Κεφάλαιο 3

Γραμμικά συστήματα

Άσκηση 3.2

- Ο πίνακας Α αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_3 = -1 \\ &x_2 - 4x_3 = 0 \\ &x_4 = -3 \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$x_1 = -4x_3 - 1, \quad x_2 = 4x_3 \quad \text{και} \quad x_4 = -3,$$

οπότε η λύση του συστήματος είναι ($x_3 = k$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-4k - 1, 4k, k, -3), \quad k \in R$$

- Ο πίνακας Β αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} &x_1 = 6 \\ &x_2 = -3 \\ &x_3 = 2 \end{aligned}$$

οπότε η λύση του συστήματος είναι ($x_4 = k$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6, -3, 2, k), \quad k \in R$$

- Ο πίνακας Γ αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 = 0 \\ &x_3 = 0 \\ &0 = 1 \end{aligned}$$

οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

- Ο πίνακας Δ αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} &1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2 \\ &0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -3 \\ &0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 2 \end{aligned}$$

οπότε η λύση του συστήματος είναι

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, -3, 2)$$

Άσκηση 3.3

α) Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή $AX = B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του A προκύπτει

$$|A| = 0$$

Επίσης, η 2×2 ορίζουσα που προκύπτει διαγράφοντας την τρίτη γραμμή και την τρίτη στήλη.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

οπότε,
$$rank(A) = 2$$
όμως,

$$rank(A|B) = 3$$

εφόσον η υποορίζουσα του επαυξημένου

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Δηλαδή $rank(A) \neq rank(A|B)$, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση

β) Το σύστημα γράφεται στη μορφή $Ax = B$ όπου,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$rank(A|B) = 3$ επειδή η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$$

όμως

$$rank(A) = 2 \ \text{ αφού } \ |A| = 0 \ \text{ και } \ \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

οπότε το σύστημα δεν έχει λύση

γ) Το σύστημα γράφεται στη μορφή

$$AX = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

και ο επαυξημένος πίνακας έχει ορίζουσα

$$|A|B| = 0$$

και μια 3×3 υποορίζουσα του πίνακα A είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 3$$

Λύνουμε, λοιπόν, το παρακάτω σύστημα (αντιστοιχεί στην παραπάνω μη μηδενική υποορίζουσα)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις προκύπτει η λύση του συστήματος

$$x_1 = 1, \;\; x_2 = 1, \;\; x_3 = 1$$

(οι τιμές αυτές ικανοποιούν, βεβαίως και την τρίτη εξίσωση).
γ) σύμφωνα με την Πρόταση 3.13 το σύστημα έχει μοναδική λύση.
Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 37 & \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{21}(-1) \\ H_{31}(-2) \\ \sim \\ H_{41}(1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} H_2\left(\frac{1}{3}\right) \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{12}(2) \\ \sim \\ H_{32}(-3) \\ H_{42}(-3) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} H_3\left(-\frac{1}{7}\right) \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{23}\left(-\frac{4}{3}\right) \\ \sim \\ H_{13}\left(-\frac{11}{3}\right) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δ) Το σύστημα γράφεται

$$AX = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μια 2×2 υποορίζουσα του επαυξημένου και του A είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A|B) = rank(A) = 2$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 3.13 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (βρίσκουμε τα x_1, x_2 συναρτήσει του x_3)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 + x_3 \\ x_1 - x_2 &= 1 - x_3 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$2x_1 = 2 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 1$$

οπότε η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$x_2 = x_3$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος (θέτοντας $x_3 = k$) είναι

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, k, k),\ k \in R$$

ε) Το σύστημα γράφεται στη μορφή

$$AX = B$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

όλες οι 2×2 υποοορίζουσες του είναι μηδενικές οπότε

$$rank(A) = 1$$

και μια 2×2 υποορίζουσα του επαυξημένου είναι

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

οπότε

$$rank(A|B) = 2$$

Επομένως, το σύστημα δεν έχει λύση (αφού $rank(A) \neq rank(A|B)$).
στ) Το σύστημα αυτό γράφεται

$$AX = B$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μια 2×3 υποορίζουσα του Α και του $A|B$ είναι

