Κεφάλαιο 7

Διανυσματικοί χώροι

Ἀσκηση 7.1

Εφαρμόζουμε ιδιότητες διανυσματικών χώρων.
Πολλαπλασιάζοντας την (iii) επί δύο και προσθέτοντας κατά μέλη με την (ii), προκύπτει

$$3\vec{x} - 3\vec{a} + 2\vec{y} - 2\vec{\beta} + 4\vec{x} + 4\vec{a} - 2\vec{y} - 2\vec{\beta} = \vec{\gamma} + 2\vec{\delta},$$

ή

$$7\vec{x} = -\vec{a} + 4\vec{\beta} + \vec{\gamma} + 2\vec{\delta},$$

οπότε

$$\vec{x} = \frac{1}{7}\left(-\vec{a} + 4\vec{\beta} + \vec{\gamma} + 2\vec{\delta}\right) = -\frac{1}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{\beta} + \frac{1}{7}\vec{\gamma} + \frac{2}{7}\vec{\delta}.$$

Έτσι, η (iii) δίνει

$$\begin{aligned} \vec{y} &= 2\vec{x} + 2\vec{a} - \vec{\beta} - \vec{\delta} \\ &= 2\left(-\frac{1}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{\beta} + \frac{1}{7}\vec{\gamma} + \frac{2}{7}\vec{\delta}\right) + 2\vec{a} - \vec{\beta} - \vec{\delta} \end{aligned}$$

ή

$$\vec{y} = \frac{12}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{\beta} + \frac{2}{7}\vec{\gamma} - \frac{3}{7}\vec{\delta}.$$

῾Ασκηση 7.2

Ο πίνακας των διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6$ είναι

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Η μεγαλύτερη διάσταση τετραγωνικού υποπίνακα του P είναι 5. Το ανάπτυγμα της ορίζουσας του υποπίνακα του P, που προκύπτει αν παραλείψουμε την τελευταία στήλη του,

$$P_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

ως προς τα στοιχεία της δεύτερης στήλης της προκύπτει

$$P_1 = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Παίρνοντας το ανάπτυγμα της ορίζουσας αυτής ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης της προκύπτει

$$P_1 = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Παίρνοντας τέλος το ανάπτυγμα της ορίζουσας αυτής ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης της προκύπτει

$$P_1 = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(P) = 5.$$

Επομένως,

$$span\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6\right) = R^5.$$

Άσκηση 7.3

Τα διανύσματα αυτά αποτελούν μία βάση του R^4 αν

$$detA = 0$$

όπου

$$A = [\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3, \vec{\epsilon}_4]$$

ο πίνακας των $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3, \vec{\epsilon}_4$

$$detA = 0 \ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ 1 \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ 1\lambda \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = 0$$

Επομένως, τα διανύσματα $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ και $\vec{\epsilon}_4$ αποτελούν μία βάση του R^4 αν και μόνο αν $\lambda \neq 0$.

Άσκηση 7.4

α) $i)$ Ο U γράφεται

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z):\ 2x+y-z=0\} \\ &= \{(x,y,z):\ z=2x+y\} \\ &= \{(x,y,2x+y),\quad x,y\in R\} \\ &= \{x(1,0,2)+y(0,1,1),\quad x,y\in R\} \\ &= span\,[(1,0,2),(0,1,1)] \end{aligned}$$

Τα διανύσματα $\vec{u}_1=(1,0,2), \vec{u}_2=(0,1,1)$ είναι προφανώς μη παράλληλα, οπότε και γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα,

$$dim(U)=2,$$

και μια βάση του V είναι τα διανύσματα $\vec{u}_1,\vec{u}_2$.
$ii)$ Ο V γράφεται

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y,z):\ x-y=0\} \\ &= \{(x,x,z),\quad x,y\in R\} \\ &= \{x(1,1,0)+z(0,0,1),\quad x,z\in R\} \\ &= span\,[(1,0,0),(0,0,1)] \end{aligned}$$

