2.8 Εφαρμογές πινάκων στη χημεία

Παρατήρηση 2.1 *Σε ένα σύνολο n χημικών αντιδράσεων το πλήθος k των ανεξάρτητων μεταξύ τους εξισώσεις στοιχειακών ισοζυγίων είναι ίσο με τη τάξη του πίνακα $A = [a_{ij}]$, όπου a_{ij} το πλήθος ατόμων του στοιχείου i στην ένωση j. (οι γραμμές του πίνακα αντιστοιχούν στα στοιχεία των χημικών αντιστοιχούν στα στοιχεία των χημικών αυτών ενώσεων και οι στήλες στις χημικές ενώσεις)*

Παράδειγμα 2.1 *Να βρεθεί ο αριθμός των ανεξάρτητων στοιχειακών ισοζυγίων για τις αντιδράσεις του CO με H_2*

$$\begin{aligned} CO + 3H_2 &\rightarrow CH_4 + H_2O \\ CO + 2H_2 &\rightarrow CH_3OH \end{aligned}$$

Λύση

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.11, ο πίνακας των στοιχείων C, H και O στις αντιδράσεις αυτές είναι (οι γραμμές του αντιστοιχούν στα στοιχεία C, O και H και οι στήλες του στις χημικές ενώσεις CO, H_2, CH_4OH και CO_2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Επειδή μια ορίζουσα 3×3 του πίνακα A είναι (ανάπτυγμα ως προς δεύτερη γραμμή)

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

ο βαθμός του πίνακα A είναι $$Rank(A) = 3,$$

οπότε υπάρχουν τρία ανεξάρτητα στοιχειακά ισοζύγια για τις δυο αυτές αντιδράσεις

Παράδειγμα 2.2 *Να βρεθεί ο αριθμός των ανεξάρτητων ενεργειακών ισοζυγίων για την αντίδραση παρασκευής H_2SO_4 από SO_3 και H_2O*

$$SO_3 + H_2O \rightarrow H_2SO_4.$$

Λύση

Ο πίνακας της αντίδρασης αυτής είναι (οι γραμμές του αντιστοιχούν στα στοιχεία S, O και H και οι στήλες του στις χημικές ενώσεις SO_3, H_2O και H_2SO_4)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

ο βαθμός του πίνακα A είναι $$Rank(A) = 2,$$

οπότε υπάρχουν 2 μόνον ανεξάρτητα στοιχειακά ισοζύγια για την αντίδραση αυτή.

Παράδειγμα 2.3 *Να βρεθεί ο αριθμός των ανεξάρτητων στοιχειακών ισοζυγίων για τις αντιδράσεις*

$$\begin{aligned} CO_2 + 3H_2 &\rightarrow CH_3OH + H_2O \\ CO + 2H_2 &\rightarrow CH_3OH \end{aligned}$$

Λύση

Ο πίνακας των χημικών ενώσεων CO_2, H_2, H_2O και CH_3OH είναι (οι γραμμές του αντιστοιχούν στα στοιχεία C, H και O και οι στήλες του στις χημικές ενώσεις CO_2, H_2, CH_3OH, H_2O και CO)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

η τάξη του πίνακα A είναι 3, οπότε από τις δύο αυτές αντιδράσεις προκύπτουν 3 ανεξάρτητα στοιχειακά ισοζύγια.

Παρατήρηση 2.2 *Σε ένα σύνολο n χημικών αντιδράσεων το πλήθος των ανεξάρτητων αντιδράσεων είναι ίσο με τη τάξη του πίνακα A των αντιδράσεων ο οποίος ορίζεται ως εξής:*

- *Κάθε γραμμή του A αντιστοιχεί σε μια χημική αντίδραση και κάθε στήλη του σε μια χημική ενωση.*
- *Τα στοιχεία a_{ij} της γραμμής i του $A, i = 1, 2, \ldots, n$ και της στήλης j, όπου $j = 1, 2, \ldots, k$ και k το πλήθος των χημικών ενώσεων (προϊόντων ή αντιδρώντων) των χημι- κών αυτών αντιδράσεων είναι κατά απόλυτη ίσο με τον συντελεστή της ένωσης j στην αντί- δραση i. Το πρόσημο του a_{ij} είναι $(-)$ για τα αντιδρώντα και $(+)$ για τα προϊόντα.*

Παράδειγμα 2.4 *Να βρεθεί πόσες από τις παρακάτω αντιδράσεις είναι ανεξάρτητες*

$$C + O_2 \to CO_2 \qquad (i)$$

$$2CO + O_2 \to 2CO_2 \qquad (ii)$$

$$2C + O_2 \to 2CO \qquad (iii)$$

Λύση

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.12, ο πίνακας των αντιδράσεων αυτών είναι (οι στήλες του πίνακα αντιστοιχούν στα $C, O_2, C0$ και CO_2 και οι γραμμές του στις 3 χημικές αντιδράσεις).

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι ορίζουσες 3×3 του A είναι

$$A_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Επειδή ολες οι ορίζουσες 3×3 του A είναι μηδέν και μια ορίζουσα 2×2, π.χ

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

είναι μη μηδενική

$$\operatorname{rank}(A) = 2,$$

οπότε δύο από τις 3 αυτές χημικές αντιδράσεις είναι ανεξάρτητες.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα της δεύτερης και τρίτης αντίδρασης είναι ίσο με το διπλάσιο της πρώτης.

