

## 8.12 Κβαντομηχανική

Στην Κβαντομηχανική, έναν από τους θεμελιώδεις τομείς της σύγχρονης Φυσικής, που αποτελεί ουσιαστικά τη φυσική του μικρόκοσμου, τα φυσικά μεγέθη παριστάνονται με γραμμικούς τελεστές στο διανυσματικό χώρο των κυματοσυναρτήσεων. Επομένως, η Γραμμική Άλγεβρα είναι απαραίτητη σε όποιον θέλει να ασχοληθεί, έστω και στοιχειωδώς, με την Κβαντομηχανική, αφού ακόμα και τα αξιώματά της περιέχουν αρκετές έννοιες Γραμμικής Άλγεβρας.

Στην κβαντική θεωρία του σπιν φερμιονίων η κατάσταση ενός σωματιδίου (π.χ ηλεκτρονίου) περιγράφεται από ένα διάνυσμα-στήλη δύο μιγαδικών αριθμών

$$X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \quad \text{με } |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

και οι τελεστές των αντίστοιχων φυσικών μεγεθών είναι γραμμικές απεικονίσεις στο διανυσματικό χώρο  $\mathbb{C}^2$  και παριστάνονται από  $2 \times 2$  πίνακες με μιγαδικά στοιχεία. Οι πίνακες των τελεστών των συνιστωσών του σπιν (ή τελεστών pauli) είναι

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Χρησιμοποιούνται επίσης οι τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης

$$\sigma_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

Η εικόνα ενός διανύσματος  $X$  για έναν σπιν-τελεστή  $s$ , που συμβολίζεται με  $sX$ , είναι το γινόμενο του αντίστοιχου πίνακα επί το διάνυσμα-στήλη κυματοσυνάρτηση. Για παράδειγμα, για ένα φερμιόνιο με σπιν κυματοσυνάρτηση

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

οι ποσότητες αυτές είναι

$$\begin{aligned} \sigma_1 X &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \sigma_2 X &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -i\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \sigma_3 X &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 8.42** α) Να δείχθεί ότι:

$$\sigma_+ X_+ = \vec{0}, \quad \sigma_+ X_- = X_+, \quad \sigma_- X_+ = X_-, \quad \sigma_- X_- = \vec{0},$$

όπου

$$X_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X_- = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

β) Ναδειχθεί ότι για τους τελεστές του σπιν (8.4) ισχύει:

$$i) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 3I,$$

όπου  $I$  η ταυτοτική απεικόνιση ( $IX = X$ , για κάθε  $X$ ).

$$ii) \quad \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = \mathbf{0}, \quad i \neq j,$$

όπου  $\mathbf{0}$  η μηδενική απεικόνιση ( $\mathbf{0}X = \vec{0}$ , για κάθε  $X$ ).

### Λύση

α) Σύμφωνα με την (8.5), οι εικόνες των διανυσμάτων  $X_+$  και  $X_-$  για τους τελεστές  $\sigma_+$  και  $\sigma_-$  είναι

$$\begin{aligned} \sigma_+ X_+ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0} \\ \sigma_+ X_- &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = X_+ \\ \sigma_- X_+ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = X_- \\ \sigma_- X_- &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0} \end{aligned}$$

β)  $i)$  Επίσης, σύμφωνα με την (8.4) οι πίνακες  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$  είναι

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \sigma_2^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \sigma_3^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε ο πίνακας του τελεστή  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$  είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 3I_2,$$

όπου  $I_2$  ο  $2 \times 2$  μοναδιαίος πίνακας. Επομένως

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 3I,$$

όπου  $I$  η ταυτοτική απεικόνιση ( $IX = X$ , για κάθε  $X$ ).

$ii)$  Θα δείξουμε τη σχέση για  $i = 1$  και  $j = 2$ .

Σύμφωνα με την (8.4), ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης  $\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1$  είναι

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε

$$\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 = \mathbf{0},$$

όπου  $\mathbf{0}$  η μηδενική απεικόνιση.

Όμοια γίνεται η απόδειξη και για τις άλλες περιπτώσεις.

Αν και παράξενη, αυτή είναι η γλώσσα της Κβαντομηχανικής, η οποία είναι η μοναδική θεωρία Φυσικής που ερμηνεύει τα φαινόμενα του μικρόκοσμου.

Στην Κβαντομηχανική η έννοια των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων είναι πολύ βασική. Οι δυνατές τιμές που προκύπτουν από τη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους (π.χ ενέργεια, ορμή, στροφορμή) είναι οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου τελεστή (γραμμική απεικόνιση) και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα αντιστοιχούν σε καταστάσεις στις οποίες μία μέτρηση του μεγέθους αυτού για το σωματίδιο δίνει την αντίστοιχη ιδιοτιμή και τις ονομάζουμε **ιδιοκαταστάσεις**.

Στη θεωρία του σπιν φερμιονίων, οι μετρούμενες τιμές ενός φυσικού μεγέθους είναι οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα  $2 \times 2$ .

**Παράδειγμα.** Οι δυνατές τιμές της ενέργειας ενός φερμιονίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$  είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή της ενέργειας

$$\hat{H} = cB_0\sigma_3 = cB_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad c \text{ σταθερά}$$

του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$P_H(\lambda) = (cB_0 - \lambda)(-cB_0 - \lambda)$$

οπότε οι δυνατές τιμές της ενέργειας του φερμιονίου είναι (ιδιοτιμές του  $\hat{H}$ )

$$\lambda = cB_0 \quad \text{και} \quad \lambda = -cB_0.$$

**Παράδειγμα 8.43** Να βρεθούν οι δυνατές τιμές της ενέργειας ενός ηλεκτρονίου που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = B_0 \hat{x}_0$ , οπότε ο τελεστής ενέργειάς του είναι

$$\hat{H} = cB_0\sigma_1 = cB_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad c \text{ σταθερά}$$

και οι αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις.

### Λύση

Οι δυνατές τιμές της ενέργειας του ηλεκτρονίου είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή ενέργειας, οι οποίες είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\begin{aligned} |H - \lambda I| = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & cB_0 \\ cB_0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (cB_0)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = cB_0 \quad \text{ή} \quad \lambda = -cB_0 \end{aligned}$$

Η αντίστοιχη της ιδιοτιμής  $\lambda_1 = cB_0$  ιδιοκατάσταση

$$X = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad u_1^2 + u_2^2 = 1$$

προκύπτει από το σύστημα

$$\begin{aligned} \hat{H}X = \lambda_1 X &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & cB_0 \\ cB_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = cB_0 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} cB_0 u_2 \\ cB_0 u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cB_0 u_1 \\ cB_0 u_2 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow cB_0 u_1 = cB_0 u_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2 \end{aligned}$$

οπότε, λόγω και του ότι  $u_1^2 + u_2^2 = 1$ ,

$$u_1 = u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

και η αντίστοιχη ιδιοκατάσταση είναι  $X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Όμοια προκύπτει ότι η αντίστοιχη της ιδιοτιμής  $\lambda_2 = -cB_0$  ιδιοκατάσταση είναι  $X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