Τα διανύσματα $(1,0,0),(0,0,1)$ είναι προφανώς μη παράλληλα, οπότε και γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα,

$$dim(V)=2,$$

και μια βάση του είναι τα διανύσματα $(1,0,0),(0,0,1)$.
$iii)$ Αν $\vec{u}\in(U\cap V)$,

$$\vec{u}\in A \ \text{ και } \ \vec{u}\in B,$$

οπότε

$$\vec{u}=k(1,0,2)+l(0,1,1) \ \text{ και } \ \vec{u}=m(1,0,0)+n(0,0,1),$$

Επομένως

$$k(1,0,2)+l(0,1,1)u=m(1,0,0)+n(0,0,1)$$

ή
$$(k,l,2k+l)=(m,0,n)$$

ή
$$k=m,\quad l=0,\quad 2k+l=n.$$

Από το σύστημα αυτό εύκολα προκύπτει ότι

$$m=k,\quad l=0,\quad n=2k$$

οπότε

$$\vec{u}=(k,0,2k)=k(1,0,2),\quad k\in R.$$

Επομένως,

$$U\cap V=\{k(1,0,2),\ k\in R\}=span(1,0,2).$$

Άρα,

$$dim(U\cap V)=1$$

και μία βάση του $U\cap V$ είναι το διάνυσμα $(1,0,2)$.

β) $i)$ Επεκτείνουμε την βάση $\vec{u}_1=(1,0,2),\vec{u}_2=(0,1,1)$ του U σε βάση του R^3 προσθέτοντας το διάνυσμα $\vec{u}_3=(1,0,0)$.
Η ορίζουσα του πίνακα των διανυσμάτων $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\neq 0,$$

οπότε τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^3.
Άρα, ένας συμπληρωματικός του διανυσματικού υποχώρου U είναι ο

$$U' = span(\vec{u}_3) = span(1,0,0).$$

$ii)$ Επεκτείνουμε τη βάση $\vec{a}_1 = (1,0,2)$ του $U \cap V$ σε βάση του R^3 προσθέτοντας τα διανύσματα $\vec{a}_2 = (0,1,0)$ και $\vec{a}_3 = (0,0,1)$.
Η ορίζουσα του πίνακα των διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

οπότε τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^3.
Άρα, ένας συμπληρωματικός του διανυσματικού υποχώρου $U \cap V$ είναι ο

$$(U \cap V)' = span(\vec{a}_2, \vec{a}_3) = span\left[(0,1,0),(0,0,1)\right].$$

Άσκηση 7.5

Θέτοντας $z = k$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x - 4y &= -3k \\ x + 3y &= 2k \end{aligned}$$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις αυτές κατά μέλη προκύπτει

$$3y - (-4y) = 2k - (-3k) \;\Leftrightarrow\; 7y = 5k \;\Leftrightarrow\; y = \frac{5k}{7}$$

οπότε

$$x = 4y - 3k = 4\frac{5k}{7} - 3k = -\frac{1}{7}k$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι το σύνολο

$$A = \{(\,x, y, z)\,:\; x = -\frac{1}{7}k,\; y = \frac{5}{7}k,\; z = k,\;\; k \in R\}$$

το οποίο είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3 διάστασης 1.
Μία βάση του είναι το (θέτουμε $k = 7$)

$$\vec{v}_1 = (-1, 5, 7)$$

Άσκηση 7.6

Το άθροισμα των διανυσματικών υποχώρων A και B είναι το γραμμικό περίβλημα των διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$

$$A + B = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4).$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα P των διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ αναπτύσσοντας την ως προς τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής της.

$$|P| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(P) = 4.$$

Άρα τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε

$$dim(A + B) = 4.$$

Επομένως,

$$A + B = R^4.$$

Ισχύει

$$dim(A \cap B) = dimA + dimB - dim(A + B) = 2 + 2 - 4 = 0,$$

οπότε

$$dim(A \cap B) = \{\vec{0}\}.$$

Επομένως,

$$A \oplus B = R^4.$$

Άσκηση 7.7

Για κάθε $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ του A ισχύει

$$z_1 = x_1 - y_1 \quad \text{και} \quad z_2 = x_2 - y_2$$

οπότε

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 - y_1 + x_2 - y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 - (y_2 + y_1)) \\ &= (x, y, x - y), \quad x, y \in R \end{aligned}$$