2.9 Εφαρμογές πινάκων στη στατιστική

Σε πολλές περιπτώσεις στη Στατιστική χρησιμοποιούμε πίνακες, όπως για παράδειγμα στη γραμμική παλινδρόμηση.

Γραμμική παλινδρόμηση

Στη γραμμική παλινδρόμηση εκτιμούμε τις τιμές των συντελεστών β_i σε ένα μοντέλο

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_m x_m,$$

που περιγράφει τη σχέση της προβλεπόμενης τυχαίας μεταβλητής Y με τις προβλέπουσες μεταβλητές x_i με τη βοήθεια ενός δείγματος n τιμών Y_i της Y που προέκυψαν για δεδομένες τιμές x_{ij} των μεταβλητών x_j.
Για παράδειγμα θέλουμε να εκτιμήσουμε τις τιμές των συντελεστών $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ για τη σχέση της τυχαίας μεταβλητής Y με τις x_1 και x_2

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

από το παρακάτω δείγμα τιμών

$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	**Y**
151	87	23
168	40	13
162	63	17
134	97	30
187	22	9
153	103	28

Θεωρώντας τον $n \times (m+1)$ πίνακα των τιμών των m προβλεπουσών μεταβλητών $x_1, x_2, \cdots, x_m$ για το δείγμα των n παρατηρήσεων

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

τον $n \times 1$ πίνακα στήλη Y των δειγματικών τιμών της Y και τον $(m+1) \times 1$ πίνακα στήλη B των ζητούμενων συντελεστών $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m,$, αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση

$$B = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y \tag{2.1}$$

από την οποία υπολογίζονται οι ζητούμενοι συντελεστές του μοντέλου.

Παράδειγμα 2.5 *Να υπολογιστούν οι τιμές των συντελεστών $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ για το γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης*

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

από το παραπάνω δείγμα τιμών.

Λύση

Στην περίπτωση αυτή ($m = 2, n = 6$) ισχύει

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_6 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{61} & a_{62} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Έτσι

$$\begin{aligned} X^T X &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{61} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{61} & x_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & \sum_i x_{i1} & \sum_i x_{i2} \\ \sum_i x_{i1} & \sum_i x_{i1}^2 & \sum_i x_{i1}x_{i2} \\ \sum_i x_{i2} & \sum_i x_{i1}x_{i2} & \sum_i x_{i2}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 955 & 412 \\ 955 & 153603 & 62934 \\ 412 & 62934 & 33640 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε, εφαρμόζοντας την Παρατήρηση (2.15), παίρνουμε

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 128,162 & -0,658314 & -0,338056 \\ -0,658314 & 0,00340938 & 0,00168429 \\ -0,338056 & 0,00168429 & 0,00101901 \end{bmatrix}.$$

Επίσης

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{61} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_{i1} y_i \\ \sum_i x_{i2} y_i \end{bmatrix}$$

Για τις δεδομένες τιμές

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 151 & 168 & 162 & 134 & 187 & 153 \\ 87 & 40 & 63 & 97 & 22 & 103 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 13 \\ 17 \\ 30 \\ 9 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 18398 \\ 9584 \end{bmatrix}$$

οπότε από την (2.20) προκύπτει ότι

$$B = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} 6 & 955 & 412 \\ 955 & 153603 & 62934 \\ 412 & 62934 & 33640 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27,7 \\ 0,130 \\ 0,187 \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$Y = \beta_0 = 27,79, \quad \beta_1 = 0,130, \quad \beta_2 = 0,187$$

οπότε το ζητούμενο μοντέλο παλινδρόμησης είναι

$$Y = 27,7 + 0,130 x_1 + 0,187 x_2$$

2.10 Εφαρμογές πινάκων σε διανύσματα, ευθείες και επίπεδα

Οι πίνακες και οι ορίζουσες χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην Αναλυτική Γεωμετρία. Στην ενότητα αυτή δίνουμε ορισμένες εφαρμογές τους ενώ στο Κεφάλαιο 4 συνεχίζουμε με εφαρμογές πινάκων και οριζουσών στην Αναλυτική Γεωμετρία.

Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι n διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ είναι **παράλληλα** αν ο βαθμός του πίνακα

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{bmatrix},$$

που έχει στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}), \vec{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}), ...\vec{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, a_{3n})$$

είναι ένα.

$$\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2, ... \parallel \vec{a}_n \Leftrightarrow \operatorname{rank}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n) = 1. \qquad (2.2)$$

Παράδειγμα 2.6 *Να δειχτεί ότι τα σημεία $A(a_1, a_2, a_3), B(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ και $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ είναι συνευθειακά, αν και μόνον αν*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \beta_1 - a_1 & \gamma_1 - a_1 \\ \beta_2 - a_2 & \gamma_2 - a_2 \\ \beta_3 - a_3 & \gamma_3 - a_3 \end{bmatrix} = 1.$$

Λύση

Τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά αν και μόνον αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι παράλληλα, δηλαδή αν ο βαθμός του πίνακα που έχει ως στήλες τα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι ένα,

$$\operatorname{rank}\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A\Gamma}\right] = 1.$$

Δηλαδή, επειδή

$$\overrightarrow{AB} = (\beta_1 - a_1, \beta_2 - a_2, \beta_3 - a_3) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Gamma} = (\gamma_1 - a_1, \gamma_2 - a_2, \gamma_3 - a_3),$$