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 3$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (βλ Πρόταση 3.13) (βρίσκουμε το x, y, z συναρτήσει του w)

$$y + 2z = -w$$
$$2x + z = 2$$
$$y = 1 - w$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση το y (τρίτη εξίσωση) προκύπτει

$$z = -\frac{1}{2}$$

και αντικαθιστώντας στη δεύτερη το z

$$x = \frac{5}{4}$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $w = k$)

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{5}{4}, 1 - k, -\frac{1}{2}, k\right),\quad k \in R$$

ζ) Το σύστημα γράφεται

$$AX = B,$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Μια 3×3 υποορίζουσα του A και του A.B είναι

όπου
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 3$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 3.13 το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 7$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{7}{4}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-7}{4}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{3}{4}$$

η) Το σύστημα γράφεται

$$AX = B,$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

το σύστημα είναι ομογενές, επομένως έχει λύση (αφού $rank(A) = rank(A|B)$)
Μια μη μηδενική ορίζουσα του πίνακα A είναι η

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

οπότε βρίσκουμε τους x_1, x_2, x_3 συναρτήσει του x_4

$$x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -3x_4$$
$$-2x_1 + x_2 = 5x_4$$
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

Έτσι, προκύπτουν οι λύσεις του συστήματος (θέτοντας $k = x_4$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17k, -29k, 11k, k)$$

θ) Το σύστημα γράφεται

$$AX = B,$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η 3×3 ορίζουσα του A είναι μηδενική, όπως και όλες οι 2×2 υποορίζουσες, επομένως

$$rank(A) = 1$$

Βρίσκουμε το x_1 συναρτήσει των x_2 και x_3 από την πρώτη εξίσωση

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$$

οπότε, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_2 = k$ και $x_3 = l$)

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}l, k, l\right)$$

ι) Το σύστημα αυτό γράφεται

$$AX = B$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & -3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι 3×3 και οι 2×2 υποορίζουσες του είναι μηδενικές, οπότε $rank(A) = 1 = rank(A|B)$ (ομογενές)

Βρίσκουμε το x_1 συναρτήσει των x_2, x_3, x_4

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι θέτοντας $x_2 = k, x_3 = 1, x_4 = m$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}l + m, k, l, m\right)$$

Άσκηση 3.4

α) Το σύστημα γράφεται στην μορφή

$$AX = B,$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$$

$$rank(A) = rank(A|B) = 3$$

οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.13, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} \tag{i}$$

όπου

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 24$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24$$

Έτσι, οι (i) δίνουν

$$x_1 = \frac{24}{24} = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -\frac{24}{24} = -1$$

β) Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή

$$AX = B,$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

και μια 3×3 υποορίζουσα του είναι η

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

οπότε
$$rank(A|B) = 3$$
όμως όλες οι 3×3 υποορίζουσες του πίνακα A είναι μηδενικές, οπότε
$$rank(A) \neq 3$$
Εφόσον,
$$rank(A) \neq rank(A|B)$$
Επομένως σύμφωνα με την Πρόταση 3.12 το σύστημα είναι αδύνατο.
γ) Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή
$$AX = B,$$
όπου
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$
Μια μη μηδενική 3×3 υποορίζουσα του πίνακα A και του επαυξημένου $A|B$ είναι
$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0,$$
οπότε
$$rank(A) = rank(A|B).$$
Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε τους 3 αγνώστους συναρτήσει των άλλων δύο π.χ τους x_1, x_3, x_5 συναρτήσει των x_2, x_4 από τις εξισώσεις
$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_3 + x_5 &= -4 - 2x_2 + 3x_4 && (i) \\ 3x_1 - x_3 + x_5 &= 5 - x_4 + 3x_2 && (ii) \\ x_1 + 2x_3 + 3x_5 &= 2 + x_2 + 2x_4 && (iii) \end{aligned}$$
Αφαιρώντας τις (i) και (ii) κατά μέλη και πολλαπλασιάζοντας την (ii) επί -3 και προσθέτοντας τη στην (iii) προκύπτει
$$\begin{aligned} -5x_1 + 4x_3 = -9 - 5x_2 + 4x_4 && (iv) \\ -8x_1 + 5x_3 = -13 + 5x_4 - 8x_2 && (v) \end{aligned}$$
Πολλαπλασιάζοντας την (iv) επί -5 και την (v) επί 4 και προσθέτωντας αυτές που προκύπτουν έχουμε
$$x_1 = 1 + x_2$$
Αντικαθιστώντας το x_1 στην (v) έχουμε
$$x_3 = -1 + x_4$$
Αντικαθιστώντας τα x_1 και x_3 στην (i) προκύπτει
$$x_5 = 1$$
οπότε, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_2 = k$ και $x_4 = m$)
$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 + k, k, m - 1, m, 1) \quad k, m \in R$$
δ) Το σύστημα γράφεται στη μορφή
$$AX = B,$$
όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$
και μια 3×3 υποορίζουσα του A είναι
$$AX = B$$
$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 3$$

