Κεφάλαιο 4

Διανύσματα

Άσκηση 4.1

Λύση

Σύμφωνα με τον ορισμό 4.11,

$$\cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}||\vec{\beta}|}. \qquad (i)$$

Σύμφωνα με την πρότ. 4.1,

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1(-1) = -1.$$

Λόγω της (4.7),

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

οπότε η (i) δίνει

$$\cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Επομένως

$$(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Άσκηση 4.2

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας την (ii) επί δύο και προσθέτοντας κατά μέλη με την (i), προκύπτει

$$3\vec{x} - 3\vec{a} + 2\vec{y} - 2\vec{\beta} + 4\vec{x} + 4\vec{a} - 2\vec{y} - 2\vec{\beta} = \vec{\gamma} + 2\vec{\delta},$$

ή

$$7\vec{x} = -\vec{a} + 4\vec{\beta} + \vec{\gamma} + 2\vec{\delta},$$

οπότε

$$\vec{x} = \frac{1}{7}\left(-\vec{a} + 4\vec{\beta} + \vec{\gamma} + 2\vec{\delta}\right) = -\frac{1}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{\beta} + \frac{1}{7}\vec{\gamma} + \frac{2}{7}\vec{\delta}.$$

Έτσι η (ii) δίνει

$$\begin{aligned}\vec{y} &= 2\vec{x} + 2\vec{a} - \vec{\beta} - \vec{\delta} \\ &= 2\left(-\frac{1}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{\beta} + \frac{1}{7}\vec{\gamma} + \frac{2}{7}\vec{\delta}\right) + 2\vec{a} - \vec{\beta} - \vec{\delta}\end{aligned}$$

ή

$$\vec{y} = \frac{12}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{\beta} + \frac{2}{7}\vec{\gamma} - \frac{3}{7}\vec{\delta}.$$

Άσκηση 4.4

Λύση

Εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της (i) ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων θέσης, ως προς ένα σημείο αναφοράς Ο, των κορυφών A, B, Γ, Δ.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Delta} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OK} \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta} - 2\overrightarrow{OK} \end{aligned} \qquad (ii)$$

Επειδή το Κ είναι μέσον της ΑΓ,

$$2\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma}.$$

Ετσι, η (ii) γίνεται

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Delta} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma}) \\ &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Gamma}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}. \end{aligned}$$

Άσκηση 4.7

Λύση

- Αν τα A, B, Γ είναι συνευθειακά,

$$\overrightarrow{AB} || \overrightarrow{B\Gamma} \text{ και } \overrightarrow{B\Gamma} || \overrightarrow{\Gamma A},$$

οπότε

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma} \times \overrightarrow{\Gamma A} = 0 \ .$$

Άρα, στην περίπτωση αυτή η (i) ισχύει.

- Αν τα A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά, τότε

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{B\Gamma}| &= |-\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{B\Gamma}| = 2E, \\ |\overrightarrow{B\Gamma} \times \overrightarrow{\Gamma A}| &= |-\overrightarrow{\Gamma B} \times \overrightarrow{\Gamma A}| = |\overrightarrow{\Gamma B} \times \overrightarrow{\Gamma A}| = 2E, \end{aligned}$$

όπου E το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (βλ. Παράδειγμα 4.12).
Επομένως, σε κάθε περίπτωση,

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{B\Gamma} \times \overrightarrow{\Gamma A}|.$$

Ἀσκηση 4.10

Λύση

Σύμφωνα με τον ορισμό 4.11,

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}. \qquad (i)$$

Λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας του εσωτερικού γινομένου,

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= (2\vec{a}-\vec{\beta})\cdot(3\vec{a}-2\vec{\beta}) \\ &= 6|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{\beta} - 3\vec{a}\cdot\vec{\beta} + 2|\vec{\beta}|^2 \qquad (ii) \\ &= 6|\vec{a}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 - 7\vec{a}\cdot\vec{\beta} \end{aligned}$$