αν

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \beta_1 - a_1 & \gamma_1 - a_1 \\ \beta_2 - a_2 & \gamma_2 - a_2 \\ \beta_3 - a_3 & \gamma_3 - a_3 \end{bmatrix} = 1.$$

Στο Κεφάλαιο 7 δείχνουμε ότι:

Παρατήρηση 2.3 *Τρία διανύσματα του χώρου*

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3),\ \vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

*είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** αν και μόνον η ορίζουσα $det(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$, η οποία έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, είναι διάφορη του μηδενός*

$$det(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) \neq 0.$$

*Επομένως τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι **γραμμικώς εξαρτημένα** αν και μόνον αν*

$$det(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 0.$$

Παράδειγμα 2.7 *Να εξεταστεί αν κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων*

$$\vec{a} = (1, 2, 1),\ \vec{\beta} = (-2, -1, 1) \ \text{ και } \ \vec{\gamma} = (1, -1, 5).$$

Λύση

Η ορίζουσα του πίνακα των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ προκύπτει

$$det(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = 21,$$

οπότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.13, τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα, κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τους.

■

Είναι εύκολο να θυμόμαστε τον τύπο υπολογισμού του εξωτερικού γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, και $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (βλ. Ενότητα 4.4) με τη βοήθεια της συμβολικής ορίζουσας

$$\vec{a} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

όπου το ανάπτυγμα νοείται ως προς την πρώτη γραμμή.

Το μικτό γινόμενο (βλ. Ενότητα 4.4) των $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ είναι ίσο με την ορίζουσα $det(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$ του πίνακα που έχει ως στήλες (ή γραμμές) τις συντεταγμένες τους.

$$\vec{a} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = det(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

2.11 Εφαρμογές πινάκων στα οικονομικά

Παράδειγμα 2.8 *Για μία βιομηχανία που παράγει 4 αντικείμενα A_1, A_2, A_3, A_4 χρησιμοποιώντας τις πρώτες ύλες Π_1, Π_2, Π_3 ο πίνακας*

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

περιέχει την ποσότητα από κάθε πρώτη ύλη που απαιτείται για την κατασκευή κάθε αντικειμένου (m_{ij} είναι η ποσότητα σε κιλά της πρώτης ύλης Π_i που απαιτείται για την κατασκευή ενός αντικειμένου A_j και ο πίνακας

$$D = \begin{bmatrix} 33 & 25 & 46 & 39 & 66 \\ 85 & 67 & 39 & 29 & 78 \\ 65 & 73 & 37 & 52 & 77 \\ 69 & 87 & 63 & 59 & 79 \end{bmatrix}$$

περιέχει τον αριθμό παραγόμενων αντικειμένων A_1, A_2, A_3, A_4 για κάθε εργάσιμη ημέρα της εβδομάδας (d_{ij} είναι ο αριθμός παραγόμενων αντικειμένων A_1, A_2, A_3, A_4 την ημέρα j της εβδομάδας).
Αν οι τιμές ανά κιλό κάθε πρώτης ύλης δίνονται στο διάνυσμα (πίνακα-γραμμή)

$$T = \begin{bmatrix} 12,4 & 26,4 & 12,2 \end{bmatrix}$$

να βρεθούν:
α) Η απαιτούμενη ποσότητα από κάθε πρώτη ύλη για κάθε ημέρα της εβδομάδας.
β) Το κόστος των απαιτούμενων πρώτων υλών για κάθε ημέρα της εβδομάδας.

Λύση

α) Η απαιτούμενη ποσότητα των πρώτων υλών Π_1, Π_2, Π_3 για κάθε εργάσιμη ημέρα της εβδομάδας δίνεται από το γινομένο πινάκων $E = M \cdot D$ (e_{ij} είναι η απαιτούμενη ποσότητα σε κιλά της πρώτης ύλης Π_i την ημέρα j της εβδομάδος)

$$E = M \cdot D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33 & 25 & 46 & 39 & 66 \\ 85 & 67 & 39 & 29 & 78 \\ 65 & 73 & 37 & 52 & 77 \\ 69 & 87 & 63 & 59 & 79 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 736 & 762 & 553 & 560 & 899 \\ 975 & 895 & 655 & 604 & 1121 \\ 1013 & 1011 & 732 & 764 & 1261 \end{bmatrix}$$

β) Το κόστος των απαιτούμενων πρώτων υλών για κάθε ημέρα της εβδομάδας δίνεται από το γινομένο πινάκων $C = T \cdot E$ (c_i είναι το κόστος των απαιτούμενων πρώτων υλών για την ημέρα i της εβδομάδος)

$$\begin{aligned} C &= T \cdot E = \begin{bmatrix} 12,4 & 26,4 & 12,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 736 & 762 & 553 & 560 & 899 \\ 975 & 895 & 655 & 604 & 1121 \\ 1013 & 1011 & 732 & 764 & 1261 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 47225 & 45411 & 33079,6 & 32210,4 & 56126,2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.9 *Κάποιος επένδυσε 50000 σε 3 τράπεζες με ετήσια επιτόκια* $1,5\%, 3\%$ *και* 5%*. Αν ο συνολικός τόκος που θα εισπράξει για ένα έτος είναι 1780 και το ποσό που επένδυσε με* 3% *είναι κατά 4000 μεγαλύτερο του ποσού που επένδυσε με* 5%*, να βρεθούν τα ποσά που επένδυσε σε κάθε τράπεζα.*