Επομένως, μπορούμε να βρούμε τους τρεις αγνώστους συναρτήσει των άλλων δύο. Λύνοντας τις εξισώσεις ως προς x_3, x_4, x_5 προκύπτει

$$\begin{array}{l} -x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 10 - x_1 - 2x_2 \\ x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -4 + x_1 + 2x_2 \\ -2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 6 - 2x_1 - 4x_2 \end{array} \quad (i)$$

Προσθέτοντας τις δύο πρώτες κατά μέλη και πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη επί 2 και προσθέτοντας στην τρίτη εξίσωση προκύπτουν

$$\begin{array}{l} 2x_4 + 4x_5 = 6 \\ x_5 = 2 \end{array} \qquad (ii)$$

Αντικαθιστώντας το x_5 στην πρώτη εξίσωση προκύπτει

$$x_4 = -1.$$

Αντικαθιστώντας τα x_4, x_5 στην (i) έχουμε

$$x_3 = -3 + x_1 + 2x_2$$

οπότε, οι λύσεις του συστήματος είναι θέτοντας $x_1 = k$ και $x_2 = m$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (k, m, -3 + k + 2m, -1, 2)$$

ε) Το σύστημα γράφεται στη μορφή

$$AX = B,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα είναι ομογενές, οπότε έχει λύση.
Επειδή

$$|A| = 0$$

και όλες οι 3×3 υποορίζουσες του A είναι μηδενικές, όμως η 2×2 υποορίζουσα του A

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 7 = -5 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = 2$$

οπότε μπορούμε να βρούμε τα x_1, x_2 συναρτήσει των x_3, x_4 (από τις δυο πρώτες εξισώσεις)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &= -5x_3 + 5x_4 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει $x_2 = -x_1$ αντικαθιστώντας στην πρώτη, προκύπτει

$$\begin{aligned} 2x_1 - 7x_1 &= -5x_3 + 5x_4 \\ x_1 &= x_3 - x_4 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$x_2 = -x_1 = x_4 - x_3,$$

οπότε οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_3 = k$ και $x_4 = m$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (k - m, m - k, k, m) \quad k, m \in R$$

στ) Το σύστημα γράφεται

$$AX = B,$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

η ορίζουσα του A είναι

$$|A| = 0$$

Επίσης, όλες οι 3×3 υποορίζουσες του A είναι μηδενικές.
Μια 2×2 υποορίζουσα του A είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

οπότε $$rank(A) = 2 = rank(A|B) \text{ (ομογενές)}$$

οπότε μπορούμε να βρούμε τα x_1, x_2 συναρτήσει των x_3, x_4. Από τις δύο πρώτες εξισώσεις προκύπτουν

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -x_4 \\ x_2 &= -x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το x_2 στην πρώτη εξίσωση προκύπτει

$$x_1 = x_3 - 2x_4$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_3 = k$ και $x_4 = m$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (k - 2m, m - k, k, m), \quad k, m \in R.$$

ζ) Το σύστημα αυτό γράφεται

$$AX = B,$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$|A| = 21$$

και η λύση του, με τον τρόπο του (α), προκύπτει

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$

ζ) Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή

$$AX = B,$$

όπου $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Επειδή $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 21 \neq 0,$$

$$rankA = rank(A|B) = 3,$$

οπότε το σύστημα αυτό έχει τη μοναδική λύση

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \tag{i}$$

όπου

$$\begin{aligned}
|A_1| &= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 7\left[(-2)(-1) - 1(-1)\right] = 21 \\
|A_2| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7\left[1(-1) - 1 \cdot 2\right] = 21 \\
|A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7\left[1(-1) - 2(-2)\right] = 21
\end{aligned}$$