## 8.13 Εφαρμογές με Matlab

Με τη βοήθεια των εντολών για πράξεις πινάκων που δίνονται στην Ενότητα 14.5 μπορούμε να απαντήσουμε εύκολα ερωτήματα όπως στο επόμενο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 8.44** Να βρεθεί ο τύπος της γραμμικής απεικόνισης

$$f: R^3 \rightarrow R^2 \quad f(x, y, z) = (x - y, x + z), \quad x, y, z \in R$$

ως προς τις βάσεις

$$\vec{e}'_1 = (0, 1, 0), \quad \vec{e}'_2 = (1, 0, -1), \quad \vec{e}'_3 = (0, 1, 1) \text{ του } R^3$$

και

$$\vec{e}_1 = (1, 1), \quad \vec{e}_2 = (1, 0) \text{ του } R^2.$$

### Λύση

Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης  $f$  ως προς τις συνήθεις βάσεις των  $R^3$  και  $R^2$  είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και οι πίνακες μετάβασης από τις κανονικές βάσεις των  $R^3$  και  $R^2$  στις βάσεις  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$  και  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  του είναι

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 6.20 ο πίνακας της  $f$  ως προς τις βάσεις αυτές είναι

$$B = Q^{-1}AP.$$

Έτσι χρησιμοποιούμε τις εντολές

```
A=[1 -1 0; 1 0 1];
P=[0 1 0; 1 0 1; 0 -1 1];
Q=[1 1; 1 0];
Qinv=inv(Q);
B=Qinv*A*P;
disp(B)
```

από την εκτέλεση των οποίων προκύπτει:

```
B =
     0     0     1
    -1     1    -2
```

Άρα, ο τύπος της  $f$  ως προς τις βάσεις αυτές είναι

$$f(x', y', z') = (z', -x' + y' - 2z').$$

Οι ιδιοτιμές ενός πίνακα  $a$  (που έχει εισαχθεί με τον γνωστό τρόπο) στο Matlab προκύπτουν με την εντολή

$$\text{eig}(a)$$

που δίνει τις ιδιοτιμές στον πίνακα  $d$ . Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $v_i$  προκύπτουν από τη λύση των συστημάτων

$$av_i = d(i)v_i,$$

που μπορεί να γίνει με τις εντολές του επόμενου παραδείγματος (βλ. Ενότητα 14.5).

**Παράδειγμα** Οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

προκύπτουν με τις εντολές

```
a = [5 1 2; 0 3 0; 2 1 5];
syms x y z;
v=[x;y;z];
d=eig(a);
n=size(d);
for i=1:n
u=solve(a*v-d(i)*v);
disp('')
sprintf('eigenvalue:%f', d(i))
sprintf('eigenvectors: (%s,%s,%s)', char(u.x), char(u.y), char(u.z))
end
```

Από την εκτέλεση προκύπτει:

```
eigenvalue: 7
eigenvectors: (z1,0,z1)
eigenvalue: 3.0000
eigenvectors: (- z2/2 - z3,z2,z3)
eigenvalue: 3.0000
eigenvectors: (- z2/2 - z4,z2,z4)
```

Από την εκτέλεση αυτή προκύπτει ότι ο πίνακας αυτός έχει:

- Την απλή ιδιοτιμή  $d_1 = 7$  με αντίστοιχο ιδιοχώρο

$$V(7) = \{z_1(1, 0, 1), z_1 \in R\} = \text{span}(1, 0, 1).$$

- Τη διπλή ιδιοτιμή  $d_2 = d_3 = 3$  με αντίστοιχο ιδιοχώρο

$$\begin{aligned} V(3) &= \left\{ \left( -\frac{z_2}{2} - z_4, z_2, z_4 \right) = \frac{z_2}{2}(-1, 2, 0) + z_4(-1, 0, 1), z_2, z_4 \in R \right\} \\ &= \text{span} [(-1, 2, 0), (-1, 0, 1)]. \end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές και τα μοναδιαία (μέτρου μονάδας) ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα  $a$  προκύπτουν με την εντολή

$$[V, D] = \text{eig}(a)$$

η οποία δίνει ως πίνακα  $D$  το διαγώνιο πίνακα που έχει στην διαγώνιο τις ιδιοτιμές και ως πίνακα  $V$  τον πίνακα που έχει ως στήλες τα αντίστοιχα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα, οπότε

$$D = V^{-1}aV.$$

**Παράδειγμα** Οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $a$  του προηγούμενου παραδείγματος προκύπτουν με τις εντολές

```
a = [5 1 2; 0 3 0; 2 1 5];
[V,D]=eig(a)
```

Από την εκτέλεση προκύπτει:

```

V =
    0.7071   -0.7071   -0.0129
         0         0    0.8994
    0.7071    0.7071   -0.4369
D =
    7.0000         0         0
         0    3.0000         0
         0         0    3.0000

```

Με τις εντολές

```

vinv=inv(V)
q=vinv*a*V

```

από την εκτέλεση των οποίων προκύπτει:

```

vinv=
    0.7071    0.3536    0.7071
   -0.7071    0.3333    0.7071
         0    1.1118         0
q =
    7.0000         0         0
         0    3.0000         0
         0         0    3.0000

```

επαληθεύουμε ότι  $D = V^{-1}aV$ .

**Παράδειγμα 8.45** Οι αβαρείς ράβδοι AB και ΓΔ του Σχήματος 8.22 είναι πακτωμένες στα άκρα τους A και Δ, φέρουν σημειακά φορτία  $m_1 = 650 \text{ kg}$  και  $m_2 = 480 \text{ kg}$  στα άκρα τους B και Γ και συνδέονται με ελατήριο σταθεράς  $k = 2 \text{ kN/m}$ . Αν οι πίνακες δυσκαμψίας και μάζας του συστήματος είναι

$$K = \begin{bmatrix} 932,81 & -2000 \\ -2000 & 596,3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

να βρεθούν:

α) Οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$  και οι αντίστοιχες ιδιομορφές  $\vec{\varphi}_i$ , για τις οποίες

$$(K - \omega^2 M)\vec{\varphi}_i = 0 \quad (i)$$

όπου το δεύτερο στοιχείο των ιδιομορφών να είναι μονάδα.

β) Οι συντελεστές διέγερσης  $L_i$ , που ορίζονται ως

$$L_i = \vec{\varphi}_i^T M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (ii)$$

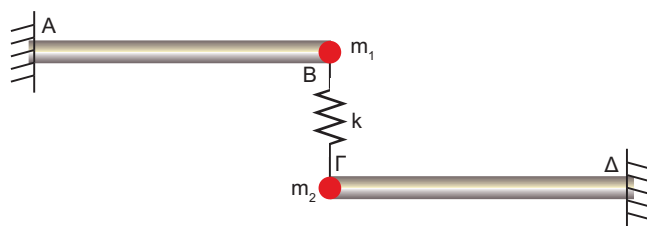
γ) Οι γενικευμένες μάζες  $m_i^*$ , που ορίζονται ως

$$m_i^* = \vec{\varphi}_i^T M \vec{\varphi}_i. \quad (iii)$$

δ) Ο πίνακας ενεργών δυσκαμψιών  $K^*$ , που ορίζεται ως

$$K^* = \Phi^T M \Phi, \quad (iv)$$

όπου  $\Phi$  πίνακας που έχει ως στήλες τις παραπάνω ιδιομορφές  $\vec{\varphi}_i$ .