Από τον ορισμό 4.11,

$$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = |\vec{a}||\vec{\beta}|\cos(\vec{a},\vec{\beta}) = 2\cdot 5\left(-\frac{1}{2}\right) = -5.$$

Ετσι, η (ii) δίνει

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 6\cdot 2^2 + 2\cdot 5^2 - 7(-5) = 109. \qquad (iii)$$

Επίσης

$$|\vec{u}| = |2\vec{a}-\vec{\beta}| = \sqrt{(2\vec{a}-\vec{\beta})^2}$$

και από την (4.13)

$$(2\vec{a}-\vec{\beta})^2 = |2\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{\beta} = 4\cdot 2^2 + 5^2 - 4(-5) = 61,$$

οπότε

$$|\vec{u}| = \sqrt{61}. \qquad (iv)$$

Όμοια προκύπτει ότι

$$|\vec{v}| = \sqrt{196} = 14. \qquad (v)$$

Η (i) με τη βοήθεια των (iii)-(v) δίνει

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{109}{14\sqrt{61}} = 0,997,$$

οπότε

$$\theta = \cos^{-1} 0,997 = 4,54^0.$$

Άσκηση 4.11

Λύση

$$\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Delta} \text{ ή } \vec{\delta} = \vec{a} - \vec{\beta}.$$

Επίσης, επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο,

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} \text{ ή } \vec{\gamma} = \vec{a} + \vec{\beta}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} |\vec{\delta}|^2 &= (\vec{a} - \vec{\beta})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} \\ |\vec{\gamma}|^2 &= (\vec{a} + \vec{\beta})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{\beta}, \end{aligned}$$

οπότε προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει

$$\begin{aligned} |\vec{\gamma}|^2 + |\vec{\delta}|^2 &= 2\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2\right) \\ |\vec{\gamma}|^2 - |\vec{\delta}|^2 &= 4\vec{a} \cdot \vec{\beta}. \end{aligned}$$

Άσκηση 4.13

Λύση

Σύμφωνα με τις ασκ. 4.50 και 4.51, υπάρχουν δύο τέτοια σημεία P_1 και P_2 με διανύσματα θέσης, ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων Ο,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}_1 &= \frac{\vec{a}+k\vec{\beta}}{1+k} = \left(\frac{a_1+k\beta_1}{1+k}, \frac{a_2+k\beta_2}{1+k}, \frac{a_3+k\beta_3}{1+k}\right),\\ \overrightarrow{OP}_2 &= \frac{\vec{a}-k\vec{\beta}}{1-k} = \left(\frac{a_1-k\beta_1}{1-k}, \frac{a_2-k\beta_2}{1-k}, \frac{a_3-k\beta_3}{1-k}\right),\end{aligned}$$

όπου $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ τα διανύσματα θέσης των Α, Β, ως προς το Ο. Το P_1 είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, ενώ το P_2 σημείο της προέκτασής του.
Επομένως, οι συντεταγμένες των ζητούμενων σημείων είναι

$$\begin{aligned}P_1 &= \left(\frac{a_1+k\beta_1}{1+k}, \frac{a_2+k\beta_2}{1+k}, \frac{a_3+k\beta_3}{1+k}\right),\\ P_2 &= \left(\frac{a_1-k\beta_1}{1-k}, \frac{a_2-k\beta_2}{1-k}, \frac{a_3-k\beta_3}{1-k}\right).\end{aligned}$$

Άσκηση 4.15

Λύση

Το διάνυσμα θέσης του βαρύκεντρου G ενός τριγώνου ΑΒΓ, ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων Ο, είναι (βλ. λύση άσκ. 4.26)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}\right). \qquad (i)$$

Τα διανύσματα θέσης, ως προς το Ο, των σημείων Α, Β και Γ είναι

$$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3), \ \overrightarrow{OB} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \ \overrightarrow{O\Gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