Έτσι οι (i) δίνουν $$x_1 = \frac{21}{21} = 1, \quad x_2 = \frac{21}{21} = 1, \quad x_3 = \frac{21}{21} = 1.$$

Άσκηση 3.5

Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή

$$AX = B$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & 2 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} a \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Για να έχει λύση το σύστημα πρέπει

$$rank(A) = rank(A|B). \tag{i}$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι 3×3 υποορίζουσες του A είναι μηδέν και η 2×2 υποορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = 2$$

Λόγω της (i) πρέπει $rank(A|B) = 2$, δηλαδή όλες οι 3×3 υποορίζουσες του επαυξημένου πρέπει να είναι μηδέν.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & -1 & \beta \\ 7 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & \beta \\ 7 & \gamma \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 3\gamma - 15\beta + 9a = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & \beta \\ 7 & 2 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 2 & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & \beta \\ 7 & \gamma \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 5\beta - \gamma - 3a = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & -1 & \beta \\ 7 & -8 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & \beta \\ 8 & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & \beta \\ 7 & \gamma \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -3\gamma - \beta + 15a = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 1 & \beta \\ 1 & 2 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 2 & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -\gamma + 5\beta - 3a = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & -1 & \beta \\ 1 & -8 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \begin{vmatrix} -1 & \beta \\ -8 & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 3\gamma - 15\beta + 9a = 0$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & \beta \\ 2 & -8 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & \beta \\ -8 & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 2 & \gamma \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -2\gamma + 10\beta - 6a = 0$$

οπότε, από όλες τις παραπάνω ορίζουσες προκύπτει η εξίσωση

$$5\beta - \gamma - 3a = 0 \Leftrightarrow \gamma = 5\beta - 3a$$

οπότε το σύστημα έχει λύση αν

$$\gamma = 5\beta - 3a \Leftrightarrow \gamma = 5\beta - 3a.$$

Άσκηση 3.6

α) Το σύστημα γράφεται στη μορφή

$$AX = B,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 \\ k & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ k+1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 \\ k & 2 & 2 \end{vmatrix} = -k^2 + 3k - 2 = -(k-2)(k-1)$$

Άρα:

- Για $k \neq 1$ και $k \neq 2$, ισχύει

$$rank(A) = rank(A|B) = 3,$$

οπότε σύμφωνα με την πρόταση 3.13 το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

όπου

$$\begin{aligned} |A_1| &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k+1 & k & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}}{|A|} = 0 \\ |A_2| &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k+1 & 1 \\ k & 2 & 2 \end{bmatrix} = k(2-k) \\ |A_3| &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k+1 \\ k & 2 & 2 \end{bmatrix} = k-2 \end{aligned}$$

οπότε η λύση είναι

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{0}{-(k-2)(k-1)} = 0 \\ x_2 &= \frac{k(2-k)}{-(k-2)(k-1)} = \frac{k}{k-1} \\ x_3 &= \frac{k-2}{-(k-2)(k-1)} = \frac{1}{1-k}. \end{aligned}$$

- Για $k = 1$ η ορίζουσα του A είναι $|A| = 0$ και υπάρχει 3×3 ορίζουσα του επαυξημένου διάφορη του μηδενούς, η

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

οπότε $rank(A) \neq rank(A|B)$

και σύμφωνα με την πρόταση 3.13 το σύστημα δεν έχει λύση.