**Σχήμα 8.22** Το σύστημα του Παραδείγματος 8.45

## Λύση

Αφού ορίσουμε τις συμβολικές μεταβλητές και αποθηκεύσουμε τα δεδομένα σε μεταβλητές:

- ▶ Λύνουμε την εξίσωση

$$\det(K - qM) = 0, \quad \text{όπου } q = \omega^2$$

από την οποία προκύπτουν οι τιμές του  $q$  και οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες  $\omega = \sqrt{q}$ .

- ▶ Στη συνέχεια, για κάθε τιμή  $q_i$  που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση λύνουμε το αντίστοιχο σύστημα  $(K - q_i M)\tilde{\varphi}_i = 0$ , (το οποίο είναι αόριστο) θέτοντας μονάδα το δεύτερο στοιχείο κάθε ιδιομορφής  $\tilde{\varphi}_i$ .

- ▶ Κατόπιν, υπολογίζουμε τους συντελεστές διέγερσης, τις γενικευμένες μάζες και τον πίνακα ενεργών δυσκαμψιών από τις  $(ii) - (iv)$ .

```
% dedomena
m1=650;
m2=480;
M=diag([m1 m2]);
K=[932.81 -200; -200 596.3];
% (a)
syms f1 f2 x real
syms q positive
% euresh idiosyxnothtvn kai idiomorfvn
rrr=det(K-q*M);
idiosyxq=solve(rrr);
n=length(idiosyxq);
idiosywx=idiosyxq.1/2);
for i=1:n
A=K-idiosyxq(i)*M;
B=A*[f1 f2]';
s=solve(B(1),B(2));
s1=s.f1;
s11=subs(s1,x,1);
f=[s11 1]';
F(:,i)=f;
sprintf('\n Idiosyxnothta w%d=%f',i,eval(idiosywx(i)))
sprintf('\n Idiomorfh f%d=(%f,1)',i,s11)
end
% (b)
for i=1:n
f=F(:,i)';
I=[1 1]';
L=f*M*I;
sprintf('\n Syntelesths diegershs L%d=%f',i,L)
end
% (c)
for i=1:n
f=F(:,i);
m=f'*M*f;
sprintf('\n Genikeymenh maza m%d*=%f',i,m)
end
% (d)
DysK=F'*M*F;
disp('K*=' )
disp(DysK)
```

Από την εκτέλεση του προγράμματος αυτού προκύπτει

```

Idiosyxnothta w1=1.307478
Idiomorphh f1=(-1.121299,1)
Idiosyxnothta w2=0.983811
Idiomorphh f2=(0.658577,1)
Syntelesths diegershs L1=-248.844090
Syntelesths diegershs L2=908.075090
Genikeymenh maza m1*=1297.251859
Genikeymenh maza m2*=761.920436
K*=
1.0e+03 *
1.2973 0.0000
0.0000 0.7619

```

**Παράδειγμα 8.46** Οι δυσκαμψίες των αβαρών ράβδων του Σχήματος 8.23, που είναι πακτωμένες στα άκρα τους A και E, είναι

$$k_1 = 4220 \text{ kN/m}, \quad k_2 = 13010 \text{ kN/m} \quad \text{και} \quad k_3 = 16920 \text{ kN/m}.$$

Επίσης, οι ράβδοι φέρουν σημειακά φορτία  $m_1 = 7,6 \text{ tn}$ ,  $m_2 = 5,1 \text{ tn}$  και  $m_3 = 8,2 \text{ tn}$  στα άκρα τους B, Γ και Δ και συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς  $k_0 = 17220 \text{ kN/m}$ . Αν οι πίνακες δυσκαμψίας και μάζας του συστήματος είναι

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_0 + k_2 & -k_0 \\ 0 & -k_0 & k_0 + k_3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν:

α) Οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$  και οι αντίστοιχες ιδιομορφές  $\vec{\varphi}_i$ , για τις οποίες

$$(K - \omega^2 M) \vec{\varphi}_i = 0 \quad (i)$$

όπου το τρίτο στοιχείο κάθε ιδιομορφής να είναι μονάδα.

β) Οι συντελεστές διέγερσης  $L_i$ , που ορίζονται ως

$$L_i = \vec{\varphi}_i^T M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

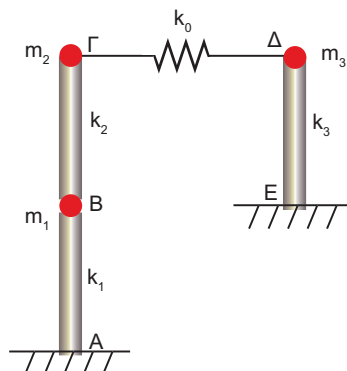
γ) Οι γενικευμένες μάζες  $m_i^*$ , που ορίζονται ως

$$m_i^* = \vec{\varphi}_i^T M \vec{\varphi}_i.$$

δ) Ο πίνακας ενεργών δυσκαμψιών  $K^*$ , που ορίζεται ως

$$K^* = \Phi^T M \Phi,$$

όπου  $\Phi$  πίνακας που έχει ως στήλες τις παραπάνω ιδιομορφές  $\vec{\varphi}_i$ .



**Σχήμα 8.23** Το σύστημα του Παραδείγματος 8.46



## Λύση

Αν χρησιμοποιήσουμε την διαδικασία του προγράμματος του Παραδείγματος 8.45 δε προκύπτει λύση του αόριστου συστήματος (i). Αυτό οφείλεται στο ότι οι ιδιοτιμές στην περίπτωση αυτή είναι άρρητες και για τη λύση του συστήματος χρησιμοποιείται η δεκαδική τους προσέγγιση. Αυτό δημιουργεί υπολογιστική αριθμητική αστάθεια αντίστοιχη της απροσδιοριστίας  $\frac{0}{0}$ . Όμως, σύμφωνα με την Ενότητα 3.6, για να λύσουμε αυτό το σύστημα αρκεί να λύσουμε δύο από τις εξισώσεις του (π.χ. την πρώτη και δεύτερη) ως προς δύο αγνώστους (π.χ.  $f1$  και  $f2$ ) δίνοντας στον τρίτο άγνωστο ( $f3$ ) μία τιμή (π.χ.  $f3 = 1$ ). Έτσι, τα ερωτήματα του παραδείγματος απαντώνται με το παρακάτω πρόγραμμα.

```
syms f1 f2 f3 real
syms q positive
k0= 5220;
k1=4220;
k2= 3010;
k3= 6920;
m1=7096;
m2=5100;
m3=8632;
K=[k1+k2 -k2 0; -k2 k0+k2 -k0; 0 -k0 k0+k3];
M=diag([m1 m2 m3]);
% (a)
ideosyxq=solve(det(K-q*M));
ideosyqw=ideosyxq.1/2;
n=length(idiosyxq);
% ypologismos idiomorfwn
for i=1:n
A=K-ideosyxq(i)*M;
B=A*[f1 f2 f3]';
[ff1 ff2]=solve(B(1),B(2),f1,f2);
f3=1;
ff1=eval(ff1);
ff2=eval(ff2);
F(:,i)=[ff1 ff2 f3];
sprintf('\n Idiomorfh f%d=(%f %f %f)',i,ff1,ff2,f3)
sprintf('\n Idiosyxnothta w%d=%f',i,eval(idiosyxq(i)))
end
% (b)
for i=1:n
f=F(:,i)';
I=[1 1 1]';
L=f*M*I;
sprintf('\n Syntelesths diegershs L%d=%f',i,L)
end
% (c)
for i=1:n
f=F(:,i);
m=f'*M*f;
sprintf('\n Genikeymenh maza m%d*=%f',i,m)
end
% (d)
DysK=F'*M*F;
disp('K*=' )
disp(DysK)
```