Λύση

Αν x, y, z τα ποσά που επένδυσε με επιτόκιο $1,5\%,\ 3\%$ και 5%,

$$x + y + z = 50000 \tag{i}$$

Σε ένα έτος ο τόκος για το ποσό x είναι

$$\frac{1,5}{100}x = 0,015x$$

και για τα y και z

$$0,03y \ \text{ και } \ 0,05z \ \text{ αντίστοιχα,}$$

οπότε

$$0,015x + 0,03y + 0,05z = 1780 \tag{ii}$$

Επίσης, δίνεται ότι

$$y - z = 4000. \tag{iii}$$

Οι $(i) - (iii)$, σε μορφή πινάκων γράφονται ως

$$AX = B,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,015 & 0,03 & 0,05 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 50000 \\ 1780 \\ 4000 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

οπότε

$$X = A^{-1}B.$$

Με τους γνωστούς τρόπους προκύπτει

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,67 & -40 & -0,4 \\ -0,3 & 20 & 0,7 \\ -0,3 & 20 & -0,3 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$X = \begin{bmatrix} 1,67 & -40 & -0,4 \\ -0,3 & 20 & 0,7 \\ -0,3 & 20 & -0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50000 \\ 1780 \\ 4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7200 \\ 23400 \\ 19400 \end{bmatrix}$$

Άρα, τα ποσά που κατέθεσε είναι

$$x = 7200, \quad y = 23400, \quad z = 19400.$$

Παράδειγμα 2.10 *Ο αριθμός κομματιών του προϊόντος Α,Β και Γ που πωλήθηκαν σε ένα κατάστημα ανά τετράμηνο του τελευταίου έτους και οι αντίστοιχες εισπράξεις δίνονται στον παρακάτω πίνακα*

Τετράμηνο	*Α*	*Β*	*Γ*	*Είσπραξη*
I	*121*	*95*	*206*	*4284*
II	*232*	*55*	*68*	*3820*
III	*59*	*110*	*45*	*3500*

Να βρεθεί η τιμή μονάδας κάθε προϊόντος.

Λύση

Αν x, y, z οι τιμές μονάδας των προϊόντων Α,Β και Γ τότε οι εισπράξεις του πρώτου τετραμήνου από τα 3 αυτά προϊόντα είναι

$$121x, 95y \text{ και } 206z \text{ αντίστοιχα,}$$

οπότε

$$121x + 95y + 206z = 4264.$$

Όμοια

$$232x + 55y + 68z = 3820$$

και

$$59x + 110y + 45z = 3500.$$

Οι 3 αυτές εξισώσεις γράφονται σε μορφή πινάκων ως

$$AX = B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 121 & 95 & 206 \\ 232 & 55 & 68 \\ 59 & 110 & 45 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4264 \\ 3820 \\ 3500 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

’ρα,

$$X = A^{-1}B.$$

Ο αντίστροφος πίνακας είναι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0,00814 & 0,029912 & -0,00792 \\ 0,000524 & -0,01092 & 0,014096 \\ 0,009396 & -0,01254 & -0,00185 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$X = \begin{bmatrix} -0,00148 & 0,005452 & -0,00144 \\ 0,00191 & -0,00199 & 0,011732 \\ 0,006605 & -0,00228 & -0,00456 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4264 \\ 3820 \\ 3500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,413 \\ 25,297 \\ 3,601 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2.11 *Μία αλυσίδα 4 ξενοδοχείων χρησιμοποιεί τους πίνακες*

$$A = \begin{bmatrix} 125 & 182 & 112 \\ 210 & 150 & 175 \\ 170 & 220 & 100 \\ 250 & 170 & 220 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Το a_{ij} είναι ο αριθμός διανυκτερεύσεων στο ξενοδοχείου $i(i = 1,2,3,4)$ το τετράμηνο j του έτους ($j = 1,2,3$) και $\beta[j]$ είναι η τιμή διανυκτέρευσης το τετράμηνο j. Να εκφραστεί, συναρτήσει των A,B, ο πίνακας που δίνει την ετήσια είσπραξη κάθε ξενοδοχείου και να βρεθεί η συνολική είσπραξη της αλυσίδας.

Λύση

Η είσπραξη του ξενοδοχείου i είναι

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\beta_j, \quad i = 1,2,3,4,$$

οπότε από τον ορισμό του γινομένου πινάκων προκύπτει ότι ο πίνακας στήλη Ε (4×1) των ετήσιων εισπράξεων των 4 ξενοδοχείων είναι το γινόμενο των πινάκων Α (4×3) και Β (3×1)

$$E = AB = \begin{bmatrix} 125 & 182 & 112 \\ 210 & 150 & 175 \\ 170 & 220 & 100 \\ 250 & 170 & 220 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16890 \\ 21750 \\ 20300 \\ 25900 \end{bmatrix}$$

Η συνολική είσπραξη της αλυσίδας είναι το άθροισμα των στοιχείων του πίνακα Ε

$$\Sigma\text{E} = \sum_{i=1}^{4} \epsilon_i = 16890 + 21750 + 20300 + 25900 = 84840.$$

2.12 Εφαρμογές πινάκων στις διμελείς σχέσεις

Οι διμελείς σχέσεις αποτελούν ένα μαθηματικό αντικείμενο που βρίσκει εφαρμογές σε πολλούς τομείς και περιγράφεται με τη βοήθεια πινάκων.