▸ Για $k = 2$ η ορίζουσα του πίνακα A είναι $|A| = 0$ και όλες οι 3×3 ορίζουσες του επαυξημένου είναι μηδέν. Επιπλέον, υπάρχει μια 2×2 ορίζουσα ενός υποπίνακα του A που είναι διάφορη του μηδενός, η

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 2.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.13, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (βρίσκουμε από τις δυο πρώτες εξισώσεις τα x_2, x_3 συναρτήσει του x_1)

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1 - x_1 \\ 2x_2 + x_3 &= 3 - 2x_1 \end{aligned}$$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$x_2 = 2 - x_1$$

και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση, προκύπτει το x_3

$$x_3 = -1$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_1 = \lambda$)

$$(x_1, x_2, x_3) = (\lambda, 2 - \lambda, -1), \quad \lambda \in R$$

Επομένως, το σύστημα έχει λύσεις για κάθε $k \neq 1$.
β) Το σύστημα γράφεται στη μορφή

$$AX = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & -1 \\ k & 1 & k \\ 3 & 3 & k \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ k-1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$|A| = -3k^2 + 3 = 3(1-k)(1+k).$$

Έτσι:

▸ Για $k \neq 1$ και $k \neq -1$ τότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 3$$

οπότε σύμφωνα με την πρόταση 3.13 το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \; x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \; x_3 = \frac{|A_3|}{|A|},$$

όπου

$$\begin{aligned} |A_1| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ k-1 & 1 & k \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix} = -k^2 + 3k - 4 \\ |A_2| &= \begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ k & k-1 & k \\ 3 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 - 3k^2 + 5k - 3 \\ |A_3| &= \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ k & 1 & k-1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3k^2 + 9k - 6 = -3(k-1)(k-2) \end{aligned}$$

οπότε η λύση είναι

$$x_1 = \frac{-k^2+3k-4}{3(1-k)(1+k)},\ x_2 = \frac{k^3-3k^2+5k-3}{3(1-k)(1+k)},\ x_3 = \frac{-3(k-1)(k-2)}{3(1-k)(1+k)} = \frac{k-2}{k+1}.$$

▸ Για $k = 1$, η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$|A| = 0$$

όπως και όλες οι 3×3 υποορίζουσες του επαυξημένου
Επίσης, μια 2×2 υποορίζουσα του πίνακα A που προκύπτει διαγράφοντας την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 2.$$

Επομένως, μπορούμε να βρούμε τους δυο αγνώστους συναρτήσει του τρίτου, π.χ τους x_2, x_3 συναρτήσει του x_1 από το σύστημα της δεύτερης και τρίτης εξίσωσης

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= -x_1 \\ 3x_2 + x_3 &= 1 - 3x_1 \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο εξισώσεις προκύπτει

$$-2x_2 = 2x_1 - 1 \ \Leftrightarrow\ x_2 = \frac{1}{2} - x_1$$

και αντικαθιστώντας το x_2 στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε

$$x_3 = -\frac{1}{2}$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_1 = \lambda$)

$$(x_1, x_2, x_3) = (\lambda, \frac{1}{2} - \lambda, -\frac{1}{2})$$

▸ Για $k = -1$, $|A| = 0$ και όλες οι 3×3 ορίζουσες του επαυξημένου είναι διάφορες του μηδενός ($rank(A) \neq rank(A|B)$), οπότε το σύστημα δεν έχει λύση.
Τελικά, το σύστημα έχει λύσεις για $k \neq -1$.

Άσκηση 3.7

α) Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή

$$AX = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Οι 4×4 ορίζουσες του πίνακα A και του επαυξημένου $(A|B)$ είναι μηδέν και μια 3×3 υποορίζουσα είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B) = 3.$$

Μπορούμε να βρούμε τα x, y, z συναρτήσει του w από το σύστημα της πρώτης, δεύτερης και τρίτης γραμμής (που αντιστοιχεί η παραπάνω μη μηδενική ορίζουσα)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 + w \\ 3x + 2y + z &= 1 + w \\ 2x + 3y + z &= 1 - w \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση επί -3 και προσθέτοντας στη δεύτερη προκύπτει

$$2y + 4z = 1 + w$$

Επιπλέον πολλαπλασιάζοντας την πρώτη επί -2 και προσθέτοντας στην τρίτη εξίσωση, προκύπτει

$$y + 5z = 1 + 3w$$

Έτσι, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} 2y + 4z &= 1 + w \\ y + 5z &= 1 + 3w \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη εξίσωση επί -2 και προσθέτοντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$z = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}w.$$

Αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση το z έχουμε

$$y = \frac{1}{6} - \frac{7}{6}w$$

και, αντικαθιστώντας τα z και y στην (i)

$$x = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}w$$

οπότε, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $w = k$)