οπότε, αντικαθιστώντας στην (i) παίρνουμε,

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{1}{3}\left(a_1 + \beta_1 + \gamma_1\right), \frac{1}{3}\left(a_2 + \beta_2 + \gamma_2\right), \frac{1}{3}\left(a_3 + \beta_3 + \gamma_3\right)\right).$$

Επομένως, οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου είναι

$$x_1 = \frac{a_1 + \beta_1 + \gamma_1}{3}, \ \ x_2 = \frac{a_2 + \beta_2 + \gamma_2}{3}, \ \ x_3 = \frac{a_3 + \beta_3 + \gamma_3}{3}.$$

Ἀσκηση 4.22

Λύση

α) Το συνημίτονο των γωνιών θ και φ που σχηματίζει το $\vec{\delta}$ με τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{\delta}}{|\vec{a}||\vec{\delta}|} = \frac{\vec{a}\cdot(|\vec{a}|\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\vec{a})}{|\vec{a}||\vec{\delta}|} = \frac{|\vec{a}|\vec{a}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}||\vec{a}|^2}{|\vec{a}||\vec{\delta}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}||\vec{a}|}{|\vec{\delta}|} \\
\cos\theta &= \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}}{|\vec{\beta}||\vec{\delta}|} = \frac{\vec{\beta}\cdot(|\vec{a}|\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\vec{a})}{|\vec{\beta}||\vec{\delta}|} = \frac{|\vec{a}||\vec{\beta}|^2+|\vec{\beta}|\vec{a}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}||\vec{\delta}|} = \frac{|\vec{a}||\vec{\beta}|+\vec{a}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\delta}|}
\end{aligned} \tag{i}$$

Από τις (i) είναι φανερό ότι

$$\cos\varphi = \cos\theta \;\Leftrightarrow\; \varphi = \theta,$$

οπότε το διάνυσμα $\vec{\delta}$ διχοτομεί τη γωνία των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$.

β) Η γωνία των $-\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι παραπληρωματική της γωνίας των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, οπότε η διχοτόμος της πρώτης είναι κάθετη στην διχοτόμο της δεύτερης.

Αν $\vec{\delta}' = |\vec{\beta}|\vec{a} - |\vec{a}|\vec{\beta}$,

$$\begin{aligned}
\vec{\delta}\cdot\vec{\delta}' &= \left(|\vec{a}|\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\vec{a}\right)\cdot\left(|\vec{\beta}|\vec{a}-|\vec{a}|\vec{\beta}\right) \\
\text{Αν} \qquad &= \left(|\vec{a}|\,|\vec{\beta}|\right)(\vec{\beta}\cdot\vec{a}) - |\vec{a}|^2\,|\vec{\beta}|^2 + |\vec{\beta}|^2\,|\vec{a}|^2 - |\vec{\beta}|\,|\vec{a}|(\vec{a}\cdot\vec{\beta}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

οπότε ένα διάνυσμα κάθετο στο $\vec{\delta}$ είναι το $\vec{\delta}'$.

Επομένως, ένα διάνυσμα παράλληλο με τη διχοτόμο της γωνίας των διανυσμάτων $-\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι το

$$\vec{\delta}' = |\vec{\beta}|\vec{a} - |\vec{a}|\vec{\beta}.$$

Άσκηση 4.24

Λύση

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$, δηλαδή (βλ. παράδ. 4.12α)

$$\begin{aligned}(AB\Gamma\Delta) &= (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma) \\ &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma}| + \frac{1}{2}|\overrightarrow{A\Delta} \times \overrightarrow{A\Gamma}|\end{aligned}$$

Ἀσκηση 4.25

Λύση

Σύμφωνα με το παράδ. 4.12β, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι

$$E = (AB\Gamma\Delta) = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma}|.$$

Εκφράζοντας τα διανύσματα των πλευρών $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ ως διαφορά των διανυσμάτων θέσης $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ των άκρων τους ως προς ένα σημείο αναφοράς O,

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\beta} - \vec{a} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\gamma} - \vec{a} \qquad (i)$$