Ορισμός 2.1 *Ορίζουμε ως* ***διμελή σχέση*** R *από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B οποιοδήποτε υποσύνολο του* $A \times B$ *(σύνολο όλων των ζευγών* (a, β)*, όπου* $a \in A$ *και* $\beta \in B$*). Δηλαδή η* R *είναι ένα σύνολο ζευγών με πρώτο στοιχείο ένα στοιχείο του A και δεύτερο ένα στοιχείο του B*

$$R = \{(x, y), \quad x \in A \quad \text{και} \quad y \in B\}$$

Για παράδειγμα η
$$R = \{(1, \gamma), (2, a), (2, \beta), (2, \delta), (3, a), (3, \delta)\} \qquad (i)$$
είναι μια διμελής σχέση από το σύνολο

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ στο } B = \{a, \beta, \gamma, \delta\}$$

Ως **αντίστροφη** R^{-1} μιας σχέσης R από το A, B ορίζουμε την διμελή σχέση από το B στο A

$$R^{-1} = \{(y, x) : \quad (x, y) \in R\}$$

Έτσι, για τη σχέση (i) του παραπάνω παραδείγματος

$$R^{-1} = \{(\gamma, 1), (a, 2), (\beta, 2), (\delta, 2), (a, 3), (\delta, 3)\}.$$

Έστω R μια σχέση από το σύνολο A στο B και S μια σχέση από το B στο Γ, τότε ορίζουμε ως σύνθεση $R \circ S$ των R, S την σχέση

$$R \circ S = \{(a, \gamma) : \text{ υπάρχει } \beta \in B \text{ με } (a, \beta) \in R \text{ και } (\beta, \gamma) \in S\}$$

Παράδειγμα 2.12 *Αν* $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, \beta, \gamma, \delta, \}$ *και* $\Gamma = \{x, y, z\}$
η σχέση R *από το* A *στο* B *είναι*

$$R = \{(1, a), (1, \gamma), (2, a), (2, \beta), (3, \delta), (4, \delta)\}$$

και η σχέση S *από το* B *στο* Γ *είναι*

$$S = \{(\beta, y), (\beta, z), (\gamma, x), (\delta, y)\}$$

να βρεθεί η σχέση $R \circ S$ *από το* A *στο* Γ

Λύση

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.20,

$$R \circ S = \{(1, x), (2, y), (2, z), (3, y), (4, y)\}$$

Ένας βασικός τρόπος παράστασης μιας διμελούς σχέσης R από το σύνολο A στο B είναι με τη βοήθεια ενός $n \times m$ μπουλιανού πίνακα R (βλ. Ενότητα 2.7), όπου n και m το πλήθος των στοιχείων των συνόλων A και B ως εξής:

Παρατήρηση 2.4 ***Πίνακα*** *μίας διμελούς σχέσης* R *λέμε έναν μπουλιανό πίνακα* M_R *διαστάσεων* $n \times m$*, όπου* n *και* m *οι πληθικοί αριθμοί του πεδίου ορισμού* D_f *και του συνόλου τιμών της* R_f *αντίστοιχα, του οποίου η κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο* x *του* D_f *και η κάθε στήλη σε ένα στοιχείο* y *του* R_f*. Το στοιχείο της γραμμής* i *και της στήλης* j *είναι 1 (*$M_R[i, j] = 1$*) αν τα στοιχεία* x *και* y *των* D_f *και* R_f *που αντιστοιχούν στη γραμμή* i *και στη στήλη* j *συνδέονται με την* R *(*$(x, y) \in R$*) και την τιμή* 0 *(*$M_R[i, j] = 0$*) αν τα* x *και* y *δεν συνδέονται με την* R *(*$(x, y) \notin R$*).*

Για παράδειγμα ο πίνακας της διμελούς σχέσης (i) είναι

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2.13 *Να γραφεί η σχέση R από το σύνολο $A = \{a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ στο $B = \{1, 2, 3\}$ της οποίας ο πίνακας είναι*

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

Σύμφωνα με τον ορισμό του πίνακα σχέσης

$$R = \{(a, 2), (\beta, 3), (\gamma, 1), (\gamma, 3), (\delta, 1), (\epsilon, 2), (\epsilon, 3)\}$$

Παράδειγμα 2.14 *Να βρεθεί ο πίνακας της σχέσης R από το $A = \{2, 3, 4, 5\}$ στο $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ που ορίζεται ως*

$$(x, y) \in R \text{ αν το } x \text{ διαιρεί το } y.$$

Λύση

Σύμφωνα με τον ορισμό της R,

$$R = \{(2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 6), (3, 9), (4, 8), (5, 5), (5, 10)\}$$

οπότε ο πίνακας της είναι

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Από τον ορισμό της αντίστροφης μιας σχέσης και του ορισμού του αντίστροφου πίνακα προκύπτει:

Πρόταση 2.1 *Ο πίνακας της αντίστροφης R^{-1} μιας σχέσης R είναι ο ανάστροφος A^T του πίνακα A της R.*

Παράδειγμα 2.15 *Να βρεθεί ο πίνακας της αντίστροφης της σχέσης R στο σύνολο $A = \{0, 1, 2, 3\}$ της οποίας τα ζεύγη είναι*

$$R = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (2, 0), (3, 0), (3, 1)\}$$