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{7}{6} + \frac{17}{6}k,\ \frac{1}{6} - \frac{7}{6}k,\ \frac{1}{6} + \frac{5}{6}k,\ k\right).$$

β) Ο πίνακας A του συστήματος αυτού είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Όλες οι 4×4 ορίζουσες του πίνακα αυτού είναι μηδέν και η 3×3 ορίζουσα που προκύπτει από τις γραμμές 2,3,4 και τις στήλες 1,2,3 είναι

$$|A'| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

οπότε

$$rankA = 3.$$

Έτσι, βρίσκουμε τους 3 αγνωστους, a, β, γ, συναρτήσει του δ από τις εξισώσεις 2,3,4.

$$\begin{aligned} |A'_a| &= \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -\delta & 1 & -1 \\ -2\delta & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ |A'_\beta| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -\delta & -1 \\ 1 & -2\delta & 0 \end{vmatrix} = -2\delta \\ |A'_\gamma| &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta \\ 1 & -1 & -2\delta \end{vmatrix} = -3\delta \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} a &= \frac{|A'_a|}{|A'|} = 0 \\ \beta &= \frac{|A'_\beta|}{|A'|} = \frac{-2\delta}{-1} = 2\delta \\ \gamma &= \frac{|A'_\gamma|}{|A'|} = \frac{-3\delta}{-1} = 3\delta \end{aligned}$$

γ) Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή

$$AX = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Όλες οι 4×4 και 3×3 υποορίζουσες του πίνακα A και του επαυξημένου $(A|B)$ είναι μηδενικές. Όμως, υπάρχει 2×2 μη μηδενική υποορίζουσα του A, η

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = rank(A|B)$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 3.12 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες προκύπτουν λύνοντας τις δύο πρώτες εξισώσεις ως προς x_1, x_2.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -x_3 + x_4 + 1 \\ x_1 &= x_3 - x_4 + 2 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το x_1 στην πρώτη εξίσωση προκύπτει

$$x_2 = 3x_3 - 3x_4 + 3,$$

οπότε οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_3 = k$ και $x_4 = m$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (k - m + 2, 3k - 3m + 3, k, m), \quad k, m \in R$$

δ) Το σύστημα αυτό γράφεται

$$AX = B,$$

όπου
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Όλες οι 3×3 ορίζουσες του A είναι μηδέν και μια 2×2 υποορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

οπότε

$$rank(A) = 2 = rank(A|B)$$

(το σύστημα είναι ομογενές, οπότε έχει λύση)

Επομένως, μπορούμε να βρούμε τα x_1, x_2 συναρτήσει των x_2, x_3 από το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων

$$2x_1 - x_2 = x_4 - x_3$$
$$x_1 = x_3 - x_4$$

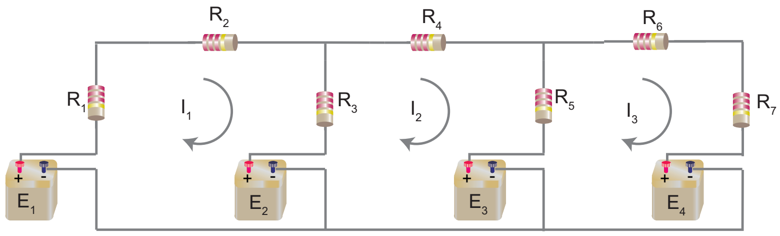
αντικαθιστώντας το x_1 στην πρώτη εξίσωση προκύπτει

$$x_2 = 3x_3 - 3x_4$$

οπότε, οι λύσεις του συστήματος είναι (θέτοντας $x_3 = k,\ x_4 = m$)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (k - m, 3k - 3m, k, m),\ k, m \in R$$

Άσκηση 3.9



Για τις τιμές αυτές από την δοσμένη σχέση προκύπτει το σύστημα σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος του πίνακα του συστήματος αυτού βρίσκεται με τον τρόπο της παρατ. 3.9 να είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

οπότε η μοναδική λύση του συστήματος αυτού είναι

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} &= A^{-1} \begin{bmatrix} 20 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 100 \\ -120 \\ -40 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε οι ζητούμενες τιμές των ρευμάτων είναι

$$I_1 = 4,76mA,\ I_2 = -5,71mA,\ I_3 = -1,90mA$$

(όταν σε μια σχέση σε ένα κύκλωμα η μονάδα αντίστασης είναι $K\Omega$ και της τάσης V, τότε η μονάδα έντασης ρεύματος είναι mA).