από τη λύση του οποίου προκύπτει

```
Syntelesths diegershs L3=9508.314243
Genikeymenh maza m1*=20822.372837
Genikeymenh maza m2*=23259.036962
Genikeymenh maza m3*=10741.849398
K*=
1.0e+04 *
2.0822 0.0268 0.3662
0.0268 2.3259 1.1179
0.3662 1.1179 1.0742
```

## 8.14 Εφαρμογές στη ρομποτική

Στις ρομποτικές εφαρμογές διάφορα στελέχη κινούνται στο χώρο με τη βοήθεια κάποιου μηχανισμού, οπότε το πρώτο πράγμα που είναι απαραίτητο είναι ο καθορισμός της θέσης και του προσανατολισμού κάθε στελέχους με τη βοήθεια ενός συστήματος συντεταγμένων. Η αλλαγή της θέσης και του προσανατολισμού ενός στελέχους γίνεται με τη βοήθεια πινάκων, που παριστάνουν γραμμικές απεικονίσεις, όπως η μεταφορά και η στροφή.

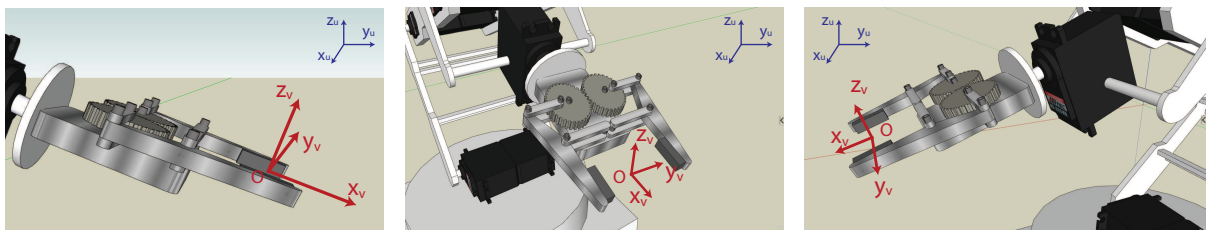
### Καθορισμός θέσης και προσανατολισμού

Ο προσανατολισμός της θέσης και του προσανατολισμού ενός στελέχους γίνεται με τη βοήθεια ενός ακίνητου συστήματος αναφοράς  $Oxyz$ . Έχοντας ορίσει ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς  $U Oxyz$ , η θέση ενός σημείου  $A$  ενός στελέχους καθορίζεται από το διάνυσμα θέσης του ως προς το  $U$ ,

$$\vec{r}_U = \vec{OA} = \begin{bmatrix} x_U^A \\ y_U^A \\ z_U^A \end{bmatrix}$$

Για να καθορίσουμε τη θέση ενός στελέχους στο χώρο δεν αρκεί, βεβαίως, ο καθορισμός της θέσης του σημείου  $A$ , καθώς το  $A$  μπορεί να βρίσκεται σε μία δεδομένη θέση για άπειρους προσανατολισμούς του στελέχους, αλλά απαιτείται και ο προσανατολισμός του, του οποίου ο καθορισμός δίνεται στη συνέχεια.

Αν προσαρτήσουμε στο στέλεχος ένα σύστημα αναφοράς  $V$ , τότε ο προσανατολισμός του μπορεί να καθοριστεί από τις συντεταγμένες, ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς  $U$ , των μοναδιαίων διανυσμάτων κατά μήκος των αξόνων του συστήματος αναφοράς  $V$  (βλ. Σχήμα 8.24) δηλαδή από μία γραμμική απεικόνιση που παριστάνεται από έναν πίνακα  $3 \times 3$  (πίνακα στροφής του συστήματος αναφοράς ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς  $U$ ) με στήλες τις συντεταγμένες των μοναδιαίων διανυσμάτων του συστήματος αναφοράς  $V$  ως προς το σύστημα αναφοράς  $U$ .



**Σχήμα 8.24** Προσαρτημένο σύστημα αναφοράς ρομποτικού στελέχους

**Παρατήρηση 8.10** Για τον προσδιορισμό της θέσης και του προσανατολισμού ενός αντικειμένου στον χώρο ορίζουμε την έννοια του αντίστοιχου **πλαίσιου**  $V$ , ως ένα σύνολο 4 διανυσμάτων, τα οποία είναι:

- ▶ το διάνυσμα θέσης, ως προς ένα ακίνητο πλαίσιο αναφοράς, ενός σημείου του αντικειμένου,
- ▶ ένας πίνακας  $3 \times 3$  που έχει ως στήλες τις συντεταγμένες, ως προς το πλαίσιο αναφοράς  $U$ , των διανυσμάτων κατά μήκος των αξόνων του προσαρμοσμένου στο αντικείμενο καρτεσιανού συστήματος αναφοράς  $V$  και λέγεται **πίνακας στροφής** του πλαισίου  $V$  ως προς το πλαίσιο  $U$  ή **πίνακας προσανατολισμού** του πλαισίου  $V$  ως προς το πλαίσιο  $U$ .

Με τον ίδιο τρόπο γίνεται η περιγραφή της θέσης και του προσανατολισμού του προσαρμοσμένου συστήματος αναφοράς ενός στελέχους σε μία θέση  $B$  ως προς τη θέση και τον προσανατολισμό του σε μία άλλη θέση  $A$  ή με άλλα λόγια η περιγραφή ενός πλαισίου σε σχέση με ένα άλλο πλαίσιο.

Από τον ορισμό του πίνακα στροφής προκύπτει ότι:

**Παρατήρηση 8.11** Σε μία **στροφή** κάθε σημείο  $M$  ως προς ένα πλαίσιο  $A$  μετατοπίζεται στο σημείο  $M'$ , όπου

$$\vec{r}'_A = R \vec{r}_A,$$

$R$  ο πίνακας της στροφής και  $\vec{r}_A, \vec{r}'_A$  οι πίνακες-στήλη των συντεταγμένων των σημείων  $M$  και  $M'$  στο σύστημα αναφοράς  $A$ .