’ρα $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in A$

Επίσης, για κάθε $\lambda \in R$ και $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ του A ισχύει

$$\begin{aligned} \lambda \vec{v}_1 &= \lambda(x_1, y_1, x_1 - y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda x_1 - \lambda y_1) \\ &= (x, y, x - y), \quad x, y \in R \end{aligned}$$

οπότε $\lambda \vec{v}_1 \in A$

Επομένως, το A είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3.
Ο A γράφεται

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, x - y) = x(1,0,1) + y(0,1,-1), \quad x, y \in R \\ &= span\{(1,0,1), (0,1,-1)\} \end{aligned}$$

οπότε $dim(A) = 2$

και μία βάση του είναι τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = (1,0,1) \quad \text{και} \quad \vec{v}_2 = (0,1,-1)$$

Θεωρώντας το διάνυσμα $\vec{v}_3 = (1,0,0)$ η ορίζουσα του πίνακα B των $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι

$$det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

οπότε τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ αποτελούν μία βάση του R^3.
Επομένως, ένας συμπληρωματικός διανυσματικός υποχώρος του A είναι ο

$$A' = span \vec{v}_3 = \{k(1,0,0) = (k,0,0), \quad k \in R\}$$

Ο V δεν είναι διανυσματικός υποχώρος, διότι υπάρχουν

$$\vec{v}_1 = (x_1, x_1^3, z_1) \quad \text{και} \quad \vec{v}_2 = (x_2, x_2^3, z_2)$$

με $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, x_1^3 + x_2^3, z_1 + z_2)$

όπου $x_1^3 + x_2^3 \neq (x_1 + x_2)^3$

οπότε, υπάρχουν $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ με $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \notin V$.

Ἀσκηση 7.8

α) Ο πίνακας των διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έχει 3×3 μη μηδενική υποορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(A) = 3.$$

Επομένως, τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του A και

$$dim(A) = 3.$$

Ο πίνακας των διανυσμάτων $\vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

έχει 3×3 μη μηδενική υποορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(B) = 3.$$

Επομένως, τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του B και

$$dim(B) = 3.$$

Ισχύει

$$A + B = span\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6).$$

Ο πίνακας των διανυσμάτων $\vec{v}_1, v_2, v_3, \vec{v}_4, v_5, v_6$ είναι

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Η μεγαλύτερη διάσταση τετραγωνικού υποπίνακα του P είναι 5. Το ανάπτυγμα της ορίζουσας

$$P_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

του υποπίνακα του P, που προκύπτει αν παραλείψουμε την τελευταία στήλη του, ως προς τα στοιχεία της δεύτερης στήλης της προκύπτει

$$P_1 = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Παίρνοντας το ανάπτυγμα της ορίζουσας αυτής ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης της προκύπτει

$$P_1 = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Παίρνοντας τέλος το ανάπτυγμα της ορίζουσας αυτής ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης της προκύπτει

$$P_1 = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1 \neq 0,$$

οπότε

$$rank(P) = 5.$$

Επομένως $$dim(A + B) = 5,$$

οπότε $$A + B = R^5.$$

Ισχύει

$$dim(A \cap B) = dim(A) + dim(B) - dim(A + B) = 3 + 3 - 5 = 1,$$

οπότε το $A + B$ δεν είναι ευθύ άθροισμα.