οπότε η (i) δίνει

$$\begin{aligned} E &= |(\vec{\beta} - \vec{a}) \times (\vec{\gamma} - \vec{a})| \\ &= |\vec{\beta} \times \vec{\gamma} - \vec{\beta} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{\gamma} + \vec{a} \times \vec{a}|. \end{aligned}$$

Επειδή

$$-\vec{\beta} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{\beta}, \; -\vec{a} \times \vec{\gamma} = \vec{\gamma} \times \vec{a} \quad \text{και} \quad \vec{a} \times \vec{a} = 0,$$

το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι

$$E = |\vec{a} \times \vec{\beta} + \vec{\beta} \times \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \times \vec{a}|.$$

Άσκηση 4.26

Λύση

(α) Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου απέχει τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της κάθε διαμέσου από την αντίστοιχη κορυφή, οπότε αν Μ είναι το μέσον της πλευράς ΒΓ,

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}. \tag{i}$$

Επίσης,

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA},$$

οπότε η (i) γίνεται

$$\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right)$$

ή

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}. \tag{ii}$$

Το διάνυσμα θέσης του μέσου της ΒΓ είναι

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}\right). \tag{iii}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις εύκολα προκύπτει ότι

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}\right).$$

(β)

$$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}, \quad \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{G\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OG},$$

οπότε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OG} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} - 3\overrightarrow{OG}.\end{aligned}$$

Επομένως, λόγω και του (α)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} - 3\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}\right) \\ &= \vec{0}\end{aligned}.$$

Άσκηση 4.27

Λύση

Λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας του εσωτερικού γινομένου

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \left(u_1\vec{a}+u_2\vec{\beta}+u_3\vec{\gamma}\right)\cdot\left(v_1\vec{a}+v_2\vec{\beta}+v_3\vec{\gamma}\right)\\ &= u_1v_1\vec{a}\cdot\vec{a}+u_1v_2\vec{a}\cdot\vec{\beta}+u_1v_3\vec{a}\cdot\vec{\gamma}+u_2v_1\vec{\beta}\cdot\vec{a}\\ &+ u_2v_2\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}+u_2v_3\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+u_3v_1\vec{\gamma}\cdot\vec{a}+u_3v_2\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}+u_3v_3\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma}.\end{aligned}$$

Επειδή $\vec{a}\perp\vec{\beta}$, $\vec{a}\perp\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}\perp\vec{\gamma}$,

$$\vec{a}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\cdot\vec{a}=\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=0.$$

Ενώ επειδή τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία διανύσματα,

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma}=1.$$

Επομένως,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

Άσκηση 4.29

Λύση

α) Για $k > 0$, ισχύει

$$|\vec{x}| + |\vec{y}| + k \geq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

οπότε

$$\frac{|\vec{x} + \vec{y}|}{|\vec{x}| + |\vec{y}| + k} \leq \frac{|\vec{x} + \vec{y}|}{|\vec{x}| + |\vec{y}|}$$

Επίσης,

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|,$$

οπότε

$$\frac{|\vec{x} + \vec{y}|}{|\vec{x}| + |\vec{y}| + k} \leq \frac{|\vec{x} + \vec{y}|}{|\vec{x}| + |\vec{y}|} \leq \frac{|\vec{x}| + |\vec{y}|}{|\vec{x}| + |\vec{y}|}$$

ή

$$\frac{|\vec{x} + \vec{y}|}{|\vec{x}| + |\vec{y}| + k} \leq 1$$

β) Ισχύει

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|, \qquad (i)$$

και

$$|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x} + (-\vec{y})| \leq |\vec{x}| + |-\vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|. \qquad (ii)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισώσεις (i),(ii) προκύπτει

$$|\vec{x} + \vec{y}| + |\vec{x} - \vec{y}| \leq 2(|\vec{x}| + |\vec{y}|).$$

Ἀσκηση 4.30

Λύση

Επειδή το Μ είναι το σημείο της ΒΓ για το οποίο $(\Gamma M) = 3(BM)$,

$$\overrightarrow{\Gamma M} = 3\overrightarrow{MB}.$$

Εκφράζοντας τα διανύσματα της σχέσης αυτής ως διαφορές των διανυσμάτων θέσης των άκρων τους ως προς την κορυφή Α προκύπτει (βλ. λύση Άσκησης 4.50)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{\overrightarrow{A\Gamma} + 3\overrightarrow{AB}}{1+3} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma} \\ &= \frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}\end{aligned}$$