Ονομάζουμε **μεταφορά** στον χώρο τη μετατόπισή κάθε σημείου κατά το μήκος και τη διεύθυνση ενός δεδομένου διανύσματος.

Σε μία μεταφορά κατά το διάνυσμα (πίνακας-στήλη) ένα σημείο  $M$  μετατοπίζεται στο σημείο  $M'$ , όπου

$$\vec{r}'_A = \vec{d} + \vec{r}_A$$

και  $\vec{r}_A, \vec{r}'_A$  οι πίνακες-στήλη των συντεταγμένων των σημείων  $M$  και  $M'$  στο σύστημα αναφοράς  $A$ .

Επίσης από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

**Παρατήρηση 8.12** Σε μία μεταφορά και στροφή ένα σημείο  $M$  με συντεταγμένες  $x_A$  ως προς ένα πλαίσιο  $A$  μετατοπίζεται στο σημείο  $M'$  όπου

$$\vec{r}'_A = \vec{d} + R \vec{r}_A$$

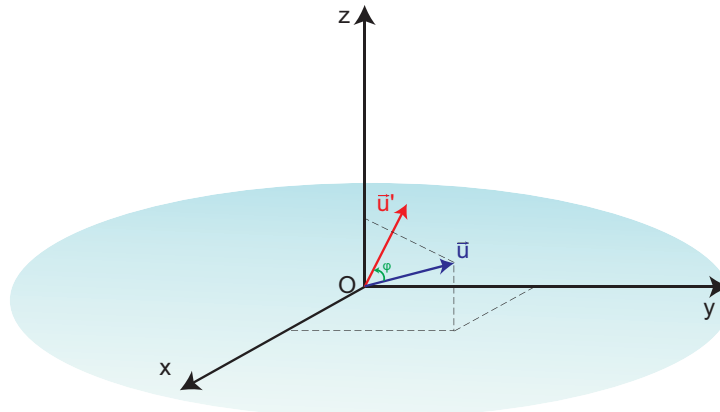
και  $\vec{d}$  το διάνυσμα (πίνακας-στήλη) κατά το οποίο γίνεται η μεταφορά,  $R$  ο πίνακας της στροφής και  $\vec{r}_A, \vec{r}'_A$  τα διανύσματα-στήλη των συντεταγμένων του σημείου  $M$  και  $M'$  ως προς το πλαίσιο αναφοράς  $A$ .

Από την Ενότητα 5.5 προκύπτει:

**Παρατήρηση 8.13** Το γινόμενο ενός πίνακα στροφής  $R$  με ένα διάνυσμα  $\vec{u}$  του χώρου είναι το διάνυσμα  $\vec{u}'$  που προκύπτει από τη δεδομένη στροφή του  $\vec{u}$ ,

$$\vec{u}' = R \vec{u}$$

Δηλαδή, ο πίνακας στροφής  $R$  ενός πλαισίου  $A$ , ως προς ένα άλλο πλαίσιο  $B$ , στρέφει με τον ίδιο τρόπο κάθε διάνυσμα του χώρου.



Σχήμα 8.25 Στροφή διανυσμάτων

Επίσης ισχύει

**Παρατήρηση 8.14** Αν ένα διάνυσμα ή πλαίσιο υποστεί δύο διαδοχικές στροφές που εκφράζονται από τους πίνακες  $R_1$  και  $R_2$ , τότε η θέση του ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς δίνεται από τον πίνακα

$$R = R_2 R_1.$$

Συνοψίζοντας:

**Παρατήρηση 8.15** Η θέση και ο προσανατολισμός ενός αντικειμένου, ως προς ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς  $U$ , αποτελούν ένα **πλαίσιο**  $V$  που περιγράφεται από:

- το διάνυσμα θέσης  $\vec{P}_0$  ενός δεδομένου σημείου του αντικειμένου, ως προς την αρχή του ακίνητου συστήματος αναφοράς  $U$ ,
- έναν πίνακα  ${}^V_U R = [r_{ij}]$  που λέγεται **πίνακας στροφής** του συστήματος αναφοράς  $V$  ως προς το σύστημα αναφοράς  $U$ , του οποίου τα στοιχεία είναι

$$r_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j \quad (8.6)$$

όπου  $\hat{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων του ακίνητου συστήματος αναφοράς  $U$  και  $\hat{e}'_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων του προσαρτημένου στο αντικείμενο συστήματος  $V$ . Δηλαδή, ο πίνακας  $R$  έχει ως στήλες τις συντεταγμένες ως προς το  $U$  των μοναδιαίων διανυσμάτων του  $V$ . Λόγω των παραπάνω, για το πλαίσιο  $V$  χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$V = \{ \vec{P}_0, {}^V_U R \},$$

όπου  $\vec{P}_0$  το διάνυσμα θέσης της αρχής του συστήματος αναφοράς ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς.

Όμοια, η θέση και ο προσανατολισμός ενός πλαισίου  $B$  ως προς ένα άλλο πλαίσιο  $A$  περιγράφεται από:

- το διάνυσμα θέσης  $\vec{p}_0$ , ως προς το  $A$ , ενός σημείου του  $B$ , π.χ. της αρχής του προσαρτημένου συστήματος αναφοράς,
- τον πίνακα στροφής  ${}^A_B R$  του προσαρτημένου στο  $B$  συστήματος αναφοράς ως προς το σύστημα αναφοράς του πλαισίου  $A$ .

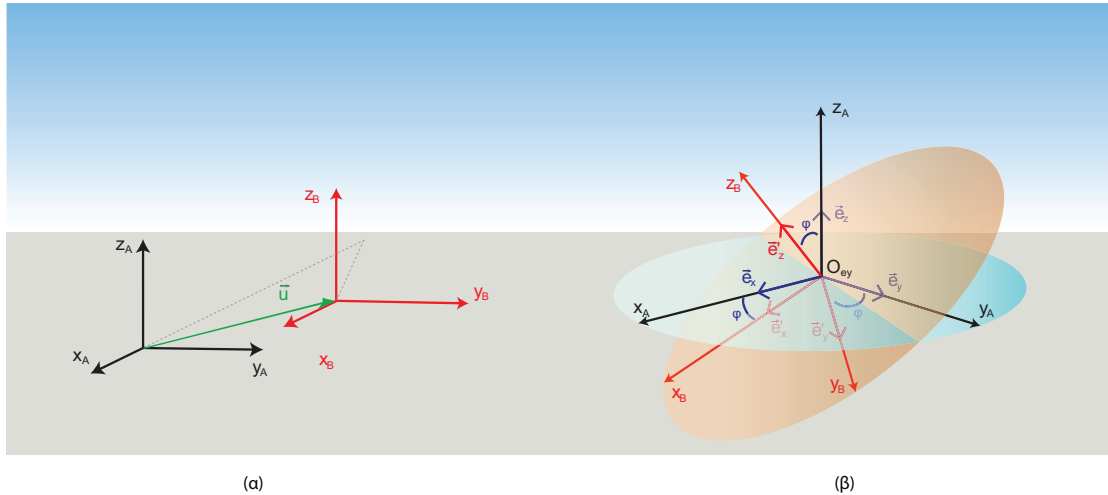
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το πλαίσιο  $B$  προκύπτει από πλαίσιο  $A$  με μεταφορά κατά το διάνυσμα  $\vec{p}_0$  και στροφή κατά τον πίνακα  ${}^A_B R$ .