Λύση

Ο πίνακας της R είναι

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε ο πίνακας της αντίστροφης της R^{-1} είναι

$$M_{R^{-1}} = M_R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πρόταση 2.2 *Ο πίνακας της σύνθεσης $R_1 \circ R_2$ των R σχέσεων R_1 και R_2 είναι το γινόμενο των μπουλιανών πινάκων M_1, M_2 των σχέσεων R_1 και R_2*

$$M = M_1 \otimes M_2$$

Το άθροισμα δυο μπουλιανών πινάκων A και B ορίζεται ως ο πίνακας Γ με στοιχεία (βλ. Ενότητα 2.7)

$$\Gamma_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} = \max\{A_{ij}, B_{ij}\}$$

Το γινόμενο δυο μπουλιανών πινάκων A και B διαστάσεων $n \times \lambda$ και $\lambda \times m$ είναι ο μπουλιανός πίνακας $\Gamma = A \oplus B$ διάστασης $n \times m$ με στοιχεία (βλ. Ενότητα 2.7)

$$\Gamma_{ij} = \max_{k=1}^{\lambda}\{A_{ik} \cdot B_{kj}\}$$

Παράδειγμα 2.16 *Για τα σύνολα*

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\} \quad \textit{και} \quad \Gamma = \{x, y, z\}$$

ορίζουμε τη σχέση R από το A στο B ως

$$R = \{(1, a), (1, \gamma), (1, \epsilon), (2, a), (2, \beta), (3, \delta), (4, \delta)\}$$

και τη σχέση S από το B στο Γ

$$S = \{(a, z), (\beta, y), (\beta, z), (\gamma, x), (\delta, y), (\epsilon, y)\}$$

α) Να βρεθούν οι πίνακες των σχέσεων R και S.
β) Να βρεθεί η σχέση $R \circ S$.

Λύση

α) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.14, οι πίνακες των σχέσεων R και S είναι

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.13, ο πίνακας της σύνθεσης των R και S είναι

$$M_{R\circ S} = M_R \cdot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε η σχέση $R \circ S$ είναι

$$R \circ S = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, y), (2, z), (3, y), (4, y)\}.$$

■

Ορισμός 2.2 *Μια σχέση σε ένα σύνολο A λέγεται **ανακλαστική** αν*

$$(a, a) \in R, \quad \textit{για κάθε } a \in A$$

*και **συμμετρική** αν*

$$(\beta, a) \in R, \quad \textit{όταν } (a, \beta) \in R$$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι

Παρατήρηση 2.5 *Μια σχέση είναι ανακλαστική αν όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα της είναι 1 και συμμετρική αν ο πίνακας της είναι συμμετρικός.*

Παράδειγμα 2.17 *Για τη σχέση του συνόλου $A = \{a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$*

$$R = \{(a, a), (a, \delta), (\beta, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \beta), (\gamma, \gamma), (\gamma, \epsilon), (\delta, a), (\delta, \delta), (\epsilon, \gamma)\}$$

α) Να βρεθεί ο πίνακας β) Να εξεταστεί αν η R είναι: $i)$ ανακλαστική $ii)$ συμμετρική

Λύση

α) Ο πίνακας της R είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

β) Από τον M_R φαίνεται ότι:
i) Η R δεν είναι ανακλαστική αφού έχει 0 στην κύρια διαγώνιο (δεν περιέχει το (ϵ, ϵ)).
ii) Η R συμμετρική αφού ο M_R είναι συμμετρικός πίνακας.

2.13 Πίνακες μετάβασης

Οι πίνακες μετάβασης περιγράφουν συνοπτικά τη μετάβαση ενός συστήματος από μια κατάσταση σε μια άλλη και χρησιμοποιούνται πολύ στις μαρκοβιανές αλυσίδες (βλ. Ενότητα 2.6.6).

Ορισμός 2.3 ***Πίνακα μετάβασης*** *ενός συστήματος που μπορεί να βρεθεί σε n καταστάσεις, οι οποίες τη χρονική στιγμή k περιγράφονται από το διάνυσμα $X^{(k)}$ (πίνακας στήλη $1 \times n$), λέμε τον πίνακα A $n \times n$, που είναι τέτοιος ώστε*

$$X^{(k)} = AX^{(k-1)}.$$

Με επαγωγή προκύπτει ότι το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος στο τέλος της περιόδου m είναι

$$X^{(m)} = A^m X^{(0)}, \tag{2.3}$$

Στη συνέχεια δίνουμε ένα απλό παράδειγμα, στο οποίο το σύστημα είναι ένας πληθυσμός που κατανέμεται σε 4 περιφέρειες.