Επειδή το Κ είναι το σημείο προέκτασης της ΓΒ για το οποίο $(\Gamma K) = 2(BK)$,

$$\overrightarrow{\Gamma K} = -2\overrightarrow{KB}$$

Εκφράζοντας τα διανύσματα της σχέσης αυτής ως διαφορές των διανυσμάτων θέσης των άκρων τους ως προς την κορυφή Α παίρνουμε (βλ. λύση Άσκησης 4.51)

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\overrightarrow{A\Gamma} - 2\overrightarrow{AB}}{1-2} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = 2\vec{u} - \vec{v}.$$

Άσκηση 4.31

Λύση

Θα δείξουμε ότι

$$\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{A\Gamma}, \quad m \in R,$$

εκφράζοντας τα διανύσματα της (i) ως διαφορά των διανυσμάτων θέσης των άκρων τους ως προς το σημείο Α.

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}, \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}, \quad \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AO},$$

οπότε η (i) γίνεται

$$7(-\overrightarrow{AO}) - 4(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}) - 3(\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AO}) = \vec{0}$$

ή

$$-4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$$

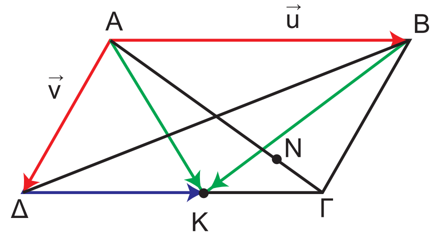
ή

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}.$$

Άρα τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 4.32

Λύση



Σχήμα 4.32 *Το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.*

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta K} \qquad (i)$$

Επειδή $(\Delta K) = 2(K\Gamma)$,

$$(\Delta K) = \frac{2}{3}(\Gamma\Delta),$$

οπότε

$$\overrightarrow{\Delta K} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Delta\Gamma}, \qquad (ii)$$

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} = \vec{u},$$

οπότε η (ii) δίνει

$$\overrightarrow{\Delta K} = \frac{2}{3}\vec{u},$$

και η (i)

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\vec{u} + \vec{v}. \qquad (iii)$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BK} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}\\ &= -\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{u} + \vec{v}\\ &= -\frac{1}{3}\vec{u} + \vec{v}\end{aligned}$$

Επίσης

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} \qquad (iv)$$

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, το Ο είναι το μέσον της ΑΓ, οπότε

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Gamma A} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}. \qquad (v)$$

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο,

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = \vec{u} + \vec{v},$$

οπότε η (v) δίνει

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})\\ &= -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\end{aligned}$$

και η (iv), λόγω και της (iii),

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OK} &= -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{u} + \vec{v} \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)\vec{u} + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\vec{v} \\ &= -\frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\end{aligned}$$

Ισχύει

$$\overrightarrow{\Delta N} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma N} \qquad (vi)$$

Επίσης,

$$(\Gamma N) = \frac{1}{4}(A\Gamma)$$

και

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{u} + \vec{v},$$

οπότε

$$\overrightarrow{\Gamma N} = -\overrightarrow{N\Gamma} = -\frac{1}{4}\left(\vec{u} + \vec{v}\right),$$

Άρα, η (vi) δίνει

$$\overrightarrow{\Delta N} = \vec{u} - \frac{1}{4}\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \frac{3}{4}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v}.$$

Ισχύει

$$\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{N\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma K} \qquad (vii)$$