Οι πίνακες στροφής είναι ορθογώνιοι πίνακες (ως πίνακες μετάβασης μεταξύ ορθογώνιων βάσεων, βλ.

Ενότητα 11.2), οπότε ο αντίστροφος ενός πίνακα στροφής είναι ο ανάστροφός του. Αυτό σημαίνει ότι:

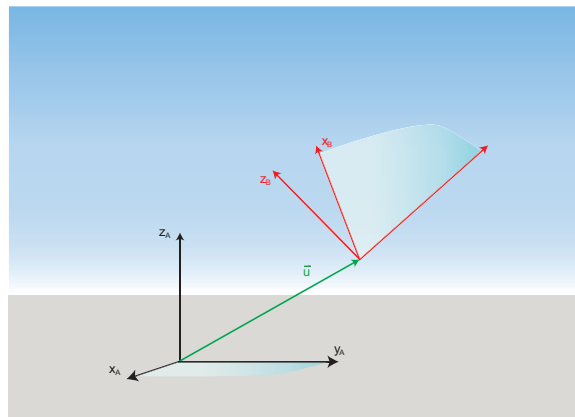
**Παρατήρηση 8.16** Ο προσανατολισμός ενός πλαισίου  $B$  ως προς ένα πλαίσιο  $A$  περιγράφεται από τον ανάστροφο του πίνακα του προσανατολισμού του πλαισίου  $A$  ως προς το πλαίσιο  $B$ .

- Το πλαίσιο  $B$  του Σχήματος 8.26 προκύπτει από στροφή του πλαισίου  $A$ .



**Σχήμα 8.26** Το πλαίσιο  $B$  προκύπτει από στροφή του πλαισίου  $A$ .

- Το πλαίσιο  $B$  του Σχήματος 8.27 προκύπτει από μετατόπιση και στροφή του πλαισίου  $A$ .



**Σχήμα 8.27** Το πλαίσιο  $B$  προκύπτει από μετατόπιση και στροφή του πλαισίου  $A$ .

**Παρατήρηση 8.17** Από τον ορισμό του πίνακα στροφής προκύπτει ότι:

- Αν το πλαίσιο  $B$  προκύπτει από μεταφορά του πλαισίου  $A$  κατά το διάνυσμα  $\vec{u}$  (βλ. Σχήμα 8.28a), τότε οι συντεταγμένες

$$\vec{r}_A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \vec{r}_B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}$$

ενός σημείου του χώρου ως προς τα δύο πλαίσια συνδέονται με τη σχέση

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{u} \quad (8.7)$$

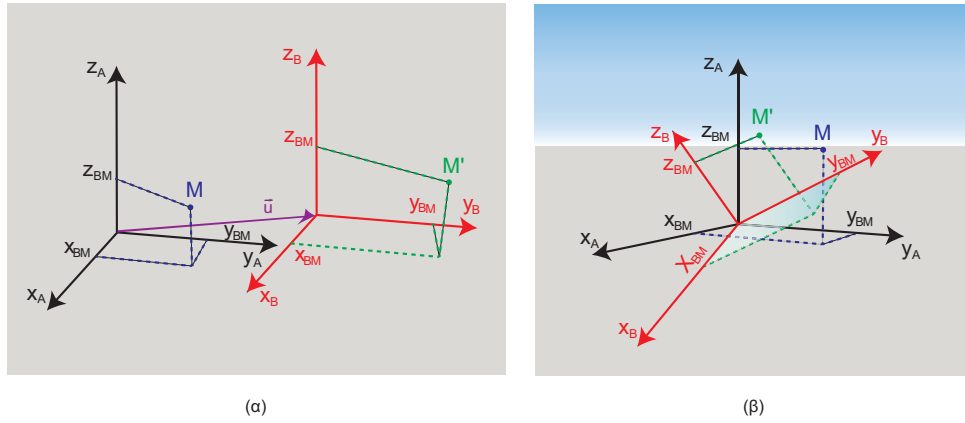
- Αν το πλαίσιο  $B$  προκύπτει από στροφή του πλαισίου  $A$  (βλ. Σχήμα 8.28b), τότε ισχύει

$$\vec{r}_A = {}^B_A R \vec{r}_B. \quad (8.8)$$

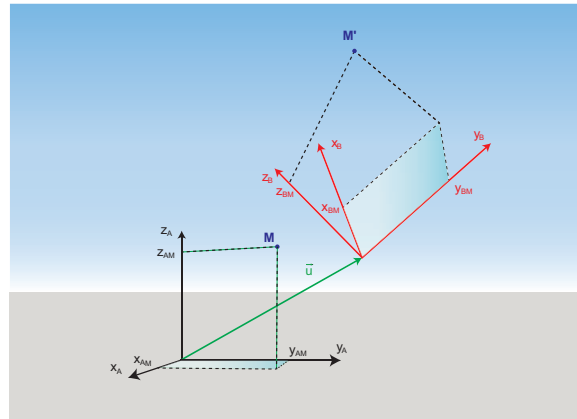
όπου  ${}^B_A R$  ο πίνακας στροφής του πλαισίου  $B$  ως προς το πλαίσιο  $A$ .

- Αν το πλαίσιο  $B$  προκύπτει από μεταφορά του πλαισίου  $A$  κατά το διάνυσμα  $\vec{u}$  και στροφή του κατά τον πίνακα στροφής  ${}^B_A R$ , τότε (βλ. Σχήμα 8.29)

$$\vec{r}_A = \vec{u} + {}^B_A R \vec{r}_B \quad (8.9)$$



Σχήμα 8.28 α) Μεταφορά β) στροφή πλαισίου



Σχήμα 8.29 Το πλαίσιο B προκύπτει από μεταφορά και στροφή του πλαισίου A

**Παράδειγμα 8.47** α) Να βρεθεί ο πίνακας στροφής κατά  $\varphi$  γύρω από τον άξονα  $x$ .

β) Το πλαίσιο B προκύπτει από στροφή του πλαισίου A κατά  $45^\circ$  γύρω από τον άξονα  $x$ . Να υπολογιστούν:

- i) Οι συντεταγμένες ως προς το πλαίσιο B του σημείου M με συντεταγμένες  $M(0, 1, 0)_A$  ως προς το πλαίσιο A.
- ii) Οι συντεταγμένες ως προς το πλαίσιο A του σημείου N με συντεταγμένες,  $N(0, 0, -1)_B$  ως προς το πλαίσιο B.
- iii) Οι συντεταγμένες ως προς το πλαίσιο A των σημείων M' και N' στα οποία μετατοπίζονται τα σημεία M και N κατά τη στροφή αυτή.