Παράδειγμα 2.18 *Η μετακίνηση πληθυσμών σε μια περίοδο μεταξύ 4 περιφερειών περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα $A(4 \times 4)$ όπου a_{ij} είναι το ποσοστό κατοίκων της περιοχής j που μετακινείται στην περιοχή i $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, ενώ το a_{ii} είναι το ποσοστό των κατοίκων της περιοχής i που παραμένουν σε αυτή.*

$$A = \begin{bmatrix} 0,81 & 0,04 & 0,03 & 0,01 \\ 0,04 & 0,78 & 0,10 & 0,04 \\ 0,1 & 0,12 & 0,84 & 0,02 \\ 0,05 & 0,06 & 0,03 & 0,93 \end{bmatrix}$$

α) Να βρεθεί ο πληθυσμός των 4 περιφερειών στο τέλος μίας περιόδου, στην αρχή της οποίας ήταν

$$\pi_1 = 10000, \quad \pi_2 = 25000, \quad \pi_3 = 18000, \quad \pi_4 = 30000.$$

β) Να βρεθεί ο πληθυσμός των 4 περιφερειών στην αρχή μίας περιόδου, αν στο τέλος περιόδου ο πληθυσμός ήταν

$$\pi_1' = 15000, \quad \pi_2' = 30000, \quad \pi_3' = 25000, \quad \pi_4' = 35000.$$

γ) Να βρεθεί ο πληθυσμός των 4 περιφερειών στο τέλος 4 περιόδων, αν η αρχική κατανομή του πληθυσμού στις 4 περιφέρειες ήταν

$$x_1 = 24781, \quad x_2 = 50439, \quad x_3 = 67201, \quad x_4 = 49206.$$

δ) Αν η κατανομή του πληθυσμού στο τέλος της 5ης περιόδου είναι

$$x_1 = 38761, \quad x_2 = 60489, \quad x_3 = 60000, \quad x_4 = 53451$$

να βρεθεί η κατανομή του στην αρχή της πρώτης περιόδου.

Λύση

α) Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.24, ο πίνακας της κατανομής του πληθυσμού στο τέλος της πρώτης περιόδου είναι

$$\pi' = A\pi = \begin{bmatrix} 0,81 & 0,04 & 0,03 & 0,01 \\ 0,04 & 0,78 & 0,10 & 0,04 \\ 0,1 & 0,12 & 0,84 & 0,02 \\ 0,05 & 0,06 & 0,03 & 0,93 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10000 \\ 25000 \\ 18000 \\ 30000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9940 \\ 22900 \\ 19720 \\ 30440 \end{bmatrix} \qquad (i)$$

Δηλαδή, ο τελικός πληθυσμός των 4 περιφερειών είναι

$$\pi_1' = 9940, \quad \pi_2' = 22900, \quad \pi_3' = 19720, \quad \pi_4' = 30440 \ .$$

β) Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα της κατανομής του πληθυσμού στο τέλος της περιόδου είναι $\pi' = [15000, \ 30000, \ 25000, \ 35000]^T$ τότε από την (i) προκύπτει

$$\pi = A^{-1}\pi'$$

Με τον γνωστό τρόπο προκύπτει ότι ο αντίστροφος του πίνακα A είναι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,24 & -0,06 & -0,04 & -0,01 \\ -0,04 & 1,31 & -0,15 & -0,05 \\ -0,14 & -0,18 & 1,22 & -0,02 \\ -0,06 & -0,08 & -0,03 & 1,08 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$\pi = \begin{bmatrix} 1,24 & -0,06 & -0,04 & -0,01 \\ -0,04 & 1,31 & -0,15 & -0,05 \\ -0,14 & -0,18 & 1,22 & -0,02 \\ -0,06 & -0,08 & -0,03 & 1,08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15000 \\ 30000 \\ 25000 \\ 35000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15639 \\ 33051 \\ 22370 \\ 33940 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή, ο αρχικός πληθυσμός των 4 περιφερειών αν ο τελικός πληθυσμός είναι

$$\pi_1 = 15639, \quad \pi_2 = 33051, \quad \pi_3 = 22370, \quad \pi_4 = 33940.$$

γ) Σύμφωνα με την (2.23), το διάνυσμα της κατανομής του πληθυσμού στο τέλος της τέταρτης περιόδου είναι

$$X^{(4)} = A^4 X^{(0)} \qquad (i)$$

Με τη βοήθεια λογισμικού

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0,45 & 0,1 & 0,09 & 0,04 \\ 0,13 & 0,44 & 0,23 & 0,11 \\ 0,26 & 0,28 & 0,56 & 0,08 \\ 0,16 & 0,18 & 0,12 & 0,77 \end{bmatrix}$$

οπότε η (i) γίνεται

$$X^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,45 & 0,1 & 0,09 & 0,04 \\ 0,13 & 0,44 & 0,23 & 0,11 \\ 0,26 & 0,28 & 0,56 & 0,08 \\ 0,16 & 0,18 & 0,12 & 0,77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24781 \\ 50439 \\ 67201 \\ 49206 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23926 \\ 46266 \\ 62702 \\ 58734 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο πληθυσμός των 4 περιφερειών στο τέλος των 4 περιόδων είναι

$$x_1 = 23926, \quad x_2 = 46266, \quad x_3 = 62702, \quad x_4 = 58734.$$

δ) Επειδή

$$X^{(5)} = A^5 X^{(0)} \qquad (ii)$$

$$\begin{aligned} A^5 = A^4 A \quad &= \begin{bmatrix} 0,45 & 0,1 & 0,09 & 0,04 \\ 0,13 & 0,44 & 0,23 & 0,11 \\ 0,26 & 0,28 & 0,56 & 0,08 \\ 0,16 & 0,18 & 0,12 & 0,77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,81 & 0,04 & 0,03 & 0,01 \\ 0,04 & 0,78 & 0,10 & 0,04 \\ 0,1 & 0,12 & 0,84 & 0,02 \\ 0,05 & 0,06 & 0,03 & 0,93 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,38 & 0,11 & 0,10 & 0,04 \\ 0,15 & 0,38 & 0,24 & 0,13 \\ 0,28 & 0,30 & 0,51 & 0,10 \\ 0,19 & 0,21 & 0,15 & 0,72 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπότε, με τη βοήθεια λογισμικού,

$$(A^5)^{-1} = \begin{bmatrix} 3,09 & -0,65 & -0,27 & -0,04 \\ -0,11 & 4,56 & -2,00 & -0,53 \\ -1,52 & -2,22 & 3,29 & 0,03 \\ -0,46 & -0,69 & -0,02 & 1,54 \end{bmatrix}$$