Επίσης,

$$(N\Gamma) = \frac{1}{4}\left(\vec{u} + \vec{v}\right)$$

και

$$\overrightarrow{\Gamma K} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{\Delta\Gamma} = -\frac{1}{3}\vec{u},$$

οπότε η (vii) δίνει

$$\overrightarrow{NK} = \frac{1}{4}\left(\vec{u} + \vec{v}\right) - \frac{1}{3}\vec{u} = -\frac{1}{12}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}.$$

Ἀσκηση 4.33

Λύση

Υποθέτουμε ότι $k \neq 0$. Τότε

$$k\vec{a} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{\lambda}{k}\vec{\beta}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$, πράγμα που είναι άτοπο, αφού τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα. Επομένως,

$$k = \lambda = 0.$$

Άσκηση 4.34

Λύση

Για να δείξουμε ότι τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά αρκεί να δείξουμε διαδοχικά ότι:

- Τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.
- Τα Α, Β, Δ είναι συνευθειακά.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{\beta} - \vec{a}$$

και

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A\Gamma} &= \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} \\ &= \vec{\gamma} - \vec{a} \\ &= 2\vec{a} - \vec{\beta} - \vec{a} \\ &= \vec{a} - \vec{\beta} \\ &= \overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

Επομένως, τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{BA}$ είναι παράλληλα, οπότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Επίσης,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A\Delta} &= \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OA} = \vec{\delta} - \vec{a} \\ &= -2\vec{a} + 3\vec{\beta} - \vec{a} \\ &= 3(\vec{\beta} - \vec{a}) \\ &= 3\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλα, οπότε τα σημεία Α, Β, Δ είναι συνευθειακά. Επομένως, τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 4.35

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{A\Gamma}, \quad m \in R.$$

Την σχέση αυτή δείχνουμε εκφράζοντας τα διανύσματα της (i) ως διαφορά των διανυσμάτων θέσης των άκρων τους με σημείο αναφοράς το σημείο Α.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}, \quad \vec{\beta} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}, \quad \vec{\gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AO},$$

οπότε

$$k(-\overrightarrow{AO}) + \lambda(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}) + \mu(\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AO}) = \vec{0}$$

ή

$$\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{A\Gamma} - (k + \lambda + \mu)\overrightarrow{AO} = \vec{0}.$$

Άρα, λόγω και του ότι $k + \lambda + \mu = 0$,

$$\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0} \text{ με } \mu \neq 0 \text{ ή } \lambda \neq 0,$$

Επομένως $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A\Gamma}$, οπότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 4.36

Λύση

α) Αν η εξίσωση έχει λύση τότε υπάρχει διάνυσμα $\vec{a}$ τέτοιο ώστε

$$\vec{a} \times \vec{v} = \vec{u},$$

οπότε

$$\vec{u} \perp \vec{v}.$$

Αντίστροφα, στην περίπτωση που τα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους θα δείξουμε ότι υπάρχει λύση της (i) της μορφής

$$\vec{x}_0 = k\vec{u} \times \vec{v}, \quad k \in R.$$

Πράγματι, αν το διάνυσμα $\vec{x}_0$ είναι λύση της (i), τότε, λόγω του ότι $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ και της (4.22), η (i) δίνει

$$\begin{aligned}(k\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v} &= k(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} - kv^2\vec{u} \\ &= -kv^2\vec{u} \\ &= \vec{u},\end{aligned}$$

οπότε

$$-kv^2 = 1 \quad \text{ή} \quad k = -\frac{1}{v^2}.$$

Επομένως, αν τα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε μία λύση της (i) είναι το διάνυσμα

$$\vec{x} = -\frac{1}{v^2}\vec{u} \times \vec{v}$$

β) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.16, τα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ αποτελούν μία βάση του R^3 , οπότε κάθε διάνυσμα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός τους

$$\vec{x} = k\vec{u} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{u} \times \vec{v}. \tag{ii}$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της (ii) επί $\vec{u}$

$$\vec{x} \cdot \vec{u} = k\vec{u} \cdot \vec{u} + \lambda\vec{v} \cdot \vec{u} + \mu(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u}. \tag{iii}$$