Άσκηση 7.10

α) Παρατηρούμε ότι
$$v_3 = v_1 + v_2$$
οπότε τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
Τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ είναι μη παράλληλα (διότι $\vec{v}_1 \neq k\vec{v}_2, k \in R$), άρα και γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν μια βάση του V και
$$V = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2).$$
Επίσης τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (διότι $\vec{u}_1 \neq k\vec{u}_2, k \in R$), οπότε
$$U = span(\vec{u}_1, \vec{u}_2).$$
Επομένως
$$dim(U + V) = rank(A),$$
όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$
ο πίνακας των διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2$.
Επειδή
$$|A| = 0 \text{ και } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$
$$rank(A) = 3,$$
οπότε
$$dim(U + V) = 3$$
και μια βάση του $U + V$ είναι τα διανύσματα (αντιστοιχούν στην παραπάνω μη μηδενική ορίζουσα).
$$\vec{u}_1 = (1, -2, 3, -1),\ \vec{u}_2 = (2, -1, 4, 5),\ \vec{v}_1 = (1, 1, 2, 3).$$
β) Από την εξίσωση διάστασης προκύπτει ότι
$$dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U + V) = 2 + 2 - 3 = 1.$$
γ) Το $U + V$ δεν είναι ευθύ άθροισμα, διότι $U \cap V \neq \{\vec{0}\}$ (αφού $dim(U \cap V) \neq 0$).
δ) Αν $\vec{a} \in (U \cap V)$,
$$\vec{a} \in U \text{ και } \vec{a} \in V,$$
οπότε
$$\vec{a} = k\vec{u}_1 + l\vec{u}_2 \text{ και } \vec{u} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2,$$
ή
$$k(1, -2, 3, -1) + l(2, -1, 4, 5)u = m(1, 1, 2, 3) + n(4, -2, 9, 7)$$
ή
$$(k + 2l, -2k - l, 3k + 4l, -k + 5l) = (m + 4n, m - 2n, 2m + 9n, 3m + 7n)$$
οπότε
$$\begin{aligned} k + 2l &= m + 4n \\ -2k - l &= m - 2n \\ 3k + 4l &= 2m + 9n \\ -k + 5l &= 3m + 7n \end{aligned}$$
Προκύπτει λοιπόν το ομογενές σύστημα
$$\begin{aligned} k + 2l - m - 4n &= 0 \\ -2k - l - m + 2n &= 0 \\ 3k + 4l - 2m - 9n &= 0 \\ -k + 5l - 3m - 7n &= 0 \end{aligned}$$
του οποίου ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & -9 \\ -1 & 5 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

έχει ορίζουσα $|A| = 0$ και

$$rank(A) = 3$$

οπότε βρίσκουμε, σύμφωνα με την πρότ. 3.15 και 3.13, τους τρεις αγνώστους (π.χ k, l, m) συναρτήσει του τετάρτου (n),

$$k = n, \quad l = n, \quad m = -n.$$

Επομένως,

$$U \cap V = \{(n, n, -n, n)\} = \{n(1, 1, -1, 1),\ n \in R\} = span(1, 1, -1, 1).$$

Άσκηση 7.11

Λύση

α) Ο βαθμός του πίνακα

$$A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

είναι 2, διότι όλες οι 3×3 υποορίζουσές του είναι μηδέν και υπάρχει μη μηδενική 2×2 υποορίζουσα, οπότε

$$dim(V_1) = 2$$

και

$$V_1 = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = span\,[(2,3,1,1), (-1,2,3,-1)].$$

Επίσης

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \ x_1 = x_2 - x_3\} \\ &= \{(x_2 - x_3, x_2, x_3, x_4), \ \ x_1, x_2, x_3, x_4 \in R\} \\ &= \{x_2(1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,0,0,1), \ \ x_1, x_2, x_3, x_4 \in R\} \\ &= span\,[(1,1,0,0), \ (-1,0,1,0), \ (0,0,0,1)] \end{aligned}$$

Για να είναι $V_1 \subseteq V_2$ πρέπει

$$\vec{v}_1 \in V_2 \ \text{ και } \ \vec{v}_2 \in V_2.$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \in V_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (2,3,1,1) = k(1,1,0,0) + \lambda(-1,0,1,0) + m(0,0,0,1) \\ &\Leftrightarrow \quad (k-\lambda, k, \lambda, m) = (2,3,1,1) \\ &\Leftrightarrow \quad k - \lambda = 2, \ k = 3, \ \lambda = 1, \ m = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad k = 3, \ \lambda = 1, \ m = 1 \end{aligned}$$