### Λύση

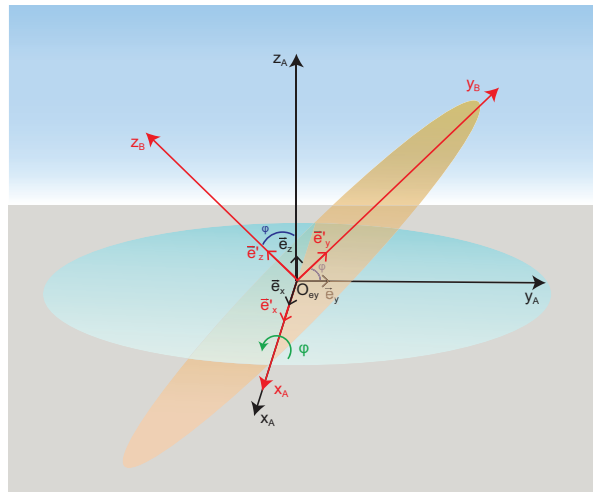
α) Από τη στροφή του καρτεσιανού συστήματος  $Ox_A y_A z_A$  του Σχήματος 8.30 κατά  $\varphi$  γύρω από τον άξονα  $x$  προκύπτει το καρτεσιανό σύστημα  $Ox_B y_B z_B$ .

Από το Σχήμα 8.30 φαίνεται ότι οι συντεταγμένες ως προς το σύστημα A των μοναδιαίων διανυσμάτων  $\hat{e}'_x, \hat{e}'_y, \hat{e}'_z$  του συστήματος B είναι

$$\begin{aligned}\hat{e}'_x &= \hat{e}_x \\ \hat{e}'_y &= \cos \varphi \hat{e}_y + \sin \varphi \hat{e}_z \\ \hat{e}'_z &= -\sin \varphi \hat{e}_y + \cos \varphi \hat{e}_z\end{aligned}$$

οπότε ο πίνακας στροφής κατά  $\varphi$  γύρω από τον άξονα  $x$  είναι:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$



**Σχήμα 8.30** Στροφή κατά  $\varphi$  γύρω από τον άξονα  $x$

β) *i)* Ο πίνακας στροφής του πλαισίου  $B$  ως προς το πλαίσιο  $A$ , προκύπτει από το (α) για  $\varphi = 45^\circ$

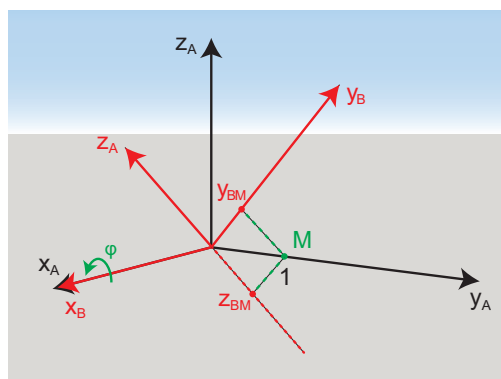
$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

οπότε για τις συντεταγμένες ως προς το πλαίσιο  $B$  του σημείου  $M$  με  $\vec{r}_A^M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$  ισχύει (βλ. Σχήμα 8.31α)

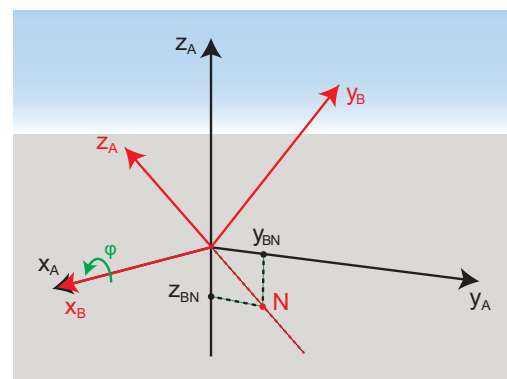
$$\vec{r}_A^M = {}^B_A R \vec{r}_B^M$$

οπότε

$$\vec{r}_B^M = {}^B_A R^{-1} \vec{r}_A^M = {}^B_A R^T \vec{r}_A^M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$



(α)



(β)

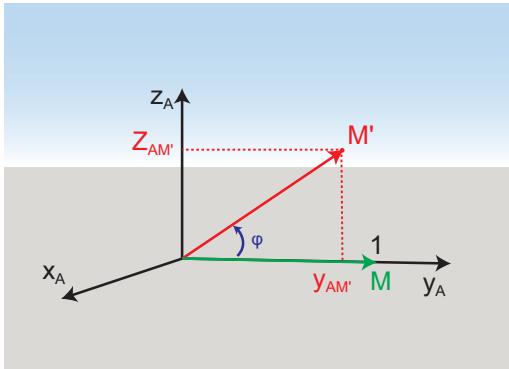
**Σχήμα 8.31** Συντεταγμένες σημείων στα πλαίσια  $A$  και  $B$

*ii)* Οι συντεταγμένες  $\vec{r}_A^N$  του σημείου  $N$  που έχει συντεταγμένες  $\vec{r}_B^N$  στο πλαίσιο  $B$  είναι (βλ. Σχήμα 8.31β)

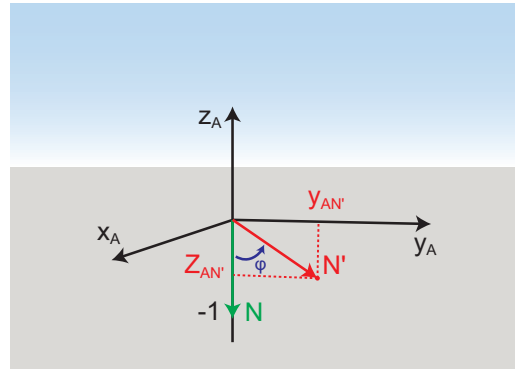
$$\vec{r}_A^N = {}^B_A R \vec{r}_B^N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

iii) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 8.10 το σημείο  $M$  μετατοπίζεται στο σημείο  $M'$  (βλ. Σχήμα 8.32α) με συντεταγμένες, ως προς το πλαίσιο  $A$ ,

$$\vec{r}_A^{M'} = {}^B_A R \vec{r}_A^M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$



(α)



(β)

**Σχήμα 8.32** Μετακίνηση των σημείων  $M$  και  $N$  από στροφή γύρω από τον άξονα  $x$

Όμοια, το σημείο  $N$  με συντεταγμένες  $\vec{r}_A^N = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T$  μετατοπίζεται στο σημείο  $N'$  με συντεταγμένες (βλ. Σχήμα 8.32β)

$$\vec{r}_A^{N'} = {}^B_A R \vec{r}_A^N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Παράδειγμα 8.48** α) Να βρεθεί ο πίνακας στροφής κατά  $\varphi$  γύρω από τον άξονα  $z$

β) Το πλαίσιο  $B$  προκύπτει από περιστροφή του πλαισίου  $A$  κατά  $37^\circ$  γύρω από τον άξονα  $z_A$  και το πλαίσιο  $\Gamma$  από περιστροφή του πλαισίου  $B$  γύρω από τον άξονα  $x$  κατά  $30^\circ$ . Να βρεθούν:

i) Ο πίνακας στροφής του πλαισίου  $\Gamma$  ως προς το πλαίσιο  $A$ .

