0 t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Η μέση τιμή του τελεστή σ_z είναι

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle = \langle X(t), \hat{\sigma}_z X(t) \rangle = X^+(t) \hat{\sigma}_z X(t) \qquad (i)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-i)e^{-icB_0 t} + (1+i)e^{icB_0 t} \\ (1+i)e^{-icB_0 t} + (1-i)e^{icB_0 t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1-i)e^{-icB_0 t} + (1+i)e^{icB_0 t} \\ -(1+i)e^{-icB_0 t} + (i-1)e^{-icB_0 t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε η (i) γίνεται

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_z \rangle &= X^+(t)\ \hat{\sigma}_z\ X(t) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1+i)e^{icB_0 t} + (1-i)e^{-icB_0 t} \qquad (1-i)e^{icB_0 t} + (1+i)e^{-icB_0 t} \right] \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1-i)e^{-icB_0 t} + (1+i)e^{icB_0 t} \\ -(1+i)e^{-icB_0 t} + (i-1)e^{-icB_0 t} \end{bmatrix} \Bigg) \\ &= \frac{1}{8} \Big\{ \left[(1+i)e^{icB_0 t} + (1-i)e^{-icB_0 t} \right] \left[(1-i)e^{-icB_0 t} + (1+i)e^{icB_0 t} \right] + \\ &\quad + \left[(1-i)e^{icB_0 t} + (1+i)e^{-icB_0 t} \right] \left[-(1+i)e^{-icB_0 t} + (i-1)e^{-icB_0 t} \right] \Big\} \\ &= \frac{1}{8} r \left\{ 2 + (1+i)^2 e^{2icB_0 t} + (1-i)^2 e^{-2icB_0 t} + 2 - 2 \right. \\ &- \left. (i-1)^2 e^{2icB_0 t} - (1+i)^2 e^{-2icB_0 t} - 2 \right\} = \tfrac{1}{8} \left\{ 4i \left(e^{2icB_0 t} - e^{-2icB_0 t} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{8} 4i\ 2i\ \sin(2cB_0 t) = \sin(2cB_0 t) \end{aligned}$$