οπότε

$$\vec{v}_1 \in V_2.$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 \in V_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (-1,2,3,-1) = k(1,1,0,0) + \lambda(-1,0,1,0) + m(0,0,0,1) \\ &\Leftrightarrow \quad (k-\lambda, k, \lambda, m) = (-1,2,3,-1) \\ &\Leftrightarrow \quad k - \lambda = -1, \ k = 2, \ \lambda = 3, \ m = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad k = 2, \ \lambda = 3, \ m = -1 \end{aligned}$$

οπότε

$$\vec{v}_2 \in V_2.$$

Επομένως

$$V_1 \subseteq V_2.$$

β) Επεκτείνουμε την βάση $\vec{v}_1 = (2,3,1,1), \vec{v}_2 = (-1,2,3,-1)$ του V_1 σε βάση του R^4 προσθέτοντας τα διανύσματα

$$\vec{v}_4 = (1,0,0,0) \ \text{ και } \ \vec{v}_5 = (0,1,0,0).$$

Η ορίζουσα του πίνακα των $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

οπότε τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^4.
Επομένως, ένας συμπληρωματικός διανυσματικός υποχώρος του V_1 είναι ο

$$V_1' = span(\vec{v}_4, \vec{v}_5) = span\left[(1,0,0,0),\ (0,1,0,0)\right].$$

Άσκηση 7.13

α) Ο βαθμός του πίνακα

$$A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

είναι 2, διότι όλες οι 3×3 ορίζουσές του είναι μηδέν και υπάρχει μη μηδενική 2×2 υποορίζουσα, οπότε

$$dim(V) = 2$$

και

$$V = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = span\,[(1,1,3,2),(-1,3,1,2)].$$

Για να είναι $\vec{u} \in V$ πρέπει

$$\vec{v} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2, \quad x, y \in R$$

ή
$$(0, k, l, m) = x(1,1,3,2) + y(-1,3,1,2)$$

ή
$$(0, k, l, m) = (x - y, x + 3y, 3x + y, 2x + 2y).$$

Πρέπει λοιπόν να έχει λύση ως προς x, y το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ x + 3y & = & k \\ 3x + y & = & l \\ 2x + 2y & = & m \end{array}$$

Ο πίνακας του συστήματος αυτού είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

και ο επαυξημένος

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & k \\ 3 & 1 & l \\ 2 & 2 & m \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$rank(A) = 2$$

πρέπει

$$rank(A|B) = 2$$

οπότε πρέπει όλες οι 3×3 υποορίζουσες του $A|B$ να είναι μηδέν, δηλαδή

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & k \\ 3 & 1 & l \end{vmatrix} \\
&= 1\begin{vmatrix} 3 & k \\ 1 & l \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & k \\ 3 & l \end{vmatrix} \\
&= -4k + 4l = 0 \\
&\Leftrightarrow l = k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & k \\ 2 & 2 & m \end{vmatrix} \\
&= 1\begin{vmatrix} 3 & k \\ 2 & m \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & m \end{vmatrix} \\
&= 4m - 4k = 0 \\
&\Leftrightarrow m = k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & l \\ 2 & 2 & m \end{vmatrix} \\
&= 1\begin{vmatrix} 1 & l \\ 2 & m \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & l \\ 2 & m \end{vmatrix} \\
&= 4m - 4l = 0 \\
&\Leftrightarrow m = l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & k \\ 3 & 1 & l \\ 2 & 2 & m \end{vmatrix} \\
&= 1\begin{vmatrix} 1 & l \\ 2 & m \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & l \\ 2 & m \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -8m + 4l + 4k = 0
\end{aligned}$$

Οι τρείς πρώτες εξισώσεις δίνουν

$$m = l = k$$

και η τέταρτη αληθεύει για τις τιμές αυτές, οπότε οι ζητούμενες συνθήκες είναι

$$m = l = k$$

β) Το σύνολο

$$U = \{(0, k, l, m)\} = \{(0, k, k, k), \quad k \in R\} = span(0, 1, 1, 1)$$

είναι διανυσματικός υποχώρος του R^4 και μια βάση του είναι το διάνυσμα $(0, 1, 1, 1)$.