ii) Οι συντεταγμένες ως προς το πλαίσιο  $\Gamma$  του σημείου  $M$  με συντεταγμένες  $\vec{r}_A^M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$  ως προς το πλαίσιο  $A$ .

iii) Οι συντεταγμένες ως προς τα πλαίσια  $A$  και  $B$  του σημείου  $N$  με συντεταγμένες

$\vec{r}_\Gamma^N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$  ως προς το πλαίσιο  $\Gamma$ .

iv) Οι συντεταγμένες ως προς το πλαίσιο  $A$  του σημείου στο οποίο μετατοπίζεται από τις δύο αυτές διαδοχικές στροφές το σημείο  $K$  με συντεταγμένες  $\vec{r}_A^K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$

### Λύση

α) Από τη στροφή του καρτεσιανού συστήματος  $Ox_Ay_Az_A$  του Σχήματος 8.33α κατά  $\varphi$  γύρω από τον άξονα  $z$  προκύπτει το καρτεσιανό σύστημα  $Ox_By_Bz_B$ .

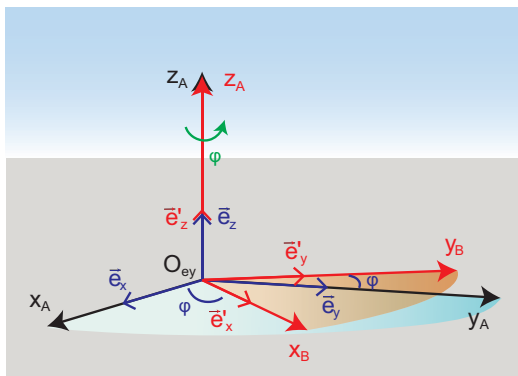
Από το Σχήμα 8.33α φαίνεται ότι οι συντεταγμένες ως προς το σύστημα  $A$  των μοναδιαίων διανυσμάτων  $\hat{e}'_x, \hat{e}'_y, \hat{e}'_z$  του συστήματος  $B$  είναι

$$\begin{aligned} \hat{e}'_x &= \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y \\ \hat{e}'_y &= -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y \\ \hat{e}'_z &= \hat{e}_z \end{aligned}$$

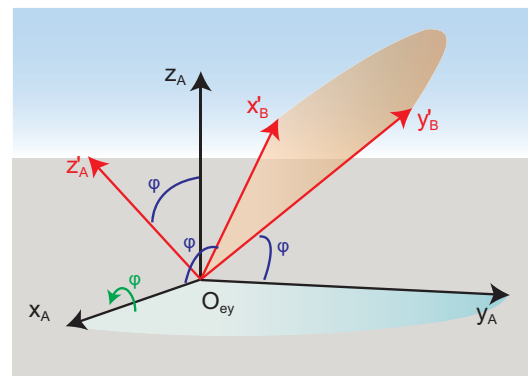
οπότε ο πίνακας στροφής κατά  $\varphi$  γύρω από τον άξονα  $x$  είναι:



$$R_x = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(α)



(β)

**Σχήμα 8.33** Στροφή κατά  $\varphi$  γύρω από τον άξονα  $z$ 

β) i) Ο πίνακας στροφής του πλαισίου  $\Gamma$  ως προς το πλαίσιο  $A$  είναι

$${}^{\Gamma}_A R = {}^{\Gamma}_B R_x {}^B_A R_z, \quad (i)$$

όπου  ${}^B_A R_z$  ο πίνακας στροφής του πλαισίου  $B$  ως προς το πλαίσιο  $A$  και  ${}^{\Gamma}_B R_x$  ο πίνακας στροφής του πλαισίου  $\Gamma$  ως προς το πλαίσιο  $B$ . Ο πίνακας  ${}^B_A R_z$  προκύπτει από το (α) για  $\varphi = 37^\circ$

$${}^B_A R_z = \begin{bmatrix} \cos 37^\circ & -\sin 37^\circ & 0 \\ \sin 37^\circ & \cos 37^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας στροφής του πλαισίου  $\Gamma$  ως προς το πλαίσιο  $B$  (προκύπτει με στροφή κατά  $\varphi = 30^\circ$  γύρω από τον άξονα  $x_A$ ) είναι

$${}^{\Gamma}_B R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ 0 & \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,87 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,87 \end{bmatrix}$$

Έτσι, η (i) δίνει

$${}^{\Gamma}_A R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,87 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 \\ 0,52 & 0,7 & -0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,87 \end{bmatrix} \quad (i)$$

ii) Για τις συντεταγμένες ως προς το πλαίσιο  $\Gamma$  του σημείου  $M$  με

$$\vec{r}_A^M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

ισχύει

$$\vec{r}_A^M = {}^{\Gamma}_A R \vec{r}_\Gamma^M,$$

οπότε

$$\vec{r}_\Gamma^M = \vec{r}_A^M R^{-1} = {}^{\Gamma}_A R^T \vec{r}_A^M = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,52 & 0,3 \\ -0,6 & 0,7 & 0,4 \\ 0 & -0,5 & 0,87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 1 \\ 0,87 \end{bmatrix}$$

iii) Οι συντεταγμένες  $x_A^N$  του σημείου  $N$  που έχει συντεταγμένες  $x_\Gamma^N$  στο πλαίσιο  $\Gamma$  είναι

$$\vec{r}_A^N = {}^{\Gamma}_A R \vec{r}_\Gamma^N = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 \\ 0,52 & 0,7 & -0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6 \\ 1,2 \\ -0,47 \end{bmatrix}$$

Οι συντεταγμένες του  $N$  ως προς το πλαίσιο  $B$  είναι

$$\vec{r}_B^N = {}^{\Gamma}_B R \vec{r}_\Gamma^N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,87 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,37 \\ -0,37 \end{bmatrix}$$

**Παρατήρηση 8.18** Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι οι πίνακες στροφής ενός πλαισίου  $Oxyz$  κατά  $\varphi$  γύρω από τους άξονες  $x, y$  και  $z$  είναι αντίστοιχα

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

**Παρατήρηση 8.19** Αν το πλαίσιο  $B$  προκύπτει από το πλαίσιο  $A$  με τις παρακάτω διαδοχικές στροφές:

- ▶ κατά  $a$ , γύρω από τον άξονα  $x$ ,
- ▶ κατά  $\beta$ , γύρω από τον άξονα  $y$ ,
- ▶ κατά  $\gamma$ , γύρω από τον άξονα  $z$ ,

τότε ο πίνακας προσανατολισμού του ως προς το πλαίσιο  $A$  είναι:

$$\begin{aligned} {}^B_A R &= R_z R_y R_x \\ &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos a \cos \beta & \cos a \sin \beta \sin \gamma - \sin a \cos \gamma & \cos a \sin \beta \cos \gamma + \sin a \sin \gamma \\ \sin a \cos \beta & \sin a \sin \beta \sin \gamma + \cos a \cos \gamma & \sin a \sin \beta \cos \gamma - \cos a \sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix} \end{aligned}$$