Έτσι, η (ii) δίνει

$$X^{(0)} = (A^5)^{-1}X^{(5)} = \begin{bmatrix} 3,09 & -0,65 & -0,27 & -0,04 \\ -0,11 & 4,56 & -2,00 & -0,53 \\ -1,52 & -2,22 & 3,29 & 0,03 \\ -0,46 & -0,69 & -0,02 & 1,54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38761 \\ 60489 \\ 60000 \\ 53451 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62469 \\ 123622 \\ 5304 \\ 21306 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, ο πληθυσμός των 4 περιφερειών στην αρχή της πρώτης περιόδου ήταν

$$x_1 = 62469, \quad x_2 = 123622, \quad x_3 = 5304, \quad x_4 = 21306.$$

2.14 Μπουλιανοί πίνακες

Οι **Μπουλιανοί πίνακες** (boolean) πίνακες με στοιχεία 0 ή 1, οι οποίοι χρησιμοποιούνται σε διάφορα πεδία των μαθηματικών, όπως στην περιγραφή διμελών σχέσεων (βλ. Ενότητα 2.6.9). Οι πράξεις μεταξύ μπουλιανών πινάκων ορίζονται σύμφωνα με την άλγεβρα Boole (βλ. κεφάλαιο ;).

Ορισμός 2.4 *Ορίζουμε ως **συμπληρωματικό** του μπουλιανού $n \times m$ πίνακα A τον μπουλιανό πίνακα A', όπου ένα στοιχείο του είναι 1 αν το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα A είναι 0 και 0 αν το αντίστοιχο στοιχείο του A είναι 1. Δηλαδή,*

$$A'_{ij} = 1 - A_{ij} \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, j = 1, 2, \ldots, m$$

Ο συμπληρωματικός πίνακας του πίνακα A γράφεται ως

$$A = \mathbf{1} - A \tag{2.4}$$

όπου $\mathbf{1}$ πίνακας με διαστάσεις τις διαστάσεις του A και όλα τα στοιχεία του μονάδα ($\mathbf{1}_{ij} = 1, \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, \nu, j = 1, 2, \ldots, m$).

Ορισμός 2.5 *Το άθροισμα δυο μπουλιανών $n \times m$ πινάκων A και B ορίζεται ως ο $n \times m$ πίνακας Γ με στοιχεία*

$$\Gamma_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} = max\{A_{ij}, B_{ij}\} \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, j = 1, 2, \ldots, m$$

Παράδειγμα 2.19

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ορισμός 2.6 *Το γινόμενο δυο μπουλιανών πινάκων A και B διαστάσεων $n \times \lambda$ και $\lambda \times m$ είναι ο μπουλιανός πίνακας $\Gamma = A \otimes B$ διάστασης $n \times m$ με στοιχεία*

$$\Gamma_{ij} = \max_{k=1}^{\lambda}\{A_{ik} \cdot B_{kj}\} \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, j = 1, 2, \ldots, m$$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει οτι:

Παρατήρηση 2.6 *Το Γ_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, \nu, j = 1, 2, \ldots, m$ είναι 1 αν*

$$\exists k, \ \ 1 \leq k \leq \lambda : \ \ A_{ik} = B_{kj} = 1$$

δηλαδή αν υπάρχει k τέτοιο, ώστε το k-στοιχείο της γραμμής i του πίνακα A καθώς και το k-στοιχείο της στήλης j του πίνακα B να είναι 1. Αλλιώς,

$$\Gamma_{ik} = 0$$

Παράδειγμα 2.20 *Το γινόμενο των μπουλιανών πινάκων*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι

$$
\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max\{1\cdot 0, 0\cdot 1, 1\cdot 0\} & \max[1\cdot 0, 0\cdot 0, 1\cdot 1\} & \max\{1\cdot 1, 0\cdot 0, 1\cdot 1\} \\ \max\{0\cdot 0, 1\cdot 1, 1\cdot 0\} & \max\{0\cdot 0, 1\cdot 0, 1\cdot 1\} & \max\{1\cdot 1, 0\cdot 0, 1\cdot 1\} \\ \max\{1\cdot 0, 0\cdot 1, 0\cdot 0\} & \max\{1\cdot 0, 0\cdot 0, 0\cdot 1\} & \max\{1\cdot 1, 0\cdot 0, 0\cdot 1\} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ορισμός 2.7 *Το Hadamard γινόμενο δυο μπουλιανών πινάκων A και B διαστάσεων $n \times m$ είναι ο μπουλιανός πίνακας $\Gamma = A \odot B$ διάστασης $n \times m$ με στοιχεία τα γινόμενα των αντίστοιχων στοιχείων των πινάκων A και B.*

$$\Gamma_{ij} = A_{ij} \cdot B_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \;\; j = 1, 2, \ldots, m$$