Άσκηση 7.14

α) Ο U_1 γράφεται

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x,y,z) : z = -x-y\} = \{(x,y,-x-y),\ \ x,y \in R\} \\ &= \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1),\ \ x,y \in R\} \\ &= span\{(1,0,-1),(0,1,-1)\} \end{aligned}$$

οπότε $$dim(U_1) = 2$$

και μία βάση του U_1 είναι τα διανύσματα

$$\vec{u}_1 = (1,0,-1) \quad \text{και} \quad \vec{u}_2 = (0,1,-1)$$

Ο U_2 γράφεται

$$\begin{aligned} U_2 &= \left\{(\frac{z}{m},\frac{z}{m},z),\ \ z \in R\right\} = \left\{\frac{z}{m}(1,1,m),\ \ z \in R\right\} \\ &= span\{(1,1,m)\} \end{aligned}$$

οπότε $$dim(U_2) = 1$$

και μία βάση του U_2 είναι το διάνυσμα

$$\vec{u}_3 = (1,1,m)$$

Έστω $\vec{u} \in U_1 \cup U_2$, οπότε

$$\vec{u} \in U_1 \quad \text{και} \quad \vec{u} \in U_2$$

Έτσι,

$$\vec{u} = k(1,0,-1) + \lambda(0,1,-1)$$

και

$$\vec{u} = p(1,1,m)$$

οπότε

$$k(1,0,-1) + \lambda(0,1,-1) = p(1,1,m)$$

ή $$(k,\lambda,-k-\lambda) = (p,p,pm)$$

Έτσι, προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} k &= p \\ \lambda &= p \\ -k-\lambda &= pm \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας από τις δύο πρώτες εξισώσεις στην τρίτη παίρνουμε

$$-p-p = pm \ \Leftrightarrow\ p(m+2) = 0$$

Η σχέση αυτή για $m \neq -2$ αληθεύει για $p = 0$, αλλά τότε

$$k = \lambda = 0$$

οπότε στην περίπτωση αυτή $\vec{u} = 0$ και

$$U_1 \cap U_2 = \vec{0}$$

Αν $m = -2$, το σύστημα ως προς k, λ και p έχει τις λύσεις

$$K = p,\ \lambda = p,\ \ p \in R$$

οπότε στην περίπτωση αυτή ($m = -2$).

$$U_1 \cap U_2 = span(\vec{u}_3) = span(1,1,-2)$$

Υπολογίζουμε τον βαθμό του πίνακα B των διανυσμάτων $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$,

$$B = [\vec{u}_1\ \ \vec{u}_2\ \ \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & m \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του B είναι

$$det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & m \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m + 1 + 1 = m + 2$$

'ρα, αν $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

$$det(B) \neq 0$$

και
$$rank(B) = 3$$

οπότε στην περίπτωση αυτή τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν μία βάση του R^3.
Επομένως, αν $m \neq -2$,

$$U_1 + U_2 = R^3$$

Δείξαμε επίσης ότι

$$U_1 \cap U_2 = \vec{0}$$

οπότε στην περίπτωση αυτή ($m \neq -2$) το άθροισμα $U_1 + U_2$ είναι ευθύ,

$$U_1 \oplus U_2 = R^3$$

Στην περίπτωση $m = -2$,

$$rank(B) = 2,$$

οπότε τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα

$$rank(U_1 + U_2) = rank(B) = 2$$

Στην περίπτωση αυτή ($m = -2$) μία βάση του $U_1 + U_2$ είναι τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ (που είναι γραμμικώς ανεξάρτητα).
Επομένως, για $m = -2$,