Λόγω της (i),

$$\begin{aligned}&\vec{x} \perp \vec{u}, \text{ οπότε } \vec{x} \cdot \vec{u} = 0 \\ &\vec{v} \perp \vec{u}, \text{ οπότε } \vec{v} \cdot \vec{u} = 0\end{aligned}.$$

Επίσης,

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0.$$

Έτσι, από τη (iii) προκύπτει

$$0 = ku^2 \quad \text{ή} \quad k = 0.$$

Παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της (ii) επί $\vec{v}$ (έχοντας θέσει $k = 0$) προκύπτει

$$\vec{x} \times \vec{v} = \lambda\vec{v} \times \vec{v} + \mu(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v}. \tag{iv}$$

Επειδή

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} - v^2\vec{u} = -v^2\vec{u}$$

και, λόγω της (i) και του ότι $\vec{v} \times \vec{v} = 0$, η (iv) γίνεται

$$\vec{u} = -\mu v^2\vec{u},$$

οπότε

$$\mu v^2 = -1 \quad \text{ή} \quad \mu = -\frac{1}{v^2}.$$

Επομένως, η γενική λύση της (i) είναι

$$\vec{x} = \lambda\vec{v} - \frac{1}{v^2}(\vec{u} \times \vec{v}), \quad \lambda \in R.$$

Άσκηση 4.37

Λύση

Σύμφωνα με τη λύση της προηγούμενης άσκησης κάθε διάνυσμα

$$\vec{x} = k\vec{v} - \frac{1}{v^2}(\vec{w} \times \vec{v}), \quad k \in R \tag{i}$$

ικανοποιεί την $\vec{x} \times \vec{v} = \vec{w}$ αν και μόνον αν $\vec{v} \perp \vec{w}$ ή $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο των δύο μελών της σχέσης επί $\vec{u}$,

$$\vec{x} \cdot \vec{u} = k\vec{v} \cdot \vec{u} - \frac{1}{v^2}(\vec{w} \times \vec{v}) \cdot \vec{u}$$

οπότε, λόγω της $\vec{x} \cdot \vec{u} = \lambda$,

$$\lambda = k\vec{v} \cdot \vec{u} - \frac{1}{v^2}(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}).$$

Επομένως, επειδή $\vec{v} \cdot \vec{u} \neq 0$ ($\vec{u}, \vec{v}$ δεν είναι κάθετα)

$$k = \frac{1}{\vec{v} \cdot \vec{u}}\left(\lambda + \frac{1}{v^2}(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})\right),$$

οπότε η (i) πληρείται μόνο από το διάνυσμα

$$\vec{x} = \frac{1}{\vec{v} \cdot \vec{u}}\left[\lambda + \frac{1}{v^2}(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})\right]\vec{v} - \frac{1}{v^2}(\vec{w} \times \vec{v}).$$

Ἀσκηση 4.38

Λύση

Παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της $\vec{a} \times \vec{\beta} = \vec{a} \times \vec{\gamma}$ επί $\vec{a}$ προκύπτει

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{\beta}) = \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{\gamma})$$

ή

$$(\vec{a} \cdot \vec{\beta})\vec{a} - \vec{a}^2\vec{\beta} = (\vec{a} \cdot \vec{\gamma})\vec{a} - \vec{a}^2\vec{\gamma}.$$

Άρα, λόγω και του ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$,

$$-|\vec{a}|^2\vec{\beta} = -|\vec{a}|^2\vec{\gamma} \quad \text{ή} \quad |\vec{a}|^2(\vec{\gamma} - \vec{\beta}) = 0,$$

οπότε ($|\vec{a}|^2 \neq 0$, επειδή $\vec{a} \neq 0$)

$$\vec{\gamma} - \vec{\beta} = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{\beta} = \vec{\gamma}.$$