Άσκηση 3.10

α) Για να έχει το σύστημα τη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 1)$ πρέπει

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + \beta(-1) + \gamma \cdot 1 = 0 \\ a \cdot 1 + 2(-1) - \gamma \cdot 1 = 1 \\ 3 \cdot 1 - \beta(-1) + \gamma \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} a - \beta + \gamma = 0 \\ a - \gamma = 3 \\ \beta + \gamma \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Από τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση προκύπτει

$$a = 3 + \gamma$$

$$\beta = -\gamma,$$

οπότε αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση προκύπτει

$$3 + \gamma - (-\gamma) + \gamma = 0 \;\Leftrightarrow\; 3\gamma + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \gamma = -1.$$

Έτσι

$$a = 3 - 1 = 2$$

$$\beta = -(-1) = 1,$$

οπότε για να έχει το σύστημα τη λύση πρέπει

$$a = 2,\ \beta = 1 \text{ και } \gamma = -1.$$

β) Για τις τιμές αυτές το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος αυτού είναι (με τον τρόπο του Ορισμού 3.11)

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 11$$

οπότε η λύση $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 1)$ είναι μοναδική λύση του συστήματος αυτού.

Ἀσκηση 3.13

Αν
$$\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{\beta} + z\vec{\gamma}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 10 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ή
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -2x \\ 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3y \\ -7y \\ 10y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2z \\ z \\ 9z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y + 2z \\ -2x - 7y + z \\ 3x + 10y + 9z \end{bmatrix}$$

Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή
$$AX = B$$

όπου
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -7 & 1 \\ 3 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

ο πινακας του συστήματος, του οποίου ο αντίστροφος υπολογίζεται με τον γνωστό τρόπο
$$A^{-1} = \frac{1}{-8}\begin{bmatrix} 73 & -7 & 17 \\ 21 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

οπότε η λύση του συστήματος αυτού είναι
$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -73 & 7 & -17 \\ -21 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Άρα
$$x = 4, \quad y = -2 \text{ και } z = 3,$$
οπότε
$$\vec{u} = 4\vec{a} - 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}.$$

Άσκηση 3.14

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 0 \\ -8 & 20 & -6 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{184} \begin{bmatrix} 44 & 32 & 48 \\ 32 & 40 & 60 \\ 48 & 60 & 136 \end{bmatrix} = \frac{1}{46} \begin{bmatrix} 11 & 8 & 12 \\ 8 & 10 & 15 \\ 12 & 15 & 34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} &= \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{46} \begin{bmatrix} 11 & 8 & 12 \\ 8 & 10 & 15 \\ 12 & 15 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1,96 \\ 1,20 \\ 3,04 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άσκηση 3.15

Επειδή
$$det(\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -88 \neq 0$$

τα διανυσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε το διάνυσμα $\vec{u}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τους,

$$\vec{u} = k\vec{a} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma}, \quad k, \lambda, \mu \in R.$$

Χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{a}$, $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ η σχέση αυτή γίνεται

$$(28, -10, -3) = k(2, 4, 1) + \lambda(-3, 5, 0) + \mu(5, -1, -3)$$

ή
$$(28, -10, -3) = (2k - 3\lambda + 5\mu, 4k + 5\lambda - \mu, k - 3\mu).$$

Η διανυσματική αυτή ισότητα ισοδυναμεί με το σύστημα

$$\begin{aligned} 2k - 3\lambda + 5\mu &= 28 \\ 4k + 5\lambda - \mu &= -10 \\ k - 3\mu &= -3, \end{aligned}$$

από τη λύση του οποίου προκύπτει

$$k = 3,\ \lambda = -4,\ \mu = 2.$$

Συνεπώς,
$$\vec{u} = 3\vec{a} - 4\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}.$$