$$U_1 + U_2 = U_1$$

β) Σύμφωνα με το (α),

$$U_1 \oplus U_2 = R^3$$

αν και μόνο αν $m \neq -2$

Άσκηση 7.15

α) Για να είναι $V_1 \subseteq V_2$ πρέπει

$$\vec{a} \in V_2 \ \text{ και } \ \vec{\beta} \in V_2.$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \in V_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (3,-1,1,1) = k(2,-1,2,0) + \lambda(1,0,-1,1) \\ &\Leftrightarrow \quad (2k+\lambda, -k, 2k-\lambda, \lambda) = (3,-1,1,1) \\ &\Leftrightarrow \quad 2k+\lambda = 3,\ -k = -1,\ 2k-\lambda = 1,\ \lambda = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad k = 1,\ \lambda = 1 \end{aligned}$$

οπότε

$$\vec{a} \in V_2.$$

$$\begin{aligned} \vec{\beta} \in V_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (4,-1,0,2) = k(2,-1,2,0) + \lambda(1,0,-1,1) \\ &\Leftrightarrow \quad (2k+\lambda, -k, 2k-\lambda, \lambda) = (4,-1,0,2) \\ &\Leftrightarrow \quad 2k+\lambda = 4,\ -k = -1,\ 2k-\lambda = 0,\ \lambda = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad k = 1,\ \lambda = 2 \end{aligned}$$

οπότε

$$\vec{\beta} \in V_2.$$

Επομένως

$$V_1 \subseteq V_2.$$

β) Επειδή ο V_1 είναι διανυσματικός υποχώρος του $V2$ και

$$dim(V_1) = dim(V_2),$$

ισχύει

$$V_1 = V_2.$$

Άσκηση 7.16

α) $i)$
$$V_1 + V_2 = span(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}).$$
Ο πίνακας των $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$
$$A = [\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
έχει βαθμό 3, διότι υπάρχει μη μηδενική 3×3 υποορίζουσα του, π.χ των τριών πρώτων στηλών ($det\left([\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]\right) \neq 0$), οπότε
$$dim(V_1 + V_2) = rank(A) = 3,$$
Επομένως,
$$V_1 + V_2 = R^3.$$
$ii)$ Από την εξίσωση διάστασης προκύπτει
$$dim(V_1 \cap V_2) = dim(V_1) + dim(V_2) - dim(V_1 + V_2) = 2 + 2 - 3 = 1,$$
οπότε το άθροισμα των V_1, V_2 δεν είναι ευθύ.
β) $i)$ Επειδή τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι βάση του R^3, ένας συμπληρωματικός διανυσματικός υποχώρος του $V_1 = span(\vec{a}, \vec{\beta})$ είναι ο
$$V_1' = span(\vec{\gamma}) = span(2, -1, 2).$$
$ii)$ Θεωρώντας $\vec{\epsilon} = (1, 0, 0)$,
$$det\left([\vec{\gamma}, \vec{\delta}, \vec{\epsilon}]\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$
οπότε τα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}, \vec{\epsilon}$ είναι βάση του R^3. Επομένως, ένας συμπληρωματικός διανυσματικός υποχώρος του $V_3 = span(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$ είναι ο
$$V_2' = span(\vec{\epsilon}) = span(1, 0, 0).$$

Άσκηση 7.17

α) Η ορίζουσα του πίνακα των διανυσμάτων $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ ως προς την βάση $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

οπότε τα $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^3.

β) Ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ στην $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ είναι ο P, οπότε για τα διανύσματα (x_1, x_2, x_3) του R^3 που έχουν ίδιες συντεταγμένες ως προς τις δύο βάσεις ισχύει

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ή

$$(I - P) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έτσι, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο έχει τις λύσεις

$$x_1 = x_2 = x_3$$

Άρα τα διανύσματα του R^3 που έχουν ίδιες συντεταγμένες ως προς τις δύο βάσεις είναι τα

$$\{(k, k, k),\ k \in R\} = span(1, 1, 1).$$

Άσκηση 7.18

α) Η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος αυτού είναι (ανάπτυγμα ως προς την τρίτη γραμμή της)

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a-1 & a-1 & 0 \\ 0 & a & a \\ a^2-a & 0 & a^2-a \end{vmatrix} \\
&= (a^2-a)\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ a & a \end{vmatrix} + (a^2-a)\begin{vmatrix} a-1 & a-1 \\ 0 & a \end{vmatrix} \\
&= (a^2-a)a(a-1) + (a^2-a)a(a-1) \\
&= 2a^2(a-1)^2
\end{aligned}$$

οπότε

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 2a^2(a-1)^2 \Leftrightarrow a = 0, a = 1.$$

Επομένως:

- Για $a \neq 0$ και $a \neq 1$, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$\begin{aligned}
x &= \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1-a & a-1 & 0 \\ 2(a-1) & a & a \\ 0 & 0 & a^2-a \end{vmatrix} \\
&= \frac{(a-1)^2 a(2-3a)}{2a^2(a-1)^2} \\
&= \frac{2-3a}{2a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 2(a-1) & a \\ a^2-a & 0 & a^2-a \end{vmatrix} \\
&= \frac{a(a-1)^2(a-2)}{2a^2(a-1)^2} \\
&= \frac{a-2}{2a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a-1 & a-1 & 1-a \\ 0 & a & 2(a-1) \\ a^2-a & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{a(a-1)^2(3a-2)}{2a^2(a-1)^2} \\
&= \frac{3a-2}{2a}
\end{aligned}$$

- Για $a = 0$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned}
-x-y &= 1 \\
0y+0z &= -2 \\
0x+0z &= 0
\end{aligned}$$

και είναι προφανώς αδύνατο.

- Για $a = 1$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned}
0x+0y &= 0 \\
y+z &= 0 \\
0x+0z &= 0
\end{aligned}$$

ή $$y = -z$$

οπότε έχει λύσεις ($x = k, z = \lambda$)

$$\begin{aligned}\{(x,y,z) = (k,-\lambda,\lambda)\} &= \{k(1,0,0) + \lambda(0,-1,1),\ k,\lambda \in R\} \\ &= span\left[(1,0,0),(0,-1,1)\right]\end{aligned}$$

ή

Άσκηση 7.19

α)

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y,z):\ x-y=0,\ y-z=0\} \\ &= \{(x,y,z):\ x=y=z\} \\ &= \{(z,z,z)\} \\ &= \{k(1,1,1),\ \ k\in R\} \\ &= span(1,1,1) \end{aligned}$$

οπότε ο A είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3

$$dim(A)=1$$

και μία βάση του A είναι το διάνυσμα $(1,1,1)$.

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y,z):\ x+y+z=0\} \\ &= \{(x,y,z):\ x=-y-z\} \\ &= \{(-y-z,y,z)\} \\ &= \{y(-1,1,0)+z(-1,0,1),\ \ y,z\in R\} \\ &= span\,[(-1,1,0),\ (-1,0,1)]\,, \end{aligned}$$

οπότε ο A είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3.
Τα διανύσματα $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$ είναι προφανώς μη παράλληλα, άρα και γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε

$$dim(B)=2$$

και μία βάση του B είναι τα διανύσματα $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$.

β)

$$A+B=span\,[(1,1,1),\ (-1,1,0),\ (-1,0,1)].$$

Επειδή

$$A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$$

τα διανύσματα $(1,1,1)$, $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε

$$dim(A+B)=rank\,[(1,1,1),\ (-1,1,0),\ (-1,0,1)]=3\,.$$

Άρα,

$$A+B=R^3.$$

Από την εξίσωση διάστασης προκύπτει

$$dim(A\cap B)=dim(A)+dim(B)-dim(A+B)=2+1-3=0,$$

οπότε

$$A\cap B=\{\vec{0}\}$$

και

$$A\oplus B=R